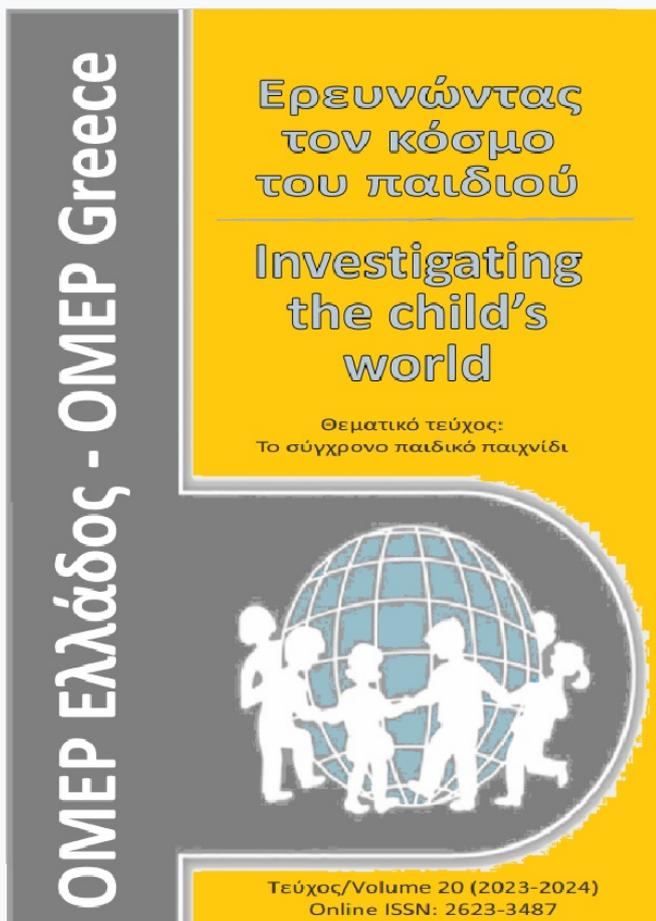


## Ερευνώντας τον κόσμο του παιδιού

Τόμ. 20 (2024)

ΘΕΜΑΤΙΚΟ ΤΕΥΧΟΣ: Το σύγχρονο παιδικό παιχνίδι



Μια διδακτική παρέμβαση βασισμένη στο παιχνίδι για την πρώιμη κατανόηση της διαίρεσης μέτρησης

Κωνσταντίνος Χρήστου, Αναστασία Κανδύλη

doi: [10.12681/icw.36065](https://doi.org/10.12681/icw.36065)

Copyright © 2024, Κωνσταντίνος Χρήστου, Αναστασία Κανδύλη



Άδεια χρήσης [Creative Commons Αναφορά-Μη Εμπορική Χρήση 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

### Βιβλιογραφική αναφορά:

Χρήστου Κ., & Κανδύλη Α. (2024). Μια διδακτική παρέμβαση βασισμένη στο παιχνίδι για την πρώιμη κατανόηση της διαίρεσης μέτρησης. *Ερευνώντας τον κόσμο του παιδιού*, 20, 142-155. <https://doi.org/10.12681/icw.36065>

## Μια διδακτική παρέμβαση βασισμένη στο παιχνίδι για την πρόωμη κατανόηση της διαίρεσης μέτρησης

Κωνσταντίνος Π. Χρήστου, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Τ.Ε.Π.Α.Ε., [kchristou@auth.gr](mailto:kchristou@auth.gr)  
Αναστασία Κανδύλη, Νηπιαγωγός, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Π.Τ.Ν.,  
[anastasoulakand@gmail.com](mailto:anastasoulakand@gmail.com)

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σε αυτή τη μελέτη, παρουσιάζουμε ένα μέρος μιας συνεχιζόμενης έρευνας σχεδιασμού που στοχεύει στη δημιουργία εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων που καλλιεργούν την πρόωμη πολλαπλασιαστική σκέψη. Συγκεκριμένα, εξετάζεται η ικανότητα παιδιών νηπιαγωγείου να κάνουν διαίρεση μέτρησης όταν τους δίνονται λεκτικά προβλήματα με εικονικές αναπαραστάσεις. Επίσης, διερευνούμε πιλοτικά τα αποτελέσματα μιας διδακτικής παρέμβασης που βασίστηκε σε ένα ομαδικό παιχνίδι, στην ικανότητα των μικρών παιδιών να επιλύουν προβλήματα διαίρεσης μέτρησης. Η διαίρεση μέτρησης είναι υποτιμημένη στο νηπιαγωγείο και στα πρώτα χρόνια του δημοτικού σχολείου, επειδή πιστεύεται ότι είναι υπερβολικά δύσκολη για παιδιά αυτής της ηλικίας. Στην έρευνα συμμετείχαν 35 παιδιά Νηπιαγωγείου (ηλικίας 4-6 χρονών) που δεν είχαν προηγουμένως λάβει καμία διδασκαλία σχετικά με τη διαίρεση. Στον προ-έλεγχο και τον μετα-έλεγχο στα παιδιά δόθηκαν, μέσω ατομικών συνεντεύξεων, τέσσερα λεκτικά προβλήματα με διαιρέσεις μέτρησης. Κατά τη διδακτική παρέμβαση, τα παιδιά της ομάδας παρέμβασης (14 παιδιά) έπαιξαν ένα ομαδικό, κινητικό παιχνίδι στο οποίο κλήθηκαν να δημιουργούν ομάδες συγκεκριμένου πλήθους, και να εξάγουν συμπεράσματα για τη σχέση ανάμεσα στο μέγεθος μιας ομάδας και στο πλήθος των ομάδων που σχηματίστηκαν. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι τα παιδιά είχαν μια αρχική κατανόηση της διαίρεσης μέτρησης σε απλά λεκτικά προβλήματα που τους δόθηκαν με εικονικές αναπαραστάσεις. Επίσης, η διδακτική παρέμβαση βοήθησε τα παιδιά της ομάδας παρέμβασης να εστιάσουν στις σχέσεις διαιρέτη/πηλίκου και να αναπτύξουν εκλεπτυσμένες στρατηγικές για τη διαίρεση μέτρησης. Αυτά τα ευρήματα δείχνουν ότι τα μικρά παιδιά μπορούν να αναπτύξουν ακόμη και αρκετά προηγμένες ικανότητες πολλαπλασιαστικής σκέψης αν εκτεθούν σε κατάλληλα σχεδιασμένα μαθησιακά περιβάλλοντα με βάση το μαθηματικό παιχνίδι.

**ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ:** Διαίρεση μέτρησης, Πολλαπλασιαστικές σχέσεις, Αριθμός, Παιχνίδι

## Early understanding of measurement division and the effects of a minimal intervention via a game-based activity

Konstantinos P. Christou, Aristotle University of Thessaloniki, School of Early Childhood Education,  
[kchristou@auth.gr](mailto:kchristou@auth.gr)  
Anastasia Kandyli, University of Western Macedonia, Department of Early Childhood Education,  
[anastasoulakand@gmail.com](mailto:anastasoulakand@gmail.com)

### ABSTRACT

In this study, we contribute to an ongoing design research effort dedicated to crafting educational activities that promote early multiplicative thinking. Specifically, our focus is on assessing kindergarten children's capacity for performing measurement division when presented with word problems accompanied by pictorial representations. Additionally, we conduct a preliminary investigation into the impact of a group play-based instructional intervention on young children's proficiency in solving measurement division problems. Measurement division tends to be overlooked in kindergarten and early elementary school due to the perception that it is too challenging for children of this age. Our study

engaged 35 kindergarten children, aged 4-6 years, who had not received any prior instruction on division. Through individual interviews at both pre-test and post-test stages, the children encountered four word problems involving measurement division. During the teaching intervention, the intervention group (comprising 14 children) participated in a group kinetic game. In this game, they were tasked with forming groups of a specified number and drawing inferences about the relationship between the group's size and the number of groups formed. Results indicated that children initially demonstrated an understanding of measurement division in simple word problems presented with pictorial representations. Furthermore, the instructional intervention appeared to be beneficial for the intervention group, as it guided them in focusing on divisor/quotient relationships and cultivating advanced strategies for measurement division. These findings suggest that young children can develop sophisticated multiplicative thinking skills when exposed to well-designed learning environments grounded in mathematical play.

**KEY WORDS:** Measurement division; Multiplicative relations; Number; Game

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

### *Η σημασία της διαίρεσης και η διαίρεση μέτρησης στο νηπιαγωγείο*

Τα παιδιά, πολύ πριν έρθουν σε επαφή με τη τυπική διδασκαλία των αριθμητικών πράξεων στο σχολείο, έχουν αποκτήσει πολλές εμπειρίες με τις σχέσεις ανάμεσα στις ποσότητες και τους αριθμούς μέσα από την καθημερινή τους ζωή. Έτσι, μέσα από αυτές τις εμπειρίες έχουν μάθει να εκτελούν πράξεις πάνω σε ποσότητες (χωρισμός, ένωση, μοιρασιά, κτλ.) πολύ πριν διδαχθούν τις μαθηματικές πράξεις με συστηματικό τρόπο. Ενώ τα παιδιά μοιράζουν ποσότητες από πολύ μικρά, παρόλα αυτά η διαίρεση θεωρείται δύσκολη ως μαθηματική πράξη, ιδιαίτερα για τα παιδιά του Νηπιαγωγείου, και λόγω αυτής της αντίληψης συχνά προτιμάται να διδάσκεται τελευταία από όλες τις πράξεις μετά την πρόσθεση, την αφαίρεση και τον πολλαπλασιασμό (Κορνηλάκη & Nunes, 1999).

