

## Ανοικτή Εκπαίδευση: το περιοδικό για την Ανοικτή και εξ Αποστάσεως Εκπαίδευση και την Εκπαιδευτική Τεχνολογία

Τόμ. 8, Αρ. 1 (2012)

Ανοικτή Εκπαίδευση



Μαθηματικά και εξ αποστάσεως εκπαίδευση στο  
Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

Μαρία Χατζηνικολάου

doi: [10.12681/jode.9781](https://doi.org/10.12681/jode.9781)

Βιβλιογραφική αναφορά:

## Μαθηματικά και εξ αποστάσεως εκπαίδευση στο Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

### Mathematics and Distance education at Hellenic Open University

Μαρία Χατζηνικολάου

Αν. καθηγήτρια, Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

[hadjinicolaou@eap.gr](mailto:hadjinicolaou@eap.gr)

#### Περίληψη

Ο σκοπός, η φιλοσοφία, οι αρχές, το περιεχόμενο, τα μέσα και οι μέθοδοι διδασκαλίας των Μαθηματικών, στο πλαίσιο της Ανοικτής και εξ Αποστάσεως Εκπαίδευσης (ΑεξΑΕ) παρουσιάζονται και αναλύονται στην περίπτωση του Προγράμματος Σπουδών «Μεταπτυχιακές σπουδές στα Μαθηματικά» ΜΣΜ. Από τα πρώτα οργανωμένα μεταπτυχιακά προγράμματα σπουδών Ελληνικών Πανεπιστημίων για τα μαθηματικά, προσφέρεται από το 2006 από το ΕΑΠ, με στόχο την κάλυψη των αναγκών της μαθηματικής κοινότητας για αναβάθμιση των γνώσεων και συνέχιση των σπουδών σε μεταπτυχιακό επίπεδο. Το πρόγραμμα ΜΣΜ, υπηρετεί το σκοπό αυτό προσφέροντας δύο κατευθύνσεις. Η μία οδηγεί σε ειδίκευση με έμφαση στην ιστορική εξέλιξη και διδακτική των μαθηματικών, ενώ η δεύτερη σε ειδίκευση με έμφαση στη μαθηματική προτυποποίηση και τις εφαρμογές των Μαθηματικών στις επιστήμες και την τεχνολογία.

Στα μεταπτυχιακά προγράμματα, η διδακτική των μαθηματικών εστιάζει στις θεωρίες μάθησης της γνωστικής ψυχολογίας. Το πρόγραμμα αυτό, συμπληρώνει τη διάσταση αυτή με τη συνιστώσα της ιστορικής εξέλιξης των μαθηματικών εννοιών και της φιλοσοφίας των μαθηματικών, διευρύνοντας έτσι το θεωρητικό υπόβαθρο των μεταπτυχιακών φοιτητών στα αντίστοιχα επιστημονικά πεδία, συνεισφέροντας στη βαθύτερη κατανόηση της σύλληψης, της κατασκευής, και λειτουργίας των μαθηματικών εννοιών και οντοτήτων.

Η δεύτερη κατεύθυνση του προγράμματος, ακολουθεί μια διαφορετική προσέγγιση, που απορρέει από τις σύγχρονες τάσεις και απόψεις, οι οποίες θεωρούν σημαντική την ενσωμάτωση της μαθηματικής μοντελοποίησης στη μαθηματική εκπαίδευση. Η μαθηματική μοντελοποίηση περιγράφεται ως η διαδικασία μέσω της οποίας ένα φυσικό φαινόμενο περιγράφεται με «μαθηματική γλώσσα» και διατυπώνεται ως μαθηματικό πρόβλημα. Στη συνέχεια εφαρμόζονται μαθηματικές θεωρίες, μέθοδοι και τεχνικές για να μελετηθεί και επιλυθεί αναλυτικά ή αριθμητικά. Η ενσωμάτωση αυτής της προσέγγισης στο πρόγραμμα, συνεισφέρει στην καλλιέργεια της μαθηματικής σκέψης, και της ερευνητικής αναζήτησης, αναβαθμίζει τις μαθηματικές γνώσεις των μεταπτυχιακών φοιτητών, και τους εφοδιάζει με μεθοδολογικά εργαλεία και δεξιότητες αξιοποιήσιμες εκπαιδευτικά αλλά και ερευνητικά, μέσω εκπόνησης εργασιών και διδακτορικών διατριβών.

Η μεθοδολογία και οι αρχές της Ανοικτής και εξ Αποστάσεως εκπαίδευσης εξυπηρετούν τους σκοπούς του προγράμματος, παρέχοντας το κατάλληλο πλαίσιο.

## Abstract

The aim, the philosophical base, the context and the methodology of mathematics education within the framework of Open and Distance Learning for the Graduate Course «Studies in Mathematics», are presented and discussed.

