

## Ερευνώντας τον κόσμο του παιδιού

Τόμ. 3 (1998)



### Ερευνητικό Πρόγραμμα Ανάπτυξης Πρωτομαθηματικών Εννοιών

*Μ. Τζεκάκη (M. Tzekaki), Σ. Καλαϊτζίδου (S. Kalaitzidou)*

doi: [10.12681/icw.18162](https://doi.org/10.12681/icw.18162)

Copyright © 2018, Ερευνώντας τον κόσμο του παιδιού



Άδεια χρήσης [Creative Commons Αναφορά-Μη Εμπορική Χρήση 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

### Βιβλιογραφική αναφορά:

Τζεκάκη (M. Tzekaki) Μ., & Καλαϊτζίδου (S. Kalaitzidou) Σ. (1998). Ερευνητικό Πρόγραμμα Ανάπτυξης Πρωτομαθηματικών Εννοιών. *Ερευνώντας τον κόσμο του παιδιού*, 3, 72–83. <https://doi.org/10.12681/icw.18162>

## **Ερευνητικό Πρόγραμμα Ανάπτυξης Πρωτομαθηματικών Εννοιών**

### **Γενική Παρουσίαση**

**Η** ανάπτυξη μαθηματικών εννοιών στην προσχολική ηλικία απασχολεί από χρόνια την επιστημονική και εκπαιδευτική κοινότητα. Ωστόσο ο προσανατολισμός που έχει η ανάπτυξη αυτών των εννοιών παραμένει περιορισμένος από δύο στερεοτυπικές αντιλήψεις [Τζεκάκη, 1994α].

- Η πρώτη αντίληψη θεωρεί ότι τα μαθηματικά του νηπιαγωγείου περιορίζονται στους αριθμούς, τις πράξεις και τα σχήματα, με όλες τις υπόλοιπες έννοιες να αποτελούν προετοιμασία για την εισαγωγή σε αυτά τα “μαθηματικά”.

- Η δεύτερη αντίληψη αντιμετωπίζει τα μαθηματικά της προσχολικής ηλικίας ως μια γενικότερη προετοιμασία του παιδιού για την σχολική εκπαίδευση. Το νηπιαγωγείο παραμένει εκτός θεσμικής υποχρεωτικής εκπαίδευσης με αποτέλεσμα η ενασχόληση με έννοιες που θα επαναληφθούν και στο Δημοτικό να είναι υποτιμημένη [βλ. σχετικά ΥΠΕΠΘ, 1990].

Ο προσανατολισμός του ερευνητικού

προγράμματος που πραγματοποιούμε και του οποίου, στο άρθρο αυτό, παρουσιάζουμε ένα μικρό μόνο μέρος, επιδιώκει να ξεφύγει από τις προαναφερθείσες αντιλήψεις.

Κατά πρώτο λόγο, στο πλαίσιο αυτού του προγράμματος, μαθηματική θεωρείται κάθε δραστηριότητα που περιλαμβάνει μια μαθηματική έννοια [1]. Η έννοια δομεί τη δραστηριότητα και οργανώνει τη δράση του παιδιού καθώς αποτελεί το κλειδί για την αντιμετώπιση της κατάστασης που δημιουργεί. Το παιδί αντιμετωπίζει τη δραστηριότητα χρησιμοποιώντας μια “λανθάνουσα γνώση” από κανόνες και τρόπους λειτουργίας της σχετικής έννοιας χωρίς να είναι σε θέση να την αναγνωρίσει ή να μιλήσει γι’ αυτή<sup>1</sup>.

Το νηπιαγωγείο μπορεί να προτείνει στο νήπιο ένα πλήθος δραστηριοτήτων οι οποίες σχετίζονται με σημαντικές μαθηματικές έννοιες. Οι έννοιες αυτές παρουσιάζονται σε ένα πρωτομαθηματικό<sup>2</sup> στάδιο και ξεπερνούν κατά πολύ τους αριθμούς και τα σχήματα. Αφορούν την οργάνωση και αναπαράσταση του χώρου (για παράδειγμα τοπολογικές, προ-

βολικές και μετρικές σχέσεις, συμμετρικές) ή άλλες γενικότερες μαθηματικές έννοιες (συνδυασμοί, διατάξεις κ.λπ.<sup>3</sup>).

Κατά δεύτερο λόγο, στο πλαίσιο του προγράμματος που πραγματοποιούμε, οι μαθηματικές δραστηριότητες που προτείνονται στοχεύουν στην ολόπλευρη ανάπτυξη του παιδιού μέσα από έναν πλούτο εμπειριών και βιωμάτων που το βοηθούν να γνωρίσει και να λειτουργήσει καλύτερα στο περιβάλλον που ζει. Με την έννοια αυτή, η προσχολική εκπαίδευση αποτελεί μian αυτόνομη βαθμίδα όπου μέσα της η μαθηματική εκπαίδευση δίνει στο παιδί την ευκαιρία να αναπτύξει ολόπλευρα όλες εκείνες τις δυνατότητες που ανταποκρίνονται στην ηλικία του και καλύπτουν τις ανάγκες του.

Στη βάση αυτού του προσανατολισμού η μελέτη της ανάπτυξης μαθηματικών εννοιών στην προσχολική ηλικία ακολουθεί το γενικότερο θεωρητικό πλαίσιο της Διδακτικής των Μαθηματικών για την ανάπτυξη εννοιών, δηλαδή την οικοδόμηση της γνώσης μέσα από το σχεδιασμό κατάλληλων για κάθε έννοια διδακτικών καταστάσεων [Brousseau, 1986, Vergnaud, 1981, 1994].

### **Διδακτικές καταστάσεις για την ανάπτυξη εννοιών: γενικές αρχές**

Διδακτική κατάσταση ονομάζεται ένα σύνολο από σχέσεις αλληλεπίδρασης ανάμεσα σε ένα μαθητή ή μία ομάδα μαθητών, ένα συγκεκριμένο περιβάλλον και ένα ή περισσότερους εκπαιδευτικούς, με σκοπό να αποκτήσουν οι μαθητές μία γνώση [Brousseau, ό.π.].