Στόχος της παρούσας μελέτης είναι να διερευνήσει την ικανότητα των παιδιών να κατανοούν πτυχές της διαίρεσης, εστιάζοντας στη διαίρεση μέτρησης η οποία θεωρείται πιο απαιτητική ειδικά για τα μικρά παιδιά, πριν λάβουν κάποια συστηματική διδασκαλία πάνω στη διαίρεση. Επίσης, στόχος είναι να εξετάσει αν μια διδακτική παρέμβαση οργανωμένη γύρω από ένα ομαδικό παιχνίδι, θα μπορούσε να βοηθήσει τα παιδιά προς την κατεύθυνση της κατανόησης των εννοιολογικών χαρακτηριστικών της διαίρεσης μέτρησης ήδη από το νηπιαγωγείο.

### *Η διαίρεση στην προσχολική ηλικία*

Δύο είναι τα βασικά μοντέλα διαίρεσης με τα οποία εισάγεται η έννοια της διαίρεσης στα μικρά παιδιά: η *διαίρεση μερισμού* και η *διαίρεση μέτρησης*. Η διαίρεση μερισμού (ή δίκαιη μοιρασιά) αφορά μία ποσότητα η οποία χωρίζεται σε ίσα μέρη (ισομερισμός). Στη διαίρεση μερισμού είναι γνωστό το συνολικό μέγεθος και το πλήθος των μερών και αναζητείται το μέγεθος κάθε μέρους (Λεμονίδης, 2016). Για παράδειγμα, σε ένα πρόβλημα διαίρεσης μερισμού 8 σύκα (διαιρετέος) μοιράζονται σε 4 παιδιά (διαιρέτης) κι έτσι κάθε παιδί θα πάρει από 2 σύκα (πηλίκιο). Μια βασική στρατηγική για την εύρεση του πηλίκου είναι η διανομή του συνολικού ποσού σε όσα μέρη (ομάδες) ορίζει ο διαιρέτης και η καταμέτρηση του πλήθους κάθε μέρους. Η διαίρεση μερισμού έχει τρεις σημαντικές προϋποθέσεις: α) ο διαιρετέος πρέπει να είναι μεγαλύτερος από τον διαιρέτη, β) το πηλίκιο πρέπει να είναι μικρότερο από τον διαιρετέο και γ) ο διαιρέτης πρέπει να είναι φυσικός αριθμός. Η τελευταία προϋπόθεση οφείλεται στο γεγονός ότι στη διαίρεση μερισμού ο διαιρετέος αποτελεί ένα μέγεθος που θα πρέπει να διαμοιραστεί στο *πλήθος* των μερών που ορίζει ο διαιρέτης· καθώς ο διαιρέτης ορίζει πλήθος,

δεν μπορεί παρά να είναι φυσικός αριθμός (Van de Walle, Lovin, Karp & Bay-Williams, 2017). Για το λόγο αυτό η διαίρεση μερισμού βρίσκει καλύτερη εφαρμογή στο πλαίσιο των φυσικών αριθμών.

Το άλλο είδος διαίρεσης, στο οποίο και εστιάζει η παρούσα μελέτη, είναι η διαίρεση μέτρησης. Στο συγκεκριμένο είδος διαίρεσης είναι γνωστό το μέγεθος του κάθε μέρους όπως και το συνολικό μέγεθος και αναζητείται η ποσότητα των μερών (Λεμονίδης, 2016). Για παράδειγμα, αν 8 σύκα μοιράζονται στα παιδιά έτσι ώστε κάθε παιδί να έχει από 2 σύκα και ζητάμε να υπολογιστούν πόσα είναι τα παιδιά που θα πάρουν από 2 σύκα, τότε πρόκειται για διαίρεση μέτρησης. Στη διαίρεση μέτρησης τόσο ο διαιρετέος όσο και ο διαιρέτης είναι μεγέθη, ενώ το πηλίκο ορίζει το πόσες φορές χωράει το ένα μέγεθος στο άλλο. Έτσι, κατά τη διαίρεση μέτρησης υπολογίζουμε πόσες φορές χωράει ένας αριθμός σε έναν άλλο, ή αλλιώς μετράμε έναν αριθμό με έναν άλλο κι από τη διαδικασία αυτή προέρχεται και το όνομα της. Η μοναδική προϋπόθεση της διαίρεσης μέτρησης είναι ο διαιρετέος να είναι μεγαλύτερος από τον διαιρέτη κάτι που την καθιστά ιδανική για την έκφραση σχέσεων ανάμεσα σε αριθμούς που δεν περιορίζονται στο σύνολο των φυσικών αριθμών (Λεμονίδης, 2016).

Η διαίρεση μερισμού αποτελεί μια διαισθητική πράξη ειδικά για τα μικρά παιδιά (Fischbein et al., 1985) και για το λόγο αυτό αποτελεί το πρώτο είδος διαίρεσης με το οποίο ασχολούνται τα παιδιά ήδη από το Νηπιαγωγείο (Κορνηλάκη & Nunes, 1999). Η αποκλειστική όμως ενασχόληση των παιδιών με τη διαίρεση μερισμού μπορεί να ενισχύσει την παρανόηση ότι η διαίρεση πάντα μικραίνει τους αριθμούς που διαιρούνται, μια παρανόηση που μένει ισχυρή ακόμα κι όταν τα παιδιά έχουν διδαχθεί τους ρητούς αριθμούς (Christou et al., 2020; Fischbein et al., 1985), όπου βρίσκονται αντιμέτωποι με περιπτώσεις όπου το αποτέλεσμα μιας διαίρεσης μπορεί και να είναι μεγαλύτερο από τους συντελεστές της (π.χ.,  $1/2:1/4=2$ ). Αντίθετα, η διαίρεση μέτρησης μπορεί να αποτελέσει ένα πλαίσιο στο οποίο τα παιδιά μπορούν να νοηματοδοτήσουν με τέτοιο τρόπο την πράξη ώστε να αποφύγουν την ενίσχυση της παρανόησης ότι η διαίρεση πάντα μικραίνει. Σύμφωνα με το μοντέλο της διαίρεσης μέτρησης, κατά τη διαίρεση του 2 με το  $1/2$ , για παράδειγμα, υπάρχει η ερώτηση πόσα μισά ( $1/2$ ) εμπεριέχονται στο 2, και το αποτέλεσμα (4) είναι εύκολο να γίνει αποδεκτό.

Η συγκεκριμένη διερώτηση (πόσες φορές το 4 χωράει στο 12, ή αλλιώς το πόσες ομάδες των 4 υπάρχουν στο 24), που προωθεί το μοντέλο της διαίρεσης μέτρησης, ενισχύει την πολλαπλασιαστική σκέψη του παιδιού (Steffe, 1994). Σε αντίθεση με την προσθετική σκέψη, στην οποία ποσότητες του ίδιου τύπου προστίθενται ή αφαιρούνται (π.χ. 2 σύκα και 6 σύκα είναι συνολικά 8 σύκα), η πολλαπλασιαστική σκέψη αφορά την έκφραση σχέσεων ανάμεσα σε ποσότητες διαφορετικού είδους (π.χ. με 3 κουτιά από 4 μπισκότα ανά κουτί έχουμε συνολικά 12 μπισκότα). Η πολλαπλασιαστική σκέψη κατέχει σημαντική θέση στη μάθηση των μαθηματικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, καθώς αποτελεί θεμέλιο για την κατανόηση πιο σύνθετων μαθηματικών εννοιών, όπως οι ρητοί αριθμοί. Σύμφωνα με τον Vergnaud (1983), η διαίρεση αποτελεί βασικό στοιχείο του πολλαπλασιαστικού συλλογισμού, μαζί με τον πολλαπλασιασμό, τα κλάσματα, τον αναλογικό συλλογισμό, καθώς και τις αναλογίες και τα ποσοστά, έννοιες που όλες μαζί συγκροτούν το πολλαπλασιαστικό εννοιολογικό πεδίο. Η διαίρεση μέτρησης μάλιστα, ως μια διαδικασία δημιουργίας ισοπληθών ομάδων, βρίσκεται στον πυρήνα της πολλαπλασιαστικής σκέψης καθώς αναδεικνύει την αντίστροφη σχέση πολλαπλασιασμού και διαίρεσης. Για τον λόγο αυτό, η ενίσχυση της πρώιμης κατανόησης της διαίρεσης μέτρησης θα μπορούσε να δώσει χρήσιμα εφόδια στα παιδιά για τη μελλοντική ανάπτυξη της μαθηματικής τους γνώσης (Steffe, 1994).

Τόσο στο Πρόγραμμα Σπουδών Νηπιαγωγείου της Ελλάδας (ΠΣΝ, 2014) όσο και στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών για την Προσχολική Εκπαίδευση Νηπιαγωγείου (ΠΣΠΕΝ, 2022) επισημαίνονται μαθησιακοί στόχοι όσον αφορά τη διαίρεση. Συγκεκριμένα, αναφέρεται ότι τα παιδιά θα πρέπει να μπορούν να ομαδοποιούν και να μοιράζουν αντικείμενα σε δυνάδες, τριάδες κτλ., χρησιμοποιώντας διάφορες στρατηγικές, όπως επαναλαμβανομένης αφαίρεσης, ή

ισοκατανομή και κάνοντας χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων. Παρόλα αυτά, στα αναλυτικά προγράμματα των μικρών τάξεων η ενίσχυση των πολλαπλασιαστικών σχέσεων υπολείπεται σημαντικά αυτής των προσθετικών σχέσεων, ακόμα και στις περιπτώσεις όπου υπάρχουν ευκαιρίες που θα μπορούσαν να αξιοποιηθούν προς την κατεύθυνση της εστίασης σε πολλαπλασιαστικές σχέσεις ανάμεσα στις ποσότητες (Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2018).