Η σύγχρονη αντίληψη οικοδόμησης της γνώσης θεωρεί ότι η αλληλεπίδραση με το κατάλληλα διαμορφωμένο περιβάλλον μάθησης είναι αυτή που θα οδηγήσει το παιδί στην ανάπτυξη των εννοιών που επιδιώκουμε [Vergnaud, ό.π.]. Στην έννοια του περιβάλλοντος μάθησης δεν περιλαμβάνεται μόνο, όπως συνήθως πιστεύεται, το παιδαγωγικό υλικό αλλά ένα σύνολο υλικών και νοητικών καταστάσεων οι οποίες δημιουργούν τις κατάλληλες για την ανάπτυξη εννοιών συνθήκες. Για να επιτύχουμε τη διαμόρφωση ενός τέτοιου περιβάλλοντος μάθησης παίρνουμε υπόψη μας δύο ζητήματα:

- Πρώτον, το παιδί για να αναπτύξει μια γνώση πρέπει να “εμπλακει” σε μία κατάσταση κατάλληλα διαμορφωμένη ώστε να το προτρέπει να δράσει, να κατασκευάσει, να αποφασίσει, να επιλέξει κ.λπ., με δυο λόγια να δραστηριοποιηθεί ολόπλευρα. Η εμπλοκή αυτή σημαίνει κινητοποίηση των γνώσεων και των δεξιοτήτων που έχει, δεδομένου ότι η κατάλληλα διαμορφωμένη κατάσταση αποτελεί για το παιδί ένα “πρόβλημα”. Αν οι γνώσεις που διαθέτει δεν είναι αρκετές για την αντιμετώπιση της κατάστασης στην οποία έχει εμπλακεί, τότε το παιδί θα τις μετασχηματίσει, θα τις επανοργανώσει, θα τις επαναπροσδιορίσει για να μπορέσει να αντιμετωπίσει το πρόβλημα που του δημιουργεί η κατάσταση που αντιμετωπίζει.

Μέσα στο πλαίσιο αυτό, η οργάνωση μιας διδακτικής κατάστασης για την ανάπτυξη μιας γνώσης έχει ως προϋπόθεση<sup>4</sup>, από τη μία μεριά, το σαφή προσδιορισμό των εννοιών που επιδιώκουμε να αναπτύξουμε, και από την άλλη την οριοθέτηση των εννοιών που είναι το

παιδί έτοιμο να αναπτύξει<sup>5</sup>, έτσι ώστε μέσα από την ενασχόληση του παιδιού με τη δραστηριότητα που του προτείνουμε να αναπτυχθούν οι επιθυμητές έννοιες [Brousseau, ό.π., Vergnaud, ό.π.].

• Δεύτερον, η διδακτική κατάσταση που προτείνουμε πρέπει να αποτελεί με ακρίβεια μια μαθηματική δραστηριότητα σχετική με την έννοια που επιδιώκουμε να αναπτύξουμε, θα πρέπει δηλαδή όπως ήδη αναφέραμε, να καθορίζει τη δράση του παιδιού και παράλληλα να αποτελεί το κλειδί της λύσης του “προβλήματος” που του θέτει.

Με βάση τα παραπάνω, λοιπόν, οι διδακτικές καταστάσεις που οργανώσαμε προσδιορίστηκαν από τη γνώση που επιδιώκαν να αναπτύξουν, τη δράση που επέτρεπαν στο παιδί και το ρόλο του δασκάλου.

#### - Ως προς τη γνώση

Αναφέραμε ήδη ότι η γνώση που θέλουμε να αναπτύξουμε είναι το στοιχείο που οργανώνει τη διδακτική κατάσταση. Γύρω από αυτή συγκροτείται το πλαίσιο που κινούμαστε, το υλικό που χρησιμοποιούμε, η δράση του παιδιού. Για παράδειγμα, η μεταφορά του προσανατολισμού δεξιά-αριστερά σε ένα σύστημα αναφοράς έξω από το σώμα του παιδιού είναι η γνώση που είναι απαραίτητη για να μπορέσει το παιδί να καθοδηγήσει ένα “ρομπότ” σε μία προκαθορισμένη διαδρομή (βλ. πιο κάτω Περιγραφή και Ανάλυση των Διδακτικών Καταστάσεων)

#### - Ως προς τη δράση του παιδιού

Η κάθε κατάσταση που προτείνουμε έχει τέτοια μορφή ώστε να “εκχωρείται” στο παιδί (ή σε ομάδα παιδιών) ένα “πρό-

βλημα” του οποίου το παιδί δεν γνωρίζει από την αρχή τον τρόπο αντιμετώπισης. Η λέξη “εκχώρηση” υποδηλώνει ακριβώς ότι το παιδί αντιλαμβάνεται πως έχει το ίδιο την ευθύνη λύσης του προβλήματος.

Σε όλες τις προτεινόμενες δραστηριότητες τα παιδιά κατασκευάζουν, αποφασίζουν, επιλέγουν, δίνουν εντολές κ.λπ. Μέσα στις παραπάνω λειτουργίες πρέπει να υπογραμμίσουμε μια φάση όπου τα παιδιά χρειάζεται να διατυπώσουν λεκτικά ό,τι κάνουν. Μια διδακτική κατάσταση περιλαμβάνει οπωσδήποτε ή ακολουθείται από μία κατάσταση διατύπωσης, που δίνει στο παιδί τη δυνατότητα να ορίσει γλωσσικά και άρα να εκφράσει με λόγια τη δράση του.

Τέλος, καθεμιά από τις δραστηριότητες που προτείνουμε περιλαμβάνει κατάλληλους μηχανισμούς ελέγχου που το παιδί έχει στη διάθεσή του. Αν το παιδί δεν μπορεί να διαχειρισθεί και να ελέγξει την ίδια του τη δράση τότε δεν μπορεί να διαπιστώσει την ανεπάρκεια των γνώσεων που χρησιμοποιεί για να τις μετασχηματίσει σε νέες γνώσεις. Οι διαδικασίες ελέγχου [Τζεκάκη, 1995], κατωτέρου πάντα γνωστικού επιπέδου από τη λύση του προβλήματος, αλλά κατάλληλες για το παιδί που δρα, είναι κλειδί στη δημιουργία διδακτικών καταστάσεων.