Παλιότερες έρευνες έχουν δείξει ότι οι δραστηριότητες μερισμού προσεγγίζονται διαισθητικά με μεγαλύτερη άνεση από τα μικρά παιδιά, σε σχέση με τη διαίρεση μέτρησης (Ching & Wu, 2021; Correa et al., 1998; Fischbein et al., 1985). Όμως, πρόσφατα ευρήματα δείχνουν ότι τα παιδιά έχουν τη δυνατότητα να κάνουν διαίρεση μέτρησης από μικρή ηλικία και πριν τη διδαχθούν με συστηματικό τρόπο (Cheeseman et al., 2020, 2022; Ching & Wu, 2021), ειδικά αν τους δοθούν οι κατάλληλες αναπαραστάσεις (Baker, 2014). Η παρούσα μελέτη στόχο έχει να διερευνήσει περεταίρω αυτά τα ευρήματα. Επιπροσθέτως, στόχος της μελέτης είναι να διερευνήσει αν ένα ομαδικό παιχνίδι στην τάξη που με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά μπορεί να βοηθήσει τα παιδιά να εστιάσουν την προσοχή τους στις πολλαπλασιαστικές σχέσεις ανάμεσα στις ποσότητες και με αυτόν τον τρόπο να τα βοηθήσει να κατανοήσουν καλύτερα τη διαίρεση μέτρησης.

### **Μαθηματικό παιχνίδι**

Σημαντικοί μελετητές της μάθησης και της γνωστικής ανάπτυξης, από τη Montessori και τον Piaget μέχρι τους Vygotsky, Bruner και Dienes, έχουν αναδείξει μέσα από διαφορετικές προσεγγίσεις τις δυνατότητες που δίνει το παιχνίδι, ειδικά στα μικρά παιδιά, για ανακάλυψη, οικοδόμηση νέας γνώσης, ψυχο-κοινωνική, συναισθηματική και γνωστική ανάπτυξη (βλ. Σκουμπουρδή, 2015, Αυγητίδου, 2001). Για τους λόγους αυτούς το παιχνίδι αποτελεί πυρήνα του προγράμματος σπουδών του νηπιαγωγείου όπου συνιστάται να χρησιμοποιείται σε κάθε ευκαιρία ως μέσο για ανάπτυξη της έκφρασης των ιδεών και των συναισθημάτων των παιδιών (ΠΣΝ, 2011).

Υπάρχουν εμπειρικά δεδομένα που υποστηρίζουν ότι τα παιχνίδια με μαθηματικό περιεχόμενο μπορούν να βοηθήσουν τα παιδιά να αποκτήσουν μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες τόσο σε γνωστικό όσο και μεταγνωστικό επίπεδο (Σκουμπουρδή, 2015, Χασάπης, 2012). Μέσω της συστηματικής ενασχόλησης με μαθηματικά παιχνίδια τα παιδιά εξερευνούν σχέσεις ανάμεσα στις ποσότητες ανακαλύπτοντας θεμελιώδεις ιδιότητες του αριθμού, όπως η αριθμητική ακολουθία, η ένα προς ένα αντιστοιχία, η αξία θέσης ψηφίου, ενώ αναπτύσσουν και χρήσιμες στρατηγικές νοερών υπολογισμών και λύσης προβλήματος (Rutherford, 2015, Olson, 2007). Ταυτόχρονα, ένα περιβάλλον μάθησης με χρήση μαθηματικού παιχνιδιού, μπορεί να βοηθήσει τα παιδιά να αναπτύξουν θετικές στάσεις προς αυτά και να διαχειριστούν φόβους και αρνητικά συναισθήματα για το συγκεκριμένο μάθημα που επηρεάζουν αρνητικά τη σχέση τους με τα μαθηματικά και τις επιδόσεις τους σε αυτά (Clements, & Sarama, 2023).

Ακόμη και μικρές παρεμβάσεις σε παιδιά προσχολικής ηλικίας με χρήση παιχνιδιού, μπορούν να βοηθήσουν ειδικά τα παιδιά που προέρχονται από χαμηλά κοινωνικοοικονομικά στρώματα και εμφανίζουν χαμηλότερες επιδόσεις σε έργα πρώιμης μαθηματικής κατανόησης να φτάσουν το επίπεδο μαθηματικής γνώσης των πιο προνομιούχων συμμαθητών τους (Ramani & Siegler, 2008). Σημασία έχει το παιχνίδι να διαθέτει εκείνα τα στοιχεία και να παίζεται με τέτοιο τρόπο ώστε μέσα από τις δράσεις του παιδιού με τα υλικά και τους κανόνες του παιχνιδιού να αναδεικνύονται οι μαθηματικές σχέσεις, στις οποίες εστιάζει κι όχι να αποτελεί απλώς ένα πλαίσιο στο οποίο τα παιδιά καλούνται να λύσουν μαθηματικά προβλήματα ή να απαντήσουν σε μαθηματικές ερωτήσεις, ως συνθήκη για να προχωρήσουν σε ένα παιχνίδι που κατά τα άλλα δεν σχετίζεται άμεσα με τα συγκεκριμένα μαθηματικά έργα, όπως συχνά συμβαίνει με επιτραπέζια ή και με ομαδικά παιχνίδια που προτείνονται για εκπαιδευτική εφαρμογή. Στην παρούσα μελέτη, τα παιδιά έπαιξαν ένα ομαδικό, κινητικό παιχνίδι, που στον

πυρήνα των δράσεων είναι οι σχέσεις ανάμεσα στις ποσότητες και τους αριθμούς, που αποτελούν τα θεμέλια των μαθηματικών ειδικά στις μικρές ηλικίες (Sophian, 2017).

### ***Η παρούσα μελέτη***

Στη συγκεκριμένη μελέτη στόχος ήταν να διερευνηθεί εάν τα παιδιά του Νηπιαγωγείου μπορούν να κατανοήσουν πτυχές της διαίρεσης μέτρησης, πριν να έχουν λάβει κάποια συστηματική διδασκαλία σε αυτό το πεδίο. Συγκεκριμένα θα εξεταστεί αν τα παιδιά μπορούν να λύσουν απλά λεκτικά προβλήματα που θα δοθούν με συνοδεία εικονικών αναπαραστάσεων. Επίσης, στόχος ήταν να εξεταστεί εάν ένα ομαδικό, κινητικό παιχνίδι που παίζεται εύκολα στην τάξη του νηπιαγωγείου μπορεί να βοηθήσει τα παιδιά στην εστίαση στις πολλαπλασιαστικές σχέσεις ανάμεσα στις ποσότητες που θα μπορούσαν να υποστηρίξουν την καλύτερη κατανόηση της διαίρεσης μέτρησης σε αυτές τις ηλικίες. Όπως θα γίνει κατανοητό παρακάτω, το συγκεκριμένο παιχνίδι μπορεί, με παιγνιώδη και βιωματικό τρόπο, να ωθήσει τα παιδιά να ανακαλύψουν στρατηγικές διαίρεσης μέτρησης, όπως η δημιουργία ισοπληθών ομάδων και να αντιληφθούν ότι όσο μικρότερες σε μέγεθος είναι οι ομάδες (μικρότερος διαιρέτης) τόσο περισσότερες είναι σε πλήθος (μεγαλύτερο πηλίκο), ανακαλύπτοντας έτσι την αντίστροφη σχέση διαιρέτη και πηλίκου, που «βρίσκεται» στην καρδιά της εννοιολογικής γνώσης της διαίρεσης (Correa et al., 1998; Kornilaki & Nunes, 2005; Κορνηλάκη & Nunez, 1999). Επίσης, το συγκριμένο παιχνίδι εστιάζει στην καταμέτρηση με ομάδες, που επίσης βοηθά τα παιδιά να εστιάσουν στις πολλαπλασιαστικές σχέσεις ανάμεσα στις ποσότητες (Behr et al., 1994).

## **Μεθοδολογία**

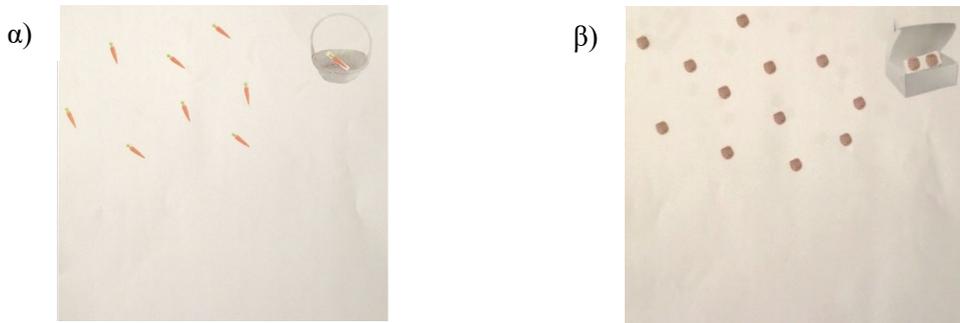
### ***Συμμετέχοντες***

Στη συγκεκριμένη έρευνα συμμετείχαν 35 παιδιά από τμήματα δύο ολοήμερων Νηπιαγωγείων στην περιφέρεια της Ελλάδας. Τα παιδιά ήταν ηλικίας 4-6 ετών. Η τάξη που συμμετείχε στην παρέμβαση είχε 14 παιδιά (5 προνήπια και 9 νήπια· 5 κορίτσια και 9 αγόρια) τα οποία αποτελούν την ομάδα παρέμβασης (στο εξής ΟΠ). Η τάξη που αποτέλεσε την ομάδα ελέγχου αποτελούνταν από 19 παιδιά (7 προνήπια και 12 νήπια· 9 κορίτσια και 10 αγόρια), τα οποία αποτέλεσαν την ομάδα ελέγχου (στο εξής ΟΕ). Τα παιδιά που συμμετείχαν ήταν στην πλειοψηφία τους ελληνικής καταγωγής και όλα είχαν τα ελληνικά ως πρώτη γλώσσα. Τέλος, ένα αγόρι ηλικίας 5,4 ετών στην ομάδα παρέμβασης είχε τύφλωση και δέχονταν παράλληλη στήριξη. Το παιδί αυτό συμμετείχε στις δράσεις κάνοντας χρήση ειδικού υλικού, που είχε σχεδιαστεί με τη βοήθεια της παιδαγωγού ειδικής στήριξης.

### ***Ερευνητικά εργαλεία- υλικά***

Στον προ-έλεγχο και στον μετα-έλεγχο δόθηκαν στα παιδιά να λύσουν από 4 λεκτικά προβλήματα με διαίρεση μέτρησης δοσμένα με εικονικές αναπαραστάσεις. Στον προ-έλεγχο το σενάριο ήθελε έναν γεωργό να βάζει καρότα σε καλάθια, ενώ στο μετα-έλεγχο το σενάριο είχε μια γιαγιά που έβαζε μπισκότα σε κουτιά. Συγκεκριμένα ένα πρόβλημα έλεγε, για παράδειγμα: «Ο Θανάσης έχει στον κήπο του σπιτιού του κουνελάκια. Τα κουνελάκια τα ταΐζει με καρότα, τα οποία θα βάλει μέσα σε καλάθια. Τα καρότα είναι οκτώ. Σε κάθε καλάθι χωράνε δύο καρότα. Πόσα καλάθια θα χρειαστεί;» Σε καθένα από τα προβλήματα, ο διαιρέτης παρέμενε σταθερός (8 καρότα), αλλά άλλαζε ο διαιρέτης (1, 2, 4 ή 8 καλάθια). Στον μετα-έλεγχο τα προβλήματα είχαν την εξής δομή: «Η γιαγιά έφτιαξε δώδεκα μπισκότα και θέλει να τα στείλει στα εγγόνια της. Για να τα στείλει όμως, πρέπει να τα βάλει μέσα σε κουτιά. Σε κάθε κουτί χωράνε δύο μπισκότα. Πόσα κουτιά θα χρειαστεί;» Σε καθένα από τα προβλήματα του μετα-ελέγχου ο διαιρέτης επίσης παρέμενε σταθερός (12 μπισκότα), αλλά άλλαζε ο διαιρέτης (2, 3, 4 ή 6 κουτιά). Μετά από κάθε έργο στα παιδιά γίνονταν η εξής ερώτηση: α) Πόσα καλάθια/κουτιά χρειάστηκαν; Η απάντηση στην ερώτηση αυτή αξιολογούσε την ικανότητα των

παιδιών να κάνουν διαίρεση μέτρησης. Για να είναι όμως σίγουρο ότι τα παιδιά κατανοούν συνολικά το πρόβλημα αυτή η ερώτηση συνοδεύονταν από τις ερωτήσεις: β) Πόσα καρότα/μπισκότα ήταν σε κάθε καλάθι/κουτί; και γ) Πόσα ήταν όλα τα καρότα/μπισκότα μαζί;



Εικόνα 1: Παράδειγμα της εικονικής αναπαράστασης του προβλήματος α) στον προ-έλεγχο και β) στον μετα-έλεγχο

Τα συγκεκριμένα έργα δόθηκαν με εικονικές αναπαραστάσεις σε τυχαία διάταξη, ώστε τα παιδιά να είναι ελεύθερα να χρησιμοποιήσουν διάφορες στρατηγικές, προκειμένου να βρουν το αποτέλεσμα. Επιλέχθηκαν διαφορετικά έργα στον μετα-έλεγχο ώστε να αποφευχθούν σωστές απαντήσεις λόγω προηγούμενης έκθεσης σε αυτά στον προ-έλεγχο.

### **Η διδακτική παρέμβαση**

Στην παρέμβαση τα παιδιά έπαιζαν ένα ομαδικό και κινητικό παιχνίδι (βλ. Σκουμπορδή, 2015) που συχνά αποκαλείται «Μινγκλ» (Mingle = αναμειγνύομαι, μπερδεύομαι). Στο συγκεκριμένο παιχνίδι, στο άκουσμα ενός αριθμού από την ερευνήτρια, τα παιδιά καλούνταν να δημιουργήσουν ομάδες με το συγκεκριμένο πλήθος ατόμων. Το πλήθος αυτό άλλαζε σε κάθε γύρο.

Αρχικά, τα παιδιά συγκεντρώθηκαν σε ολομέλεια και η ερευνήτρια, σε ρόλο δασκάλας της τάξης, έδωσε οδηγίες και εξήγησε στα παιδιά τους κανόνες του παιχνιδιού. Οι οδηγίες ήταν ότι τα παιδιά θα κινούνται τυχαία μέσα στην αίθουσα κι όταν η δασκάλα θα λέει έναν αριθμό, π.χ. τρία, τα παιδιά θα πρέπει να δημιουργήσουν ομάδες με τρία άτομα η καθεμία. Μόλις δημιουργηθούν οι ομάδες, τα παιδιά θα μετρούν τα μέλη της κάθε ομάδας και θα λένε ποιες ομάδες είναι οι «καλές» (δηλαδή ποιες έχουν τόσα άτομα όσα είπε η δασκάλα). Μετά θα καταμετρούν πόσες «καλές» ομάδες δημιουργήθηκαν. Τα παιδιά που περισσεύουν, θα πρέπει να μιμηθούνε ένα ζώο όπως, παπάκια, βατραχάκια κτλ. ώστε να μην αισθανθούν ότι παραγκωνίζονται. Έτσι ολοκληρώνεται ένας γύρος και ξεκινάει ο επόμενος, όπου τα παιδιά αναμειγνύονται ξανά μέχρι να ακουστεί ο νέος αριθμός. Βασικός κανόνας του παιχνιδιού ήταν ότι ποτέ δεν διώχνουμε κάποιο παιδί από μια ομάδα αλλά προσπαθούμε να μετακινηθούμε με τέτοιο τρόπο ώστε να φτιαχτούν οι καλές ομάδες, φεύγοντας από μια ομάδα και πηγαίνοντας σε μια άλλη. Αυτό αποτελούσε σημαντικό κανόνα, ώστε κανένα παιδί να μην αισθανθεί ότι απωθείται από τα άλλα παιδιά κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού.

Το παραπάνω αποτελεί ένα γνωστό παιχνίδι, τουλάχιστον στο εξωτερικό, που συχνά εφαρμόζεται στο νηπιαγωγείο. Ενώ, όμως, συνήθως εφαρμόζεται όπως περιγράφεται παραπάνω, στη συγκεκριμένη παρέμβαση έγιναν κάποιες σημαντικές μετατροπές ώστε να αναδειχθεί το μαθηματικό περιεχόμενο του παιχνιδιού που είναι να εκφράζονται (σωματικά αλλά και λεκτικά) οι σχέσεις ανάμεσα στις ποσότητες. Συγκεκριμένα, αμέσως μετά από κάθε γύρο, με τη βοήθεια της δασκάλας/ερευνήτριας τα παιδιά καλούνταν να βρουν και να πούνε πόσες είναι οι «καλές» ομάδες που φτιάξανε, για παράδειγμα με τρία άτομα. Δινόταν έτσι χώρος να πουν τα παιδιά ότι από τα δεκατέσσερα παιδιά φτιάχτηκαν τέσσερις καλές ομάδες

από τρία παιδιά (και περίσσεψαν δύο παιδιά) και ότι από τα δεκατέσσερα παιδιά φτιάχτηκαν δύο καλές ομάδες από επτά παιδιά (και δεν περίσσεψαν παιδιά) κ.ο.κ. Στο τέλος κάθε γύρου η δασκάλα τους ζητούσε να θυμηθούν τι είχε γίνει στον προηγούμενο γύρο. Τα παιδιά προσπαθούσαν να θυμηθούν και με την προτροπή της δασκάλας/ερευνήτριας γίνονταν συγκρίσεις με τις προηγούμενες φάσεις του παιχνιδιού.