Στο πρόγραμμα που σχεδιάσαμε, ανάμεσα στις άλλες μορφές ελέγχου, αναπτύχθηκε και η λειτουργία των παρατηρητών-ελεγκτών, δηλαδή ομάδας παιδιών που παρακολουθεί και έχει την ευθύνη της σωστής εξέλιξης της δραστηριότητας.

#### - Ως προς τον εκπαιδευτικό

Ο ρόλος του εκπαιδευτικού περιορίζε-

ται στην οργάνωση της ίδιας της διδακτικής κατάστασης και του υλικού, σε επεξηγήσεις ως προς την αναγκαία δράση και σε βοήθεια, στο βαθμό που τα παιδιά εμφανίζουν αξεπέραστες δυσκολίες. Σε καμιά περίπτωση ο εκπαιδευτικός δεν απαντά στη θέση του παιδιού, δεν εκμαιεύει απαντήσεις και δεν διορθώνει το παιδί. Μια τέτοια διολίσθηση μεταφράζεται σε πλήρη υποκατάσταση του παιδιού, γεγονός καταστροφικό για την ανάπτυξη γνώσης [Brousseau, ό.π.].

Στο σημείο αυτό είναι σημαντικό να τονιστεί ότι η πλαisiώση των δραστηριοτήτων με το κατάλληλο υλικό, είτε αυτό είναι λειτουργικό (για τις ανάγκες ανάδειξης της μαθηματικής έννοιας), είτε είναι συνοδευτικό (για τη δημιουργία κινήτρων συμμετοχής) ήταν καθοριστική για την ανάπτυξη ενός περιβάλλοντος μάθησης για τα νήπια. Η εξεικόνιση της εμπειρίας που του προτείνουμε, η δραματοποίηση της κατάστασης και η σαφής οριοθέτηση της δράσης του με τη βοήθεια του υλικού είναι αποφασιστικής σημασίας για την αποτελεσματική λειτουργία μιας διδακτικής κατάστασης.

### **Διδακτικές καταστάσεις για την ανάπτυξη δύο εννοιών: εφαρμογή**

Το ερευνητικό πρόγραμμα που πραγματοποιούμε σε μια τάξη νηπίων του Παιδικού Κέντρου του Παιδαγωγικού Τμήματος Νηπιαγωγών (Π.Τ.Ν.) του Αριστοτέλειου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης υλοποιεί το πρόγραμμα δραστηριοτήτων που έχει εκπονηθεί στο Τμήμα [βλ. Π.Τ.Ν. 1993, Τζεκάκη, 1994]. Η διαδοχή των εννοιών<sup>6</sup> που έχει ακολου-

θηθεί μέχρι την εποχή αυτή είναι η ακόλουθη:

1. Τοποθέτηση και προσανατολισμός στο χώρο, διαδρομές.
2. Χωρικές σχέσεις: τοπολογικές, προβολικές, μετρικές.
3. Μορφές και σχήματα: επίπεδα και στερεά.
4. Ποιοτικές ομαδοποιήσεις και διατάξεις.

Για καθεμιά από τις παραπάνω έννοιες, προγραμματίζουμε ένα σύνολο μαθηματικών δραστηριοτήτων και την πλαισιώνουμε με το κατάλληλο υλικό. Οι δραστηριότητες αυτές προσεγγίζουν την έννοια από διαφορετικές απόψεις όσο και από διαφορετικές μορφές δράσης: βιωματικο-σωματικές, εμπράγματα, αναπαραστατικές.

Από το σύνολο των δραστηριοτήτων που έχουν ως σήμερα πραγματοποιηθεί και ξεπερνούν τις 75 παρουσιάζουμε εδώ μόνο τις 6, προκειμένου να δώσουμε μια γενική εικόνα του ερευνητικού προγράμματος ανάπτυξης μαθηματικών δραστηριοτήτων για την ηλικία αυτή. Όλες οι δραστηριότητες έχουν καταγραφεί σε βίντεο. Οι δραστηριότητες που παρουσιάζουμε σχετίζονται με δύο ενότητες εννοιών:

1. Την ανάπτυξη των εννοιών δεξιά-αριστερά πλευρά-προσανατολισμός
2. Την ανάπτυξη μετρικών σχέσεων.

Οι **στόχοι** για την πρώτη ενότητα είναι οι εξής [Π.Τ.Ν., ό.π.]:

1. Το παιδί αντιλαμβάνεται τη διαφορά σε δύναμη και χρήση των δύο πλευρών του σώματος.
2. Το παιδί ονομάζει την ισχυρή πλευρά “δεξιά” και την άλλη “αριστερή” και προσδιορίζει τη θέση των αντικειμένων σε σχέση με αυτή.

3. Το παιδί προσδιορίζει τη θέση των αντικειμένων μεταξύ τους (δεξιά από, αριστερά από) με βάση σύστημα αναφοράς έξω από αυτό, με προσανατολισμό ίδιο με το σώμα του.

4. Το παιδί προσδιορίζει τη θέση των αντικειμένων μεταξύ τους (δεξιά από, αριστερά από) με βάση σύστημα αναφοράς έξω από αυτό, με προσανατολισμό διαφορετικό από το σώμα του.

Και για τη δεύτερη:

1. Το παιδί συγκρίνει μεταξύ τους αντικείμενα ως προς το μήκος (πλάτος, ύψος κ.λπ.) και συγκρίνει αποστάσεις, με ποιοτικό τρόπο<sup>7</sup>.

2. Το παιδί συγκρίνει αντικείμενα ως προς το μήκος με τη βοήθεια τρίτου αντικειμένου που χρησιμοποιεί χωρίς επανάληψη ή με επανάληψη μιας ή δύο φορές.

### **Ανάλυση και περιγραφή των διδακτικών καταστάσεων**

*1. Για τις έννοιες: δεξιά-αριστερή πλευρά και προσανατολισμός*

Στην ενότητα αυτή προγραμματίστηκαν 15 δραστηριότητες<sup>8</sup> σε αντιστοιχία με τους στόχους που παραθέσαμε προηγούμενα. Κάθε στόχος περιλάμβανε περίπου τρεις δραστηριότητες, έτσι, οι έξι πρώτες δραστηριότητες αφορούσαν τους δύο πρώτους στόχους και οι έξι επόμενες τους δύο τελευταίους. Πραγματοποιήθηκαν επίσης και τρεις επαναληπτικές δραστηριότητες. Σημειώνουμε ότι η ανάπτυξη προσανατολισμού με τις έννοιες δεξιά-αριστερά θεωρείται “δύσκολη” για την ηλικία αυτή και δεν προσεγγίζεται παρά με αποσπασματικές δραστηριότητες. Στο πλαίσιο του προ-

γράμματος που υλοποιούμε, θεωρούμε ότι οι έννοιες αυτές μπορούν να αναπτυχθούν στην ηλικία αυτή με την οργάνωση κατάλληλων διδακτικών καταστάσεων.

Παρουσιάζουμε, για την ενότητα αυτή ενδεικτικά, μία δραστηριότητα που σχετίζεται με τον προσανατολισμό του παιδιού με βάση το σώμα του, “το ροζ τρενάκι”, και μία δραστηριότητα που εισάγει το παιδί στον προσανατολισμό με βάση ένα σύστημα έξω από αυτό, “τους καθρέφτες”. Τέλος, ακολουθούν δύο δραστηριότητες για προσανατολισμό με σύστημα έξω από το σώμα του παιδιού, “οι γρήγοροι ταχυδρόμοι” και “το Ρομπότ Τομπόρ”.

Δομικό στοιχείο των δραστηριοτήτων αποτέλεσε η ύπαρξη σεναρίου που δημιουργεί ένα περιβάλλον δράσης μέσα στο οποίο εισάγεται το παιδί, διευκολύνει την εκχώρηση της κατάστασης και ενθαρρύνει ένα κλίμα ελευθερίας. Μια ενδεικτική παρουσίαση σεναρίου ακολουθεί στην παρουσίαση της πρώτης διδακτικής κατάστασης.

Επισημαίνουμε ότι όλες οι δραστηριότητες στην ενότητα αυτή ασχολούνται με τις έννοιες “δεξιά-αριστερά” αλλά από διαφορετικές προσεγγίσεις, έτσι ώστε τα παιδιά να έρθουν σε επαφή με τις έννοιες αυτές σε ένα σύνολο διαφορετικών καταστάσεων.

1. Το αναποφάσιστο ρόζ τρενάκι: Η δραστηριότητα αυτή στοχεύει να ασκήσει τα παιδιά στον προσδιορισμό του δεξιού-αριστερού προσανατολισμού με σύστημα αναφοράς *το σώμα του*.

Κατασκευάζουμε μια σιδηροδρομική γραμμή από σκοινί, με διακλαδώσεις, παρακάμπεις κ.λπ. και προτείνουμε το ακόλουθο σενάριο: “Ένα ροζ τρενάκι

έτρεχε πάνω σε μία σιδηροδρομική γραμμή. Η γραμμή πήγαινε μια δεξιά και μια αριστερά και το τρενάκι μπερδευόταν και δεν ήξερε πού να πάει. Έτσι ο σταθμάρχης το βοηθούσε και κάθε φορά που χρειαζόταν τού έλεγε από πού να στρίψει.” Τα παιδιά γίνονται οδηγοί στο τρενάκι με τη βοήθεια χάρτινης κατασκευής και κινούνται πάνω στις γραμμές. Στις διακλαδώσεις περιμένουν εντολή από το σταθμάρχη (νηπιαγωγό ή άλλο παιδί) για να κινηθούν προς την αριστερή ή δεξιά γραμμή. Η νηπιαγωγός και τα παιδιά-ελεγκτές παρακολουθούν τη σωστή πορεία. Η λάθος επιλογή προσανατολισμού οδηγεί τα παιδιά σε αδιέξοδη γραμμή και δυστύχημα.

Είναι φανερό ότι η δραστηριότητα είναι οργανωμένη με βάση τους δεξιούς-αριστερούς προσανατολισμούς του σώματος του παιδιού. Η σωστή κίνηση των παιδιών πάνω στις γραμμές είναι συνάρτηση της εύρεσης των σωστών προσανατολισμών, οι οποίοι μάλιστα διατυπώνονται και λεκτικά. Τέλος, η σωστή κίνηση ελέγχεται στη ροή του παιχνιδιού και το κάθε παιδί διορθώνει το λανθασμένο προσδιορισμό που έχει κάνει.

#### *Εξέλιξη*

Στη δραστηριότητα αυτή συμμετείχαν 10 παιδιά και 14 λειτούργησαν ως ελεγκτές. Ο ρυθμός κίνησης ήταν γρήγορος αλλά τα παιδιά που οδηγούσαν το τρενάκι μελετούσαν τον προσανατολισμό της κίνησής τους προκειμένου να ακολουθήσουν τη σωστή πορεία, με βάση την εντολή του σταθμάρχη, στα σημεία πολλαπλών επιλογών όπου και παρατηρείται μια συνειδητή επιλογή κίνησης. Η δραστηριότητα δεν παρουσίασε μεγάλο βαθμό δυσκολίας και συγκέντρωσε το ενδιαφέρον των παιδιών που

έλεγχαν τους λάθος προσανατολισμούς με τον ήχο ενός δυστυχήματος.

2. Οι καθρέπτες: Η δραστηριότητα αυτή στοχεύει να εισαγάγει τα παιδιά στον προσδιορισμό του δεξιού-αριστερού προσανατολισμού με σύστημα αναφοράς έξω από το σώμα τους. Ιδιαίτερα να αναπτύξει προβληματισμό και εμπειρία για την ακριβώς αντίστροφη τοποθέτηση της απέναντι δεξιάς-αριστερής πλευράς, σε σύστημα *αντίθετο* από αυτούς<sup>9</sup>.