Ερωτήσεις της δασκάλας/ερευνήτριας που κατήυθναν τα παιδιά να εκφράσουν λεκτικά τις σχέσεις ανάμεσα στις ποσότητες ήταν για παράδειγμα: *Τι παρατηρείτε; Ήταν περισσότερες οι ομάδες από δύο ή οι ομάδες από τέσσερα άτομα που φτιάξαμε; Γιατί έγινε αυτό; Τι πιστεύετε θα γίνει αν πάμε να φτιάξουμε πιο μεγάλες ομάδες, όπως ομάδες από επτά παιδιά - θα είναι πιο πολλές ή πιο λίγες οι ομάδες που θα φτιάξουμε; Γιατί θα γίνει αυτό; Που το ξέρετε; Με τον τρόπο αυτό τα παιδιά είχαν την ευκαιρία να χρησιμοποιήσουν το κατάλληλο μαθηματικό λεξιλόγιο, ενώ εστίαζαν την προσοχή τους στην κατανόηση των σχέσεων ανάμεσα στις ποσότητες και πώς αυτές οι σχέσεις αλλάζουν. Τα παραπάνω αποτελούν βασικές συνθήκες ώστε το παιχνίδι να αποτελέσει παράγοντα για τη γνωστική ανάπτυξη των παιδιών, καθώς σύμφωνα με τον Vygotsky (1978) μέσω του παιχνιδιού δημιουργείται μια ζώνη επικείμενης ανάπτυξης καθώς το παιδί κινητοποιείται να μάθει μέσα από τη συνδιαλλαγή του με τους άλλους παίκτες, λαμβάνοντας βοήθεια από αυτούς με τους οποίους παίζει μαζί.*

Στο τέλος της παρέμβασης ακολούθησε μία δράση αναστοχασμού όπου τα παιδιά, με τη βοήθεια της δασκάλας/ερευνήτριας, αναστοχάστηκαν πάνω στη δραστηριότητα που είχε μόλις ολοκληρωθεί. Συγκεκριμένα, τα παιδιά κλήθηκαν να απαντήσουν σε ερωτήσεις όπως *πώς θα περιγράφατε το παιχνίδι που μόλις παίζατε, αν και τί σας άρεσε, αν κάτι σας έκανε εντύπωση, αν μάθατε κάτι και τι είναι αυτό, αν σας άρεσε και ποιο σημείο σας άρεσε περισσότερο, όπως επίσης και αν θα θέλατε να το ξαναπαίζετε*. Αυτές οι ερωτήσεις είχαν στόχο να ενισχύσουν τη μεταγνωστική επίγνωση των παιδιών για τις σχέσεις που είχαν ανακαλύψει και την εμπειρία που απόκτησαν παίζοντας το παιχνίδι (Clements & Sarama, 2023). Πιο συγκεκριμένα, τα παιδιά είχαν την ευκαιρία να θυμηθούν τις φάσεις του παιχνιδιού και να εκφράσουν τις σχέσεις που αναδείχθηκαν ανάμεσα στις ποσότητες. Η δασκάλα/ερευνήτρια ενίσχυσε το στοχασμό προς αυτή την κατεύθυνση με ερωτήσεις όπως *«θυμάστε, όταν ήμασταν πιο πολλοί σε μία ομάδα, είχαμε λίγες ή πολλές ομάδες;», «όταν έχουμε πολλές ομάδες, η κάθε ομάδα έχει πολλά ή λίγα άτομα;», «όταν ήμασταν τέσσερα άτομα σε κάθε ομάδα, οι ομάδες ήταν περισσότερες ή λιγότερες από όταν ήμασταν τρία άτομα στην κάθε ομάδα;»*. Η συγκεκριμένη συνθήκη προέτρεπε τα παιδιά να χρησιμοποιήσουν μαθηματικό λεξιλόγιο, σημαντική συνθήκη για την θεμελίωση της νέας γνώσης (Clements & Sarama, 2023).

Όπως φαίνεται από τα παραπάνω, το συγκεκριμένο παιχνίδι και ο τρόπος που παίχτηκε δημιουργεί τη συνθήκη να ανακαλύψουν τα παιδιά σημαντικές μαθηματικές έννοιες που αφορούν τον αριθμό και τη σχέση του με τις ποσότητες. Συγκεκριμένα, στη βάση του παιχνιδιού είναι η χρήση της καταμέτρησης ως εργαλείο για την κατανόηση της πληθικότητας ενός συνόλου (Sophian, 2017). Τα παιδιά καλούνταν να δημιουργήσουν ομάδες συγκεκριμένου πλήθους χρησιμοποιώντας καταμέτρηση με μονάδες. Σε δεύτερο επίπεδο, καταμετρώντας τις ομάδες που σχηματίστηκαν, τα παιδιά εκτελούν καταμέτρηση σε ομάδες, ανακαλύπτοντας έτσι ότι η καταμέτρηση μπορεί να γίνει σε μονάδες ή σε ομάδες μονάδων, κι έτσι εισάγονται στην έννοια της σύνθετης μονάδας (μονάδα μονάδων) (Behr et al., 1994). Συγκεκριμένα, καταμετρώντας με μονάδες τα παιδιά βρίσκουν ότι η τάξη έχει 14 παιδιά, αλλά καταμετρώντας σε τριάδες η ίδια τάξη έχει 4 τριάδες και 2 παιδιά, ενώ καταμετρώντας σε τετράδες το αποτέλεσμα είναι 3 τετράδες και 2 παιδιά, κ.ο.κ. Έτσι τα παιδιά έχουν την ευκαιρία με έναν παιγνιώδη και βιωματικό τρόπο να εισαχθούν σε μία σύνθετη και γνωστικά απαιτητική έννοια, αυτή της σύνθετης μονάδας, η οποία όμως θα αποτελέσει σημαντικό εφόδιο για την κατανόηση των ρητών αριθμών, όπως τα κλάσματα, στο μέλλον (Behr et al., 1994; Steffe, 1992). Επίσης, ενισχύεται η εστίαση των παιδιών στις πολλαπλασιαστές σχέσεις ανάμεσα στους αριθμούς και τις ποσότητες. Για τους παραπάνω λόγους θα αναμέναμε ότι μετά από το συγκεκριμένο παιχνίδι

τα παιδιά πιο εύκολα θα μπορούν να κάνουν διαίρεση μέτρησης, κατανοώντας ότι μια αρχική πληθική ποσότητα μπορεί να διαιρεθεί σε επιμέρους ομάδες ίσου πλήθους, αφήνοντας πιθανά και κάποιο υπόλοιπο.

### **Διαδικασία έρευνας**

Αρχικά, πραγματοποιήθηκε ο προ-έλεγχος. Την επόμενη μέρα τα παιδιά της ομάδας παρέμβασης έπαιξαν σε μία διδακτική ώρα πέντε γύρους με τους αριθμούς 4, 3, 7, 2 και 14 σε αυτή τη σειρά. Τα παιδιά της ομάδας ελέγχου παρακολούθησαν κανονικά το πρόγραμμα του νηπιαγωγείου. Σε επόμενη μέρα, πραγματοποιήθηκε ο μετα-έλεγχος. Η διαδικασία του προ-ελέγχου και του μετα-ελέγχου έγινε σε έναν χώρο δίπλα στην αίθουσα του νηπιαγωγείου, όπου υπήρχε ησυχία και ιδιωτικότητα. Στα παιδιά δίνονταν τα προβλήματα κατά τη διάρκεια προσωπικής συνέντευξης, η οποία ηχογραφούνταν. Επίσης, συλλέχθηκαν οι απαντήσεις των παιδιών στα φύλλα εργασίας, ενώ η ερευνήτρια κρατούσε σημειώσεις από τις απαντήσεις των παιδιών. Συχνά, τόσο τα δεδομένα κάθε προβλήματος όσο και το ζητούμενο επαναλαμβάνονταν από την ερευνήτρια, ώστε να γίνει κατανοητή από τα παιδιά η προβληματική κατάσταση. Η ερευνήτρια με αυτόν τον τρόπο υποστήριζε τα παιδιά να εστιάσουν στο αρχικό πλήθος και το πλήθος κάθε ομαδοποίησης που απαιτείται, δείχνοντας τις δοσμένες εικόνες στα παιδιά. Μετά από μία ολοκληρωμένη απάντηση ζητούνταν από το παιδί να επαναλάβει την απάντησή του στην ερώτηση του προβλήματος, ώστε να είναι βέβαιο ποια ήταν η τελική του απάντηση.

## **ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ**

### **Αποτελέσματα των επιδόσεων των παιδιών**

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζεται το πλήθος των σωστών απαντήσεων των παιδιών των δύο ομάδων, στον προ-έλεγχο και τον μετα-έλεγχο, ανά έργο που ορίζεται από τους διαφορετικούς διαιρέτες. Όπως βλέπουμε στον Πίνακα 1 οι συνολικές σωστές απαντήσεις ήταν αρκετά αυξημένες στον προ-έλεγχο και για τις δύο ομάδες. Επίσης, φάνηκε πως οι σωστές απαντήσεις των παιδιών της ομάδας παρέμβασης αυξήθηκαν στον μετα-έλεγχο σε σχέση με τον προ-έλεγχο, έστω κι αν τα έργα διαίρεσης στον μετα-έλεγχο ήταν λίγο δυσκολότερα, με μεγαλύτερους αριθμούς, απ' ότι στον προ-έλεγχο.

Συγκεκριμένα όσον αφορά την ομάδα παρέμβασης, πριν από την παρέμβαση, 6 από τα 14 παιδιά ήταν ήδη σε θέση να λύσουν σωστά όλα τα προβλήματα. Στον μετα-έλεγχο, πέντε από αυτά τα παιδιά, και τρία ακόμα έλυσαν όλα τα προβλήματα σωστά. Το έκτο παιδί έλυσε το πρόβλημα 8:4 στον προ-έλεγχο αλλά όχι το πρόβλημα 12:4 στον προ-έλεγχο - ούτε το πρόβλημα 12:6. Τα υπόλοιπα παιδιά έλυσαν τουλάχιστον ένα πρόβλημα στον προ-έλεγχο (συνήθως το πρόβλημα 8:2) και τουλάχιστον δύο στο μετα-έλεγχο, όπου δεν κατάφεραν το πρόβλημα 12:6 ή/και το πρόβλημα 12:4. Συνολικά στον προ-έλεγχο το 71% του συνόλου των απαντήσεων των παιδιών της ΟΠ ήταν ορθές, ενώ μετά την παρέμβαση το ποσοστό αυτό αυξήθηκε σε 86%.