Τα παιδιά τοποθετούνται σε ζεύγη το ένα απέναντι στο άλλο και τα μισά κάνουν τους καθρέπτες στα υπόλοιπα, με την κατάλληλη χάρτινη κατασκευή. Έχουν τα αριστερά τους χέρια κρυμμένα. Τα παιδιά εκτελούν κινήσεις με το δεξί χέρι, σύμφωνα με ένα σενάριο, και οι καθρέπτες μιμούνται. Ωστόσο, η αντίθετη τοποθέτηση δεν τους επιτρέπει την ακριβή μίμηση, γεγονός που δημιουργεί προβληματισμό, συζήτηση και συνειδητή διαπίστωση για την αντίστροφη τοποθέτηση των δεξιών πλευρών, όταν βρίσκονται απέναντι.

Η δραστηριότητα αυτή ενδιαφέρεται κυρίως να θέσει το πρόβλημα στα παιδιά και να επισημάνει ιδιαίτερα κάτι που ενδεχόμενα να περνάει απαρατήρητο σε επίπεδο καθημερινής εμπειρίας, δηλαδή την αντιστροφή της δεξιάς-αριστερής πλευράς.

#### *Εξέλιξη*

Η δραστηριότητα πραγματοποιήθηκε σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση εισάγεται απλά το πρόβλημα. Τα παιδιά-άνθρωποι αρχικά με περιέργεια και ύστερα με θυμό παρατηρούν την ανάποδη κίνηση του παιδιού-καθρέπτη. Το πρόβλημα τίθεται και έτσι τα παιδιά ρωτούν “Τι είναι αυτά που κάνεις; Είσαι

ανάποδος κ.λπ.". Τα παιδιά νομίζουν αρχικά ότι εκτελούν λάθος και προσπαθούν να διορθωθούν, αλλά κινούνται επίσης ανάποδα.

Στη δεύτερη φάση, ο καθρεπτοδιαγωνισμός παρουσιάζει το ίδιο πρόβλημα. Τα παιδιά εκτελούν χωρίς να κατανοούν και έτσι διατυπώνουν την απορία τους. Η διατύπωση "το δεξί μου χέρι είναι από αυτή τη μεριά και του καθρέπτη από την άλλη" είναι το πρώτο βήμα για τη λύση του προβλήματος. Η συνειδητή σύγκριση των δύο πλευρών, της στροφής που χρειάζεται για την απέναντι τοποθέτηση, λύνουν τις απορίες που δημιουργούνται. Οι εντάσεις, οι δυσκολίες και οι αντιδράσεις που παρουσιάζονται υποδηλώνουν την ανάπτυξη μιας έννοιας που οικοδομείται σε αντίθεση με τις προϋπάρχουσες γνώσεις.

3. Οι γρήγοροι ταχυδρόμοι<sup>10</sup>: Η δραστηριότητα αυτή στοχεύει να ασκήσει τα παιδιά στον προσδιορισμό του δεξιού-αριστερού προσανατολισμού με σύστημα αναφοράς έξω από το σώμα τους.

Τέσσερα παιδιά ντύνονται με χάρτινη κατασκευή "σπίτια" και τοποθετούνται σε τέσσερα σημεία του χώρου μπροστά και πίσω, δεξιά και αριστερά ενός πέμπτου παιδιού που είναι ντυμένο "πύργος". Τα υπόλοιπα παιδιά είναι ταχυδρόμοι και πρέπει να παραδώσουν γράμματα στα 4 σπίτια, με βάση εντολές του τύπου "πήγαινε το γράμμα στο σπίτι που βρίσκεται μπροστά και δεξιά από τον πύργο". Τα γράμματα είναι πολύχρωμα και κάθε σπίτι κρύβει μέσα στο ταχυδρομικό κουτί ένα χρώμα. Όταν το παιδί επιλέγει το σπίτι που θα πάει, ελέγχει την ορθότητα της επιλογής με τη βοήθεια της αντιστοιχίας χρωμάτων (η οποία δεν είναι άμεσα ορατή).

Η δραστηριότητα είναι οργανωμένη με βάση το δεξιό και αριστερό προσανατολισμό ενός ξένου συστήματος, του οποίου η σωστή εύρεση αποτελεί και το κλειδί της δράσης του παιδιού. Ο χρωματικός έλεγχος οδηγεί το παιδί να διορθώσει τους λανθασμένους προσδιορισμούς.

#### *Εξέλιξη*

Στη δραστηριότητα πήραν μέρος 9 παιδιά ενώ τα υπόλοιπα παρέμειναν ελεγκτές-υπάλληλοι του ταχυδρομείου. Τα παιδιά κινήθηκαν στο χώρο μεταφέροντας το σύστημα αναφοράς από το σώμα τους στο παιδί-πύργο με αποτέλεσμα τα λάθη να είναι περιορισμένα. Η δυνατότητα ελέγχου της ορθότητας της επιλογής με τη χρωματική αντιστοιχία οδήγησε τα παιδιά να κατευθύνονται συνειδητά στο κατάλληλο "σπίτι", ενώ παράλληλα, σε περίπτωση λάθους, να επανεξετάζουν την επιλογή τους και να τη διορθώνουν. Τα παιδιά-πύργοι βίωσαν και αυτά τον προσανατολισμό που γινόταν με βάση το σώμα τους. Χαρακτηριστικό είναι ότι ένα από αυτά (το πιο μικρό παιδί της τάξης) προσπάθησε να βοηθήσει ένα διστακτικό ταχυδρόμο για το σωστό προσανατολισμό "μπροστά και δεξιά".

4. Το Ρομπότ Τομπόρ: Η δραστηριότητα αυτή στοχεύει επίσης να ασκήσει τα παιδιά στον προσδιορισμό του δεξιού-αριστερού προσανατολισμού με σύστημα αναφοράς έξω από το σώμα τους. Επιπλέον επιδιώκει τη μεταφορά αυτού του προσανατολισμού και τη λεκτική διατύπωσή του.

Τα παιδιά σε ομάδες πρέπει να καθοδηγήσουν την κίνηση ενός Ρομπότ στη μεγάλη σκακιέρα όπου τα αδιέξοδα περάσματα είναι μαυρισμένα, με εντολές



του τύπου “κάνε ένα βήμα μπροστά, στρίψε αριστερά”. Το Ρομπότ Τομπόρ υποδύεται μία φοιτήτρια του Τμήματος κατάλληλα ντυμένη. Σε περίπτωση που η εντολή είναι λάθος το Ρομπότ δεν μπορεί να κινηθεί.

Όμοια με τις προηγούμενες και αυτή η δραστηριότητα είναι οργανωμένη με βάση το δεξιό και αριστερό προσανατολισμό ενός ξένου συστήματος. Το παιδί καθοδηγεί τον προσανατολισμό διατυπώνοντας λεκτικά τις κατευθύνσεις.

#### *Εξέλιξη*

Η εκχώρηση του “προβλήματος” πραγματοποιείται από την εμφάνιση του Ρομπότ Τομπόρ, το οποίο τα παιδιά αισθάνονται υπεύθυνα να καθοδηγήσουν. Οι ομάδες δουλεύουν σε σημαντικό βαθμό συλλογικά, σκέφτονται, συζητούν τις εντολές και διορθώνουν σε περιπτώσεις λάθους. Τα παιδιά για πρώτη φορά εμφανίζουν αυτής της μορφής συνειδητή συλλογικότητα που τα οδηγεί σε αυθόρμητα συνθήματα επιδοκίμασίας στο ορθό τέλος της διαδρομής του Ρομπότ. Η θέση του “καθοδηγητή” μιας κίνησης ενός άλλου σώματος και, κατά συνέπεια, η διατύπωση των εντολών αποτελεί μια ενσυνείδητη λειτουργία προσανατολισμού με βάση τις έννοιες “δεξιά-αριστερά”.

#### *2. Για έννοιες μετρικών σχέσεων*

Στην ενότητα αυτή προγραμματίστηκαν περίπου 10 δραστηριότητες σε αντιστοιχία με τους στόχους που παραθέσαμε προηγούμενα. Οι πρώτες δραστηριότητες αφορούσαν ποιοτικές συγκρίσεις διαφόρων μεγεθών ενώ οι επόμενες, από τις οποίες παρουσιάζουμε ενδεικτικά δύο, εισάγουν τα παιδιά στην

έννοια της μέτρησης με τη βοήθεια της σύγκρισης.

5. Συγκρίσεις ύψων, μεταφορά ύψους. Η δραστηριότητα στοχεύει να οδηγήσει τα παιδιά, από τις ποιοτικές συγκρίσεις, στη μεταφορά των μεγεθών σε τρίτο αντικείμενο και τη σύγκριση με βάση αυτό.

Ομάδες παιδιών συγκρίνονται μεταξύ τους ως προς το ύψος. Στη συνέχεια σημειώνονται τα ύψη τους πάνω στον τοίχο και μεταφέρεται αυτό το ύψος σε ένα κορδόνι. Τα παιδιά συγκρίνουν τα ύψη τους με τη βοήθεια των κορδονιών.

Η έννοια της μέτρησης του μεγέθους προϋποθέτει τη μεταφορά του μεγέθους αυτού σε ένα τρίτο αντικείμενο, χωρίς τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του αντικειμένου που μετράμε. Αυτή η μεταφορά διευκολύνεται από την έννοια του ύψους του ίδιου του παιδιού, η οποία είναι βιωματικά κατανοητή από το παιδί. Η αναπαράσταση του ύψους με το μήκος ενός κορδονιού είναι το πρώτο βήμα στη γενίκευση της μέτρησης και με αυτό τον τρόπο η επιδιωκόμενη γνώση οργανώνει τη δραστηριότητα. Ενδιαφέροντα στοιχεία για τη σύγκριση μεγεθών, όπως η ανάγκη κοινής εκκίνησης και παράλληλης τοποθέτησης των συγκρινόμενων μεγεθών, αναπτύσσονται αυθόρμητα στη δραστηριότητα από τη φροντίδα των παιδιών να μη χάσουν κάτι από το ύψος τους στη σύγκριση.

#### *Εξέλιξη*

Η μεταφορά του ύψους αποτέλεσε για τα παιδιά μια σημαντική δραστηριότητα αναπαράστασης του ύψους. Παράλληλα όμως αποτέλεσε και μια συναρπαστική βιωματική εμπειρία πάνω σε ένα θέμα όπου δεν φαίνεται να είχαν προηγούμενες γνώσεις. Το γεγονός αυ-

τό επιβεβαιώνεται από το ότι τα παιδιά μέχρι σήμερα φυλούν τα κορδόνια που παρουσιάζουν το ύψος τους και συνεχίζουν να κάνουν συγκρίσεις με αυτά.

6. Ανταγωνισμός εξερευνητών. Η δραστηριότητα στοχεύει να οδηγήσει τα παιδιά στη μεταφορά των μεγεθών σε τρίτο αντικείμενο και τη σύγκριση με βάση αυτό, όπως επίσης και τη χρήση της επανάληψης του τρίτου αντικειμένου.

Τα παιδιά χωρίζονται σε ομάδες εξερευνητών που κυνηγούν κροκοδείλους στη ζούγκλα. Μετά την επιστροφή τους από το κυνήγι ανταγωνίζονται για το ποια ομάδα έπιασε το μεγαλύτερο κροκοδείλο, συγκρίνοντας τα κορδόνια που εκφράζουν το μήκος των κροκοδειλών.

Στο δεύτερο κυνήγι που πραγματοποιούν πιάνουν φίδια, αλλά τα διαθέσιμα κορδόνια δεν φτάνουν να μετρήσουν τα μήκη. Πώς θα μεταφέρουν και θα συγκρίνουν τα μήκη των φιδιών που έπιασαν για τη σύγκριση;

Με τη δραστηριότητα αυτή τα παιδιά γενικεύουν τη μεταφορά που είχαν πραγματοποιήσει. Η δεύτερη φάση ενδιαφέρεται κυρίως να θέσει το πρόβλημα στα παιδιά και να επισημάνει την αναγκαιότητα επανάληψης του μέτρου, ακριβώς για τις περιπτώσεις που δεν είναι αρκετό για την άμεση μεταφορά.