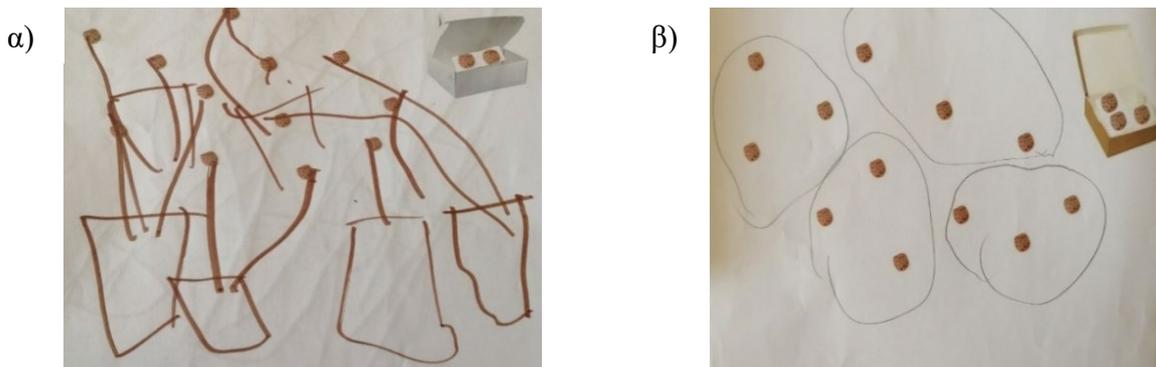
Όσον αφορά την ομάδα ελέγχου, στον προ-έλεγχο σχεδόν όλα τα παιδιά (15 από τα 19 παιδιά) μπορούσαν να λύσουν σωστά όλα τα προβλήματα και 4 παιδιά έκαναν λάθος μόνο σε ένα πρόβλημα (κυρίως στο 8:1). Στον μετα-έλεγχο, 11 παιδιά έλυσαν σωστά όλα τα προβλήματα, 6 παιδιά έκαναν λάθος σε ένα από τα τέσσερα προβλήματα (συνήθως το 12:6). Ένα παιδί έλυσε μόνο ένα πρόβλημα σωστά (το 12:8) και άλλο ένα δεν έλυσε κανένα πρόβλημα, διότι στο πρόβλημα 12:2 έκανε λάθος και μετά, αρνήθηκε να προσπαθήσει στα υπόλοιπα. Φαίνεται έτσι πως η ΟΕ είχε καλύτερες αρχικές επιδόσεις από την ΟΠ, με περισσότερα παιδιά να είναι ικανά να λύσουν τα δοσμένα προβλήματα με διαιρέσεις μέτρησης. Συγκεκριμένα το 95% του συνόλου των απαντήσεων ήταν σωστές στον προ-έλεγχο, αλλά στον μετα-έλεγχο αυτές μειώθηκαν σε 83% του συνόλου των απαντήσεων.

Πίνακας 1: Σωστές απαντήσεις των παιδιών στον προ-έλεγχο και τον μετα-έλεγχο

Έργο ανά Διαιρέτη	Ομάδα Παρέμβασης		Ομάδα Ελέγχου	
	Προ-έλεγχος	Μετα-έλεγχος	Προ-έλεγχος	Μετα-έλεγχος
1	12		17	
2	12	12	18	15
3		13		16
4	7	12	18	14
6		11		18
8	9		19	
Σύνολο	40/56	48/56	72/76	63/76

#### Αποτελέσματα ως προς τις στρατηγικές των παιδιών

Τα παιδιά και των δυο ομάδων χρησιμοποίησαν δύο κύριες στρατηγικές για την επίλυση των προβλημάτων: α) μια στρατηγική διανομής, κατά την οποία σχεδίασαν γραμμές που έδειχναν ποιο καρότο/μπισκότο πηγαίνει σε ποιο καλάθι/κουτί (όπως βλέπετε στην Εικόνα 3α) και β) μια στρατηγική ομαδοποίησης ίσων ομάδων, κατά την οποία δημιούργησαν ομάδες καρότων/μπισκότων σχεδιάζοντας κύκλους γύρω τους και στη συνέχεια καταμέτρησαν τους κύκλους/ομάδες (όπως βλέπετε στην Εικόνα 2β).



Εικόνα 2: Στρατηγικές επίλυσης διαίρεσης μέτρησης με διανομή (α) ή δημιουργία ομάδων (β)

Στον Πίνακα 2 παρουσιάζονται οι συχνότητες εμφάνισης των στρατηγικών που χρησιμοποίησαν τα παιδιά των δύο ομάδων στον προ-έλεγχο και τον μετα-έλεγχο. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 2, η δεύτερη και πιο εκλεπτυσμένη στρατηγική της ομαδοποίησης ήταν πιο συχνή μετά την παρέμβαση τόσο στην ομάδα παρέμβασης όσο και στην ομάδα ελέγχου.

Πίνακας 2: Στρατηγικές που χρησιμοποίησαν τα παιδιά στον προ-έλεγχο και τον μετα-έλεγχο

	Ομάδα Παρέμβασης		Ομάδα Ελέγχου	
	Διανομή	Ομαδοποίηση	Διανομή	Ομαδοποίηση
Προ-έλεγχος	15 (28%)	37 (71%)	76 (100%)	0
Μετα-έλεγχος	13 (23%)	43 (76%)	43 (56%)	33 (43%)

Επιπλέον, καταγράφηκαν νοητικές στρατηγικές σε παιδιά της ομάδας παρέμβασης στον μετα-έλεγχο. Σε αυτές τις περιπτώσεις τα παιδιά βρήκαν πρώτα το αποτέλεσμα με το νου τους και στη συνέχεια παρουσίασαν τη λύση μέσω σχεδίων. Μάλιστα, κατά τη διάρκεια του μετα-ελέγχου έξι από τα παιδιά της ομάδας παρέμβασης διατύπωσαν αυθόρμητα την αρχή *λιγότερα μέλη-περισσότερες ομάδες*, που αποτελεί βασικό στοιχείο της έννοιας της διαίρεσης. Δεν έλειψαν βέβαια και τα παιδιά όπως ο M8 (5,8 ετών), που μέχρι και κατά τον αναστοχασμός μπέρδευαν τη σχέση διαίρετη και πηλίκου λέγοντας «Επειδή όταν έχουμε πολλές ομάδες, υπάρχουν περισσότερα παιδιά».

### **Παρατηρήσεις από το παιχνίδι**

Όσον αφορά το παιχνίδι, παρατηρήθηκε ότι τα παιδιά έδειξαν μεγάλο κίνητρο για συμμετοχή, κατανόησαν γρήγορα τους κανόνες και συμμετείχαν ενεργά σε όλες τις φάσεις του. Παίζοντας τον πρώτο γύρω (με στόχο το 3) τα παιδιά πράγματι χρησιμοποίησαν καταμέτρηση για να φτιάξουν τις ομάδες κάνοντας τις απαραίτητες μετακινήσεις στο χώρο. Παρατήρησαν ότι μία από τις ομάδες *δεν είναι καλή διότι έχει μόνο 2 άτομα* και ότι *αυτό δεν αλλάζει με τίποτα*. Στον επόμενο γύρο (με στόχο το 4) παρατήρησαν πάλι ότι *περισσεύουν 2 παιδιά τα οποία θα πρέπει να κάνουν τα παπάκια*. Αφού καταμετρήθηκε το πλήθος των καλών ομάδων, η δασκάλα/ερευνήτρια ρώτησε αν οι ομάδες είναι περισσότερες ή λιγότερες από πριν (που έπαιζαν το 3) και γιατί συμβαίνει αυτό. Τότε τα παιδιά είπαν ότι *οι ομάδες είναι λίγες αλλά έχουν πολλά παιδιά μέσα*.

Στη συνέχεια, με έκπληξη παρατήρησαν ότι όταν έπαιζαν το 7 κι επίσης όταν έπαιζαν το 2, *δεν περίσσεψε κανένα παιδί* και ότι *όλες οι ομάδες είναι καλές*. Μετά από προτροπή της δασκάλας/ερευνήτριας κάποια παιδιά είπαν ότι *όταν μεγαλώνουν οι ομάδες, τότε μικραίνουν* (βλ. λιγοστεύουν) *τα παιδιά στην κάθε ομάδα*. Στην τελευταία φάση του παιχνιδιού η δασκάλα/ερευνήτρια ζήτησε από τα παιδιά να προβλέψουν τι θα γίνει όταν θα παίξουν έναν μεγάλο αριθμό, αν θα φτιάξουν πολλές ομάδες ή λίγες. Τότε κάποια παιδιά απάντησαν σωστά ότι *θα κάνουμε λίγες ομάδες με πολλά παιδιά*. Παρόλα αυτά, υπήρχαν και παιδιά που μπέρδευαν τις σχέσεις λέγοντας ότι *όταν έχουμε περισσότερα παιδιά έχουμε περισσότερες ομάδες*.