### *Εξέλιξη*

Στη δραστηριότητα πήραν μέρος 3 ομάδες εξερευνητών κροκοδειλών και 3 εξερευνητών φιδιών. Τα παιδιά μεταφέρουν γρήγορα το μήκος των κροκοδειλών στο κορδόνι: το ένα κρατά την αρχή, το άλλο το τέλος και το τρίτο κόβει. Το ίδιο σωστά και αποτελεσματικά γίνεται και η σύγκριση των μεγεθών. Τα κορδόνια τοποθετούνται παράλληλα,

υπάρχει φροντίδα για το κοινό σημείο εκκίνησης και το τέλος των κορδονιών.

Στους εξερευνητές φιδιών, όπου τα κορδόνια είναι μικρότερα από τα φίδια, τα πράγματα είναι πιο δύσκολα και οι ομάδες χρειάζονται περισσότερο χρόνο. Τα παιδιά προβληματίζονται, άλλοι σκέφτονται να διπλώσουν το φίδι στα δύο και άλλοι αρχίζουν να επαναλαμβάνουν το κομμάτι που έχουν χρησιμοποιώντας για αρχή το δάκτυλό τους. Η πρώτη προσέγγιση του ζητήματος της επανάληψης έχει ήδη τεθεί. Ως χαρακτηριστική μπορούμε να αναφέρουμε την απάντηση της τρίτης ομάδας που είχε το μεγαλύτερο φίδι και η οποία λέει: “το φίδι μας είναι 3 φορές μεγαλύτερο από το κορδόνι μας”.

## **Συζήτηση**

Η σύντομη περιγραφή των διδακτικών καταστάσεων και της εξέλιξής τους δίνει μια μικρή μόνο εικόνα από την πολλαπλότητα των δράσεων των παιδιών, την αμεσότητα στην εμπλοκή τους και τη δημιουργικότητα στα αποτελέσματα. Το περιβάλλον μάθησης μέσα στο οποίο λειτουργούν τούς δίνει σε καθημερινή βάση έναν πλούτο εμπειριών και ο προσανατολισμός των διδακτικών καταστάσεων δημιουργεί ουσιαστικές συνθήκες ανάπτυξης των επιδιωκόμενων μαθηματικών εννοιών.

Βέβαια δεν είναι δυνατό να ισχυρισθούμε ότι η έκβαση όλων απολύτως των δραστηριοτήτων είναι επιτυχής. Υπάρχουν περιπτώσεις ελλιπούς οργάνωσης της δράσης των παιδιών, των μηχανισμών ελέγχων όπως και της ανάπτυξης προβληματισμού και δημιουργι-

κής δράσης. Επισημαίνουμε ωστόσο ότι ακόμα και στις περιπτώσεις όπου η μελέτη της εξέλιξης της δραστηριότητας δεν επιβεβαιώνει την εκχώρηση του προβλήματος και την αντιμετώπισή του από τα παιδιά, οι έννοιες με τις οποίες ασχολήθηκαν εμπλέκονται στο εξής στη ζωή τους, εμφανίζονται συχνά στην καθημερινή τους δράση και εξελίσσονται. Σε αξιολογήσεις που περιοδικά πραγματοποιούνται τα αποτελέσματα είναι θεαματικά.

Αναφέρουμε ενδεικτικά ότι από τα 16 παιδιά που αξιολογήθηκαν, μετά από ένα διάστημα δύο μηνών, στις έννοιες δεξιά-αριστερά οι 14 γνωρίζουν ότι το ισχυρό χέρι ονομάζεται "δεξί", ξέρουν να το υποδεικνύουν, ξέρουν να εντοπίζουν μέρη από τη δεξιά-αριστερή πλευρά τους, όπως επίσης ξέρουν να στρίβουν δεξιά και αριστερά. Οι περισσότεροι από τους μικρούς μας μαθητές ξέρουν να υποδεικνύουν τη δεξιά πλευρά και σε ένα άλλο παιδί.

Κλείνοντας θα θέλαμε να υπογραμμίσουμε τη σημασία ανάπτυξης ενός πλούσιου βιωματικού περιβάλλοντος μάθησης, κατάλληλα προσανατολισμένου στις μαθηματικές έννοιες. Μελέτες από όλα τα μέρη του κόσμου αλλά και η εφαρμογή του προγράμματος που παρουσιάσαμε επιβεβαιώνουν τη σημασία αυτή.

### Βιβλιογραφικές αναφορές

Brousseau, G. (1986). Θεμέλια και μέθοδοι της Διδακτικής των Μαθηματικών, στο *Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών*, Θεσσαλονίκη, Αφοι Κυριακίδη, 1991.

Chevallard, Y. (1986). *Transposition didactique*, Grenoble, Ed. Pensée Sauvage.

Γερμανός, Δ., Οικονόμου, Α., Τζεκάκη, Μ. (1994). Χωρομαθηματικές έννοιες, παιδί και αγωγή στο Νηπιαγωγείο, *Εισήγηση στο Πανελλήνιο Συνέδριο Προσχολικής Αγωγής*, Ιωάννινα, Μάιος (υπό δημοσίευση).

Dubois, C., Fénelichel, M., Pauvert, M. (1993). *Se former pour enseigner les Mathématiques*, 2. Maternelle, grandeur et mesure, Paris, Armand Colin.

Π.Τ.Ν. (1993). *Εφαρμοσμένη Παιδαγωγική, Πρόγραμμα Εργασίας για τις Πρακτικές Ασκήσεις των φοιτητών/τριών*, Θεσσαλονίκη, Α.Π.Θ. Υπηρεσία Δημοσιευμάτων.

Resnick, L.B. (1989). Αναπτύσσοντας τη μαθηματική γνώση, στο Βοσνιάδου Σ. (επιμ.), *Η Ψυχολογία των Μαθηματικών*, Αθήνα: Gutenberg, 1995.

Sauvy, J. et S. (1972). *L'enfant à la découverte de l'espace, De la marelle aux labyrinthes*, Belgique, Casterman.

Τζεκάκη, Μ. (1993). Ανάπτυξη Μαθηματικών Διαδικασιών και Εννοιών, *Επετηρίδα Π.Τ.Ν. Α.Π.Θ.* (υπό δημοσίευση).