Κατά τη φάση του αναστοχασμού τα παιδιά εξέφρασαν τη διάθεσή τους να το παίξουν ξανά ενώ περιέγραψαν το παιχνίδι κάνοντας χρήση μαθηματικού λεξιλογίου. Συγκεκριμένα, όταν η δασκάλα/ερευνήτρια ζήτησε από τα παιδιά να θυμηθούν τι έκαναν στο παιχνίδι που μόλις έπαιζαν, τα παιδιά είπαν ότι *όταν ακούμε έναν αριθμό τρέχουμε να μπούμε σε ομάδες, ότι φτιάξαμε ομάδες από τέσσερα παιδιά, ότι οι ομάδες ήταν μικρές και άλλες φορές ήταν μεγάλες, κ.ο.κ.* Όταν η δασκάλα/ερευνήτρια τους ζήτησε να πουν τι τους έκανε εντύπωση κάποια παιδιά είπαν ότι *όταν κάποιος δεν ήταν σε ομάδα έκανε τα παπάκια*, ενώ άλλο παιδί είπε ότι *στο τέλος κάναμε μία μεγάλη ομάδα με όλα τα παιδιά*. Κατά τη διάρκεια του αναστοχασμού, το μαθηματικό λεξιλόγιο που αναδύθηκε αποτελούνταν από λέξεις όπως, *μικρές και μεγάλες ομάδες, περίσσεψαν, μικρός και μεγάλος αριθμός, λίγα και πολλά παιδιά, και διάφορες αριθμολέξεις*.

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Από τα αποτελέσματά μας φάνηκε ότι τα παιδιά του νηπιαγωγείου μπορούσαν να λύσουν προβλήματα διαίρεσης μέτρησης πριν να έχουν λάβει διδασκαλία πάνω στη διαίρεση, δείχνοντας σε έναν βαθμό κατανόηση της διαίρεσης μέτρησης. Τα παιδιά που συμμετείχαν στη μελέτη (ειδικά τα νήπια) ήταν ήδη σε θέση να κατανοήσουν και να αναπαραστήσουν εικονογραφικά μια κατάσταση διαίρεσης μέτρησης ήδη πριν από την παρέμβαση, ενισχύοντας προηγούμενα αντίστοιχα ευρήματα (Bakker et al., 2014; Cheeseman et al., 2020, 2022; Ching & Wu, 2021; Kornilaki & Nunes, 2005). Όπως ήταν αναμενόμενο, σημειώθηκαν δια-ατομικές διαφορές όσον αφορά τα προβλήματα που κάθε παιδί μπορούσε να λύσει, ανάλογα με το μέγεθος των επιδιωκόμενων ομάδων (διαίρετης) (Ching & Wu, 2021).

Στον μετα-έλεγχο, υπήρξε μια μικρή βελτίωση στα παιδιά της ΟΠ, όσον αφορά τον αριθμό των προβλημάτων που μπορούσε να λύσει σωστά κάθε παιδί, έστω κι αν στον μετα-έλεγχο η δυσκολία των προβλημάτων ήταν πιο αυξημένη. Αυτό δεν παρατηρήθηκε στην ΟΕ, όπου οι σωστές απαντήσεις στα προβλήματα του μετα-ελέγχου μειώθηκαν σε σχέση με τον προ-έλεγχο, πιθανά επειδή έχασαν το ενδιαφέρον τους. Και στις δύο ομάδες παρατηρείται πως η δυσκολία των παιδιών αυξάνονταν όσο μεγάλωνε ο διαιρέτης της διαίρεσης.

Για τη λύση των προβλημάτων που τους δόθηκαν τα παιδιά χρησιμοποίησαν κατά βάση δύο ειδών στρατηγικές, τη στρατηγική διανομής και τη στρατηγική ομαδοποίησης ίσων ομάδων, που έχουν εμφανιστεί και σε άλλες παρόμοιες καταστάσεις διαίρεσης (βλ. Δαφέρμου, Κουλούρη & Μπασαγιάννη, 2006). Στα παιδιά της ΟΠ παρατηρήθηκε μια μικρή αύξηση των πιο προηγμένων στρατηγικών, όπως αυτή της δημιουργίας ομάδων. Επίσης, στον μετα-έλεγχο της ΟΠ παρατηρήθηκε η χρήση νοητικών στρατηγικών από τουλάχιστον 7 παιδιά κάτι που έχει παρατηρηθεί και σε προηγούμενες σχετικές μελέτες (Cheeseman et al., 2020). Στις συγκεκριμένες περιπτώσεις, τα παιδιά έλυναν το πρόβλημα νοητικά και μετά έδειχναν την απάντησή τους στο χαρτί δημιουργώντας τις κατάλληλες εικόνες.

Στην ομάδα ελέγχου επίσης παρατηρήθηκε μια σημαντική αύξηση των πιο εκλεπτυσμένων στρατηγικών δημιουργίας ομάδων. Οι πιθανές αιτίες αυτού του μη αναμενόμενου αποτελέσματος διερευνήθηκαν εκ των υστέρων, ρωτώντας τη νηπιαγωγό της συγκεκριμένης τάξης αν έκανε κάτι στο διάστημα των λίγων ημερών που μεσολάβησαν, ανάμεσα στον προ-έλεγχο και τον μετα-έλεγχο που να μπορούσε να ερμηνεύσει το συγκεκριμένο αποτέλεσμα. Σύμφωνα με τη νηπιαγωγό, επειδή η περίοδος ήταν πριν τις διακοπές του Πάσχα, έκανε στην τάξη κάποιες δραστηριότητες ομαδοποίησης, όπου τα παιδιά καλούνταν να τοποθετήσουν πασχαλινά αυγά διαφορετικών χρωμάτων σε καλάθια. Καθώς η νηπιαγωγός της τάξης δεν ήταν ενήμερη για τους στόχους της παρούσας μελέτης για να μην επηρεάσει με κάποιον τρόπο τα αποτελέσματά της, οι δραστηριότητες αυτές δεν ήταν άμεσα συνδεδεμένες με τη διαίρεση, αλλά έμενε στην ομαδοποίηση με βάση το χρώμα. Αυτές οι δραστηριότητες μπορεί να επέδρασαν στην τάση των παιδιών να χρησιμοποιούν περισσότερες στρατηγικές ομαδοποίησης στα έργα διαίρεσης που τους δόθηκαν στον μετα-έλεγχο.

### **Περιορισμοί της μελέτης και προτάσεις για μελλοντικές επεκτάσεις της**

Η συγκεκριμένη μελέτη είναι μια πιλοτική μελέτη που αποτελεί μέρος μια πιο διευρυμένης και συνεχιζόμενης έρευνας σχεδιασμού που εστιάζει στην ανάπτυξη της πρώιμης πολλαπλασιαστικής σκέψης. Ως τέτοια, από μόνη της υπόκειται σε πλήθος περιορισμών που μειώνουν τη δυνατότητα να προσφέρει γενικεύσιμα αποτελέσματα. Ένας βασικός περιορισμός είναι η πολύ σύντομη διάρκεια της παρέμβασης. Κάθε μαθηματική δραστηριότητα που στόχο έχει να δημιουργήσει ένα περιβάλλον μάθησης, όπου τα παιδιά θα μπορέσουν να διερευνήσουν τις σχέσεις ανάμεσα στους αριθμούς και τις ποσότητες έχοντας τη δυνατότητα να κάνουν τις απαραίτητες γενικεύσεις που χαρακτηρίζουν τη μαθηματική γνώση θα πρέπει να πραγματοποιείται εξακολουθητικά κι όχι με σύντομες και αποσπασματικές παρεμβάσεις

(Δαφέρμου, Κουλούρη & Μπασαγιάννη, 2006; Τζεκάκη, 1996). Η επανάληψη των δραστηριοτήτων με άλλους αριθμούς και ποσότητες, σε διαφορετικές μέρες και κάτω από διαφορετικές συνθήκες θα μπορέσουν να προσφέρουν στα παιδιά τις πλούσιες μαθηματικές εμπειρίες που απαιτούνται για να οικοδομήσουν την μαθηματική γνώση (Clements & Sarama, 2023). Δυστυχώς, στην παρούσα πιλοτική μελέτη δεν ήταν δυνατόν να γίνει μια κανονική εφαρμογή της δραστηριότητας και περιοριστήκαμε σε μία σύντομη εφαρμογή της, ελπίζοντας στο μέλλον να υπάρξει η δυνατότητα να εφαρμοστεί σε πλήρη σχεδιασμό.

Ένας άλλος σημαντικός περιορισμός της παρούσας μελέτης ήταν το μικρό δείγμα των ομάδων παρέμβασης και ελέγχου, που δεν επιτρέπει την εφαρμογή στατιστικών κριτηρίων για τον έλεγχο των διαφορών που παρατηρήθηκαν πριν και μετά την παρέμβαση. Η συμμετοχή περισσότερων παιδιών στις δύο ομάδες θα μπορούσε επίσης να έχει εξισορροπήσει τις διαφορές στις ικανότητες των παιδιών που σημειώθηκαν στον προ-έλεγχο και οι οποίες δυσκολεύουν την κατανόηση των αλλαγών που συνέβησαν ως αποτελέσματα της συγκεκριμένης παρέμβασης. Επίσης, καθώς δεν ήταν εφικτός ένας επανέλεγχος μετά την έλευση κάποιου εύλογου χρονικού διαστήματος από την παρέμβαση, δεν δύναται να εξεταστεί η διατήρηση των μαθησιακών επιτευγμάτων πιο μακροπρόθεσμα, κάτι που θα ήταν πολύ χρήσιμο.

Όσον αφορά τα έργα που συμπεριλήφθηκαν στους ελέγχους της ικανότητας των παιδιών να κάνουν διαίρεση μέτρησης σε μια μελλοντική μελέτη που θα εστίαζε στο συγκεκριμένο ζήτημα, καλό θα ήταν να εμπλουτιστούν και με πιο δύσκολα έργα, ώστε να μην εμφανιστεί το φαινόμενο των τόσο υψηλών επιδόσεων ήδη από τον προ-έλεγχο που συσκοτίζει τις πιθανές επιδράσεις της διδακτικής παρέμβασης. Οι υψηλές επιδόσεις που σημείωσαν τα παιδιά στα προβλήματα διαίρεσης που τους δόθηκαν ίσως να οφείλονται στην ευκολία τους, λόγω των μικρών αριθμών που δόθηκαν, αλλά και στην παρουσία των αναπαραστάσεων που συνόδευαν το πρόβλημα. Επίσης, η επανάληψη των ερωτήσεων από την ερευνήτρια και η συχνή εστίαση στα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος μπορεί να επηρέασαν τις απαντήσεις των παιδιών. Σε μελλοντική μελέτη, θα είχε νόημα να δοκιμαστούν πιο δύσκολα προβλήματα (βλ. για παράδειγμα Ching & Wu, 2021), με μικρότερη υποστήριξη από τη μεριά της ερευνήτριας.

Προηγούμενες μελέτες έχουν δείξει ότι τα παιδιά μπορεί να δώσουν λύση σε τέτοια προβλήματα κάνοντας χρήση των αναπαραστάσεων (Bakker et al., 2014) χωρίς αυτό απαραίτητα να σημαίνει ότι έχουν κατανοήσει τη διαίρεση ως έκφραση των συγκεκριμένων σχέσεων (Correa et al., 1998; Kornilaki & Nunes, 2005). Επίσης, ερωτήσεις που να εξετάζουν σε βάθος και αν τα παιδιά αντιλαμβάνονται την αντίστροφη σχέση διαιρέτη και πηλίκου είναι σημαντικό να προστεθούν, καθώς η συγκεκριμένη κατανόηση, όπως έχουμε προαναφέρει, αποτελεί βασική πτυχή της εννοιολογικής γνώσης της διαίρεσης (Correa et al., 1998; Kornilaki & Nunes, 2005; Κορνηλάκη, & Nunez, 1999). Τα έργα αυτά θα ήταν χρήσιμο να έχουν δοκιμαστεί σε παιδιά μικρών ηλικιών ώστε να μπορούν να εκφραστούν εύλογες υποθέσεις όσον αφορά το αναμενόμενο επίπεδο της αρχικής ικανότητας των παιδιών για επίλυση τέτοιων έργων. Στην παρούσα μελέτη ελλείπει προηγούμενων μελετών με αντίστοιχα έργα σε παρόμοιο πληθυσμό, δεν ήταν δυνατόν να γίνουν τέτοιες υποθέσεις για τις αναμενόμενες επιδόσεις των παιδιών στα έργα του προ-ελέγχου.

### **Συμπεράσματα και παιδαγωγικές εφαρμογές**

Παρ' όλους τους παραπάνω περιορισμούς τα αποτελέσματα αυτής της μελέτης προσφέρουν κάποιες ενδείξεις ότι υπάρχει δυνατότητα να ενισχυθεί η πολλαπλασιαστική σκέψη των μικρών παιδιών μέσα από σχεδιασμένες δραστηριότητες που κινητοποιούν τα παιδιά να ανακαλύψουν τις σχέσεις ανάμεσα στους αριθμούς και τις ποσότητες (Cheeseman et al., 2020, 2022) και να κατανοήσουν τη διαίρεση μέτρησης. Τα αποτελέσματα αυτά μας κάνουν αισιόδοξους για τα οφέλη που θα είχε ένα περιβάλλον μάθησης που θα ενέπλεκε τα παιδιά σε δραστηριότητες που

καλλιεργούν την πολλαπλασιαστική σκέψη με πιο συστηματικό τρόπο και σε μεγαλύτερο βάθος χρόνου, ώστε τα παιδιά να προετοιμαστούν κατάλληλα για την κατανόηση πιο δύσκολων μαθηματικών εννοιών, όπως οι ρητοί αριθμοί (Stefe, 1994). Τέτοιες δραστηριότητες θα μπορούσαν να είναι η καταμέτρηση σε ομάδες, όπου όπως είπαμε παραπάνω, δίνουν τη δυνατότητα στα παιδιά να εστιάσουν στις πολλαπλασιαστικές σχέσεις και να προσεγγίσουν την έννοια της σύνθετης μονάδας. Ιδανικά αυτές οι δραστηριότητες θα μπορούσαν να γίνουν στα πλαίσια παιχνιδιών, όπου τα παιδιά έχουν την ευκαιρία να συνδιαλλαγούν, να ανακαλύψουν, να εκφραστούν, να ακούσουν και να ακουστούν σε περιβάλλοντα ασφαλή και σχεδιασμένα για τις ικανότητες και τις ανάγκες τους.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- Αυγητίδου, Σ. (2001). Εισαγωγή. Στο Σ. Αυγητίδου (επιμ.) *Το παιχνίδι. Σύγχρονες ερευνητικές και διδακτικές προσεγγίσεις* (σελ. 13-51). Τυπωθήτω: Γιώργος Δάρδανος, Αθήνα.
- Βαμβακούση, Ξ., & Καλδρυμίδου, Μ. (2018). Το αναλυτικό πρόγραμμα ως εκπαιδευτικό υλικό: το παράδειγμα του πολλαπλασιαστικού εννοιολογικού πεδίου. Στο Χ. Σκουμπουρδή & Μ. Σκουμιός (Επιμ.). *Πρακτικά 3ου Πανελληνίου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή: «Εκπαιδευτικό υλικό Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών: Διαφορετικές χρήσεις, διασταυρούμενες πορείες μάθησης»* (σελ. 302-311), Ρόδος: Εργαστήριο Μαθησιακής Τεχνολογίας και Διδακτικής Μηχανικής του Τ.Ε.Π.Α.Ε.Σ. και Εργαστήριο Φυσικών Επιστημών του Π.Τ.Δ.Ε. του Πανεπιστημίου Αιγαίου. Ψηφιακή έκδοση, ISBN: 978-960-86791-9-1.
- Bakker, M., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Robitzsch, A. (2014). First-graders' knowledge of multiplicative reasoning before formal instruction in this domain. *Contemporary Educational Psychology*, 39(1), 59–73. <https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2013.11.001>
- Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1994). Units of quantity: A conceptual basis common to additive and multiplicative structures. In G. Harrel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 121–176). State University of New York Press.
- Cheeseman, J., Downton, A., & Roche, A. (2022). Ideas of early division prior to formal instruction. In Fernández, C, Llinares, S, Gutiérrez, A., & Planas, N (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 131–138). PME.
- Cheeseman, J., Downton, A., Roche, A., & Ferguson, S. (2020). Investigating young students' multiplicative thinking: The 12 little ducks problem. *The Journal of Mathematical Behavior*, 60, 100817. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100817>
- Ching, B. H.-H., & Wu, H. X. (2021). Young children's knowledge of fair sharing as an informal basis for understanding division: A latent profile analysis. *Learning and Instruction*, 73, 101460. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2021.101460>
- Christou, K. P., Pollack, C., Van Hoof, J., & Van Dooren, W. (2020). Natural number bias in arithmetic operations with missing numbers – A reaction time study. *Journal of Numerical Cognition*, 6(1), 22–49. <https://doi.org/10.5964/jnc.v6i1.228>
- Clements, D., H., & Sarama, J. (2023). *Τροχιές μάθησης και διδασκαλίας για τα μαθηματικά στην προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία* (Ξ. Βαμβακούση & Κ. Χρήστου Π., Eds.). Gutenberg. <https://www.politeianet.gr/books/9789600124620-clements-h-douglas-gutenberg-trochies-mathisis-kai-didaskalias-gia-ta-mathimatika-stin-proscholiki-kai-proti-scholiki-ilikia-354745>
- Correa, J., Bryant, P., & Nunes, T. (1998). Young Children's Understanding of Division: The Relationship Between Division Terms in a Noncomputational Task. *Journal of Educational Psychology*, 90(2), 321–329.
- Fischbein, E., Deri, M., Nello, M., & Marino, M. (1985). The role of implicit models in solving problems in multiplication and division. *Journal of Research in Mathematics Education*, 16, 3–17. <https://doi.org/10.2307/748969>
- Kornilaki, E., & Nunes, T. (2005). Generalising principles in spite of procedural differences: Children's understanding of division. *Cognitive Development*, 20(3), 388–406. <https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2005.05.004>

- Sophian, C. (2017). *The Origins of Mathematical Knowledge in Childhood*. Routledge.
- Steffe, L. P. (1992). Schemes of action and operation involving composite units. *Learning and Individual Differences*, 4, 259–309.
- Steffe, L. P. (1994). Children's multiplying schemes. In *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (University of New York Press, pp. 3–39). State University of New York Press Albany, NY.
- Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*. Academic Press. (pp. 127–174). Academic Press.  
<https://cir.nii.ac.jp/crid/1570854174253954688>
- Κορνηλάκη, Α & Νunez, Τ. (1999). Οι απαρχές κατανόησης της διαίρεσης. In Κούρτη, Ε (Ed.), *Τριήμερο Πανελλήνιο Συνέδριο «Η Έρευνα στην Προσχολική Εκπαίδευση. Ψυχολογικές και Κοινωνικές Προσεγγίσεις, Vol. Τόμος Β'.* Εκδόσεις Τυπωθήτω- Γιώργος Δαρδανός.
- Χασάπης, Δ. (2012). Το παιχνίδι στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών. Στο Δ. Χασάπης (επιμ.) *10ο Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών: Το παιχνίδι στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών* (σελ. 67-88), Αθήνα.