Τζεκάκη, Μ. (1994). Διδακτική Πρακτική στη προσέγγιση των Πρωτομαθηματικών Εννοιών, *Εισήγηση στο Πανελλήνιο Συνέδριο Προσχολικής Αγωγής*, Ιωάννινα, Μάιος (υπό δημοσίευση).

Tzekaki, M. (1994). Control Processes during the geometric construction on computer environment, in *Proceedings of 18th PME*, University of Lisbon, Lisbon, Portugal.

Τζεκάκη, Μ. (υπό έκδοση). *Μαθηματικές Δραστηριότητες για την προσχολική ηλικία*, Αθήνα: Gutenberg.

Vergnaud, G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Bern, Peter Lang.

Vergnaud, G. (1994). Le rôle de l'esneignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel, dans *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France*, Eds : M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, P. Tanignot, Grenoble. Le Pensée Sauvage, pp. 177-194.

Vygotsky, L. (1934). *Σκέψη και γλώσσα*, Αθήνα, Γνώση, 1988.

Zimmerman, G. (1985). *Activités Mathématiques*, Paris, F.Nathan, Pédagogie Pré-scolaire.

ΥΠΕΠΘ (1990). *Βιβλίο Δραστηριοτήτων για το Νηπιαγωγείο, Βιβλίο Νηπιαγωγού*, Αθήνα. ΟΕΔΒ.

### Περίληψη

Στο άρθρο αυτό παρουσιάζουμε μέρος από ένα ερευνητικό πρόγραμμα ανάπτυξης μαθηματικών δραστηριοτήτων που πραγματοποιούμε στο Παιδικό Κέντρο του Π.Τ.Ν. του Α.Π.Θ. Το πρόγραμμα στοχεύει στο σχεδιασμό και την ερευνητική εφαρμογή δραστηριοτήτων ειδικών για κάθε μαθηματική έννοια και με τον τρόπο αυτό στη δημιουργία ενός περιβάλλοντος μάθησης πρωτομαθηματικών εννοιών για την προσχολική ηλικία. Έτσι, μέσα σε ένα πλαίσιο οικοδόμησης της γνώσης, που προϋποθέτει την ατομική δραστηριοποίηση και συμμετοχή των παιδιών, το πρόγραμμα περιλαμβάνει ειδικά μελετημένα παιχνίδια

με σενάρια και ιστορίες, αναπτύσσει μηχανισμούς ελέγχου για τα παιδιά και πλαισιώνεται από το κατάλληλα διαμορφωμένο παιδαγωγικό υλικό.

### Λέξεις-Κλειδιά:

Μαθηματικές δραστηριότητες, πρωτομαθηματικές έννοιες προανατολισμού, πρωτομαθηματικές έννοιες μέτρησης, διδακτικές καταστάσεις

### Abstract

In this paper we present part of a research program of mathematical activities development, carried out at the Early Childhood Centre of the Department of Early Childhood, at the Aristotle University of Thessaloniki. The program aims at the design and the implication of activities, special for each mathematical concept; thus it promotes the creation of an educational environment focused on mathematical concepts for pre-schoolers. Within the framework of constructivism, which assumes individual activation and children's' participation, this program comprises carefully designed play activities with attractive scenarios and story-telling, helps to develop control mechanisms for children and is accomplished by specially designed educational material.

### Σημειώσεις

1. Βλ. σχετικά πρωτομαθηματικό στάδιο ανάπτυξης της έννοιας στο

Chevallard, 1986, “λανθάνουσα γνώση” στο Resnick, 1989, μαθηματική δραστηριότητα στα Zimmerman, 1985, Dubois etc. 1993.

2. Πρωτομαθηματικό ονομάζεται ένα στάδιο ανάπτυξης των μαθηματικών εννοιών κατά το οποίο οι έννοιες φαίνονται να εμπλέκονται στη δράση του υποκειμένου αλλά το ίδιο δεν τις γνωρίζει, ούτε τις κατονομάζει ακόμα [Chevallard, 1986].

3. Οι έννοιες που αναφέρονται “τοπολογικές, προβολικές, μετρικές, συμμετρικές, συνδυασμοί, διατάξεις” είναι μαθηματικές και με αυτή την έννοια χρησιμοποιούνται εδώ. Η γνωστική ψυχολογία δανείζεται από τα μαθηματικά αυτούς τους όρους για τις μελέτες της.

4. Η Διδακτική των Μαθηματικών έχει από καιρό διευκρινίσει ότι η διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών εννοιών δεν απαιτεί μόνο τη μελέτη του τρόπου ανάπτυξης τους στα παιδιά-υποκείμενα, αλλά προϋποθέτει τη μελέτη του ίδιου του αντικειμένου, δηλαδή των ίδιων των εννοιών και των συνθηκών ανάπτυξής τους [Brousseau, 1986, Chevallard, 1986, Dubois etc, 1993,

Vergnaud, 1994].

5. Για το “στάδιο της επικείμενης ανάπτυξης” βλ. σχετικά Vygotsky, 1934.

6. Οι τίτλοι αφορούν αποκλειστικά το μαθηματικό περιεχόμενο του προγράμματος δραστηριοτήτων.

7. Για την ποιοτική σύγκριση βλ. σχετικά Resnick, ό.π., “πρωτοποσοτικά σχήματα”.

8. Στο σχεδιασμό και την πραγματοποίηση των δραστηριοτήτων αυτών συνεργάστηκε η φοιτήτρια του Παιδαγωγικού Τμήματος Νηπιαγωγών Ντίνα Παπαγεωργίου, η οποία υποδύθηκε και το Ρομπότ.

9. Σημειώνουμε ότι οι καθρέπτες είναι μια δραστηριότητα που έρχεται να αντιπαραβάλει τη συμμετρικότητα του “καθρεπτίσματος” με την αντισυμμετρικότητα του δεξιού-αριστερού προσανατολισμού, σε περίπτωση αντιστροφής του συστήματος αναφοράς. Το ενδιαφέρον δεν επικεντρώνεται στη συμμετρία αλλά ακριβώς σε αυτό το ζήτημα της αντιπαραβολής.

10. Βλ. σχετικά [Γερμανός, Οικονόμου, Τζεκάκη, 1994].