The structure of this programme in modules, along with its learning objectives will also be described.

This Course is, in fact, one of the firstly organised graduate courses in Mathematics, offered by the Hellenic Open University since 2006, aspiring to meet the needs of the Greek mathematical community for continuum education and lifelong learning.

In general, Mathematics education focuses in the learning theories and the results of the cognitive psychology. The HOU Programme complements this approach with the prospective of the historical development and the philosophy of Mathematics. In addition, it also gives a different perspective that employs the mathematical modeling in mathematics education. The mathematical modelling is a process, through which a physical phenomenon is described in the mathematical language and formulated as a mathematical model. Then, mathematical methods and techniques are employed to study and solve analytically or numerically the problem. Finally, the evaluation of the model provides the acceptance or the improvement of the model.

Both of these perspectives integrate into a Graduate Programme on Mathematics that is addressed to Mathematicians involved in higher education, but also to those that they will be engaged in the field of Applied Mathematics and Mathematical research.

Taking into account the quantitative and qualitative indices of the programme, we will present a review of its major components within the frame of distance education.

## Keywords

*Distance learning, mathematics education, graduate course in Mathematics, mathematical modelling.*

## Το Πρόγραμμα Σπουδών : Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά.

### 1. Θεωρητικό υπόβαθρο.

Τα τελευταία χρόνια, το θέμα της μοντελοποίησης και η χρήση παραδειγμάτων του πραγματικού κόσμου, στη μαθηματική εκπαίδευση, απασχολεί ολοένα και περισσότερο τη διεθνή μαθηματική κοινότητα αναδεικνύοντας τη μεγάλη σημασία τους. Επιστήμονες όπως οι W. Blum et al. (Blum et.al., 2002) G. Kaiser & Schwartz (Kaiser, G & Schwartz, B. 2006), θεωρούν ότι ο πραγματικός κόσμος ως πλαίσιο και η μοντελοποίηση, συνθέτουν μια απαραίτητη συνιστώσα της σε βάθος και έκτασης κατανόησης των μαθηματικών εννοιών. Η προσέγγιση αυτή διαφοροποιείται σημαντικά από την επικρατούσα σε μεγάλο βαθμό άποψη, η οποία εστιάζει αποκλειστικά στη διαδικασία της διδασκαλίας και της μάθησης. Σύμφωνα με αυτή, η εκπαίδευση βασίζεται στο «διδακτικό τρίγωνο» του μαθητή – δασκάλου - αντικειμένου μάθησης, εν προκειμένω μαθηματικά, (αλλά και οτιδήποτε άλλο), αναλύει, ως κυρίαρχο, τον ανθρώπινο παράγοντα στη διαδικασία της μάθησης, εντάσσοντας τη διδακτική των μαθηματικών στις ανθρωπιστικές επιστήμες. (Chevallard 1985/1991). Στο πρόγραμμα Μεταπτυχιακές σπουδές στα Μαθηματικά, η κλασική αυτή θεώρηση, συμπληρώνεται με την μελέτη της ιστορικής εξέλιξης των μαθηματικών εννοιών και τη φιλοσοφία των μαθηματικών.

Από την άλλη μεριά, η ένταξη της «μαθηματικής μοντελοποίησης» στη διδασκαλία των μαθηματικών, δεν θα πρέπει να εκφυλιστεί σε απλή παράθεση παραδειγμάτων από τον πραγματικό κόσμο, αλλά να αναγνωριστεί ως διαδικασία συμφωνίας με αυτά.

Τα μαθηματικά βασίζονται σε αντικειμενικές αρχές (αξιώματα) και, μέσω της λογικής και των αποδείξεων, ερμηνεύουν τις ιδιότητες του περιβάλλοντος φυσικού κόσμου, και επομένως είναι σε θέση να τις ανακαλύπτουν και να τις εκφράζουν. Μαθηματική μοντελοποίηση, είναι η διαδικασία της κατασκευής μιας μαθηματικής αναπαράστασης κάποιου «φυσικού» φαινομένου, με πρωταρχικό σκοπό τη σε βάθος κατανόησή του. Ξεκινά με την περιγραφή, σε μαθηματική γλώσσα, των φυσικών μηχανισμών και νόμων, που διέπουν το φαινόμενο, και έχει ως αποτέλεσμα τη διατύπωση του ως μαθηματικό πρόβλημα. Στη συνέχεια χρησιμοποιεί μαθηματικές θεωρίες, μεθόδους και τεχνικές με σκοπό τη μελέτη, την ανάλυση και την ακριβή ή προσεγγιστική επίλυση του. Τέλος, ακολουθεί ο έλεγχος της αξιοπιστίας του μοντέλου και η αποδοχή ή η βελτίωση του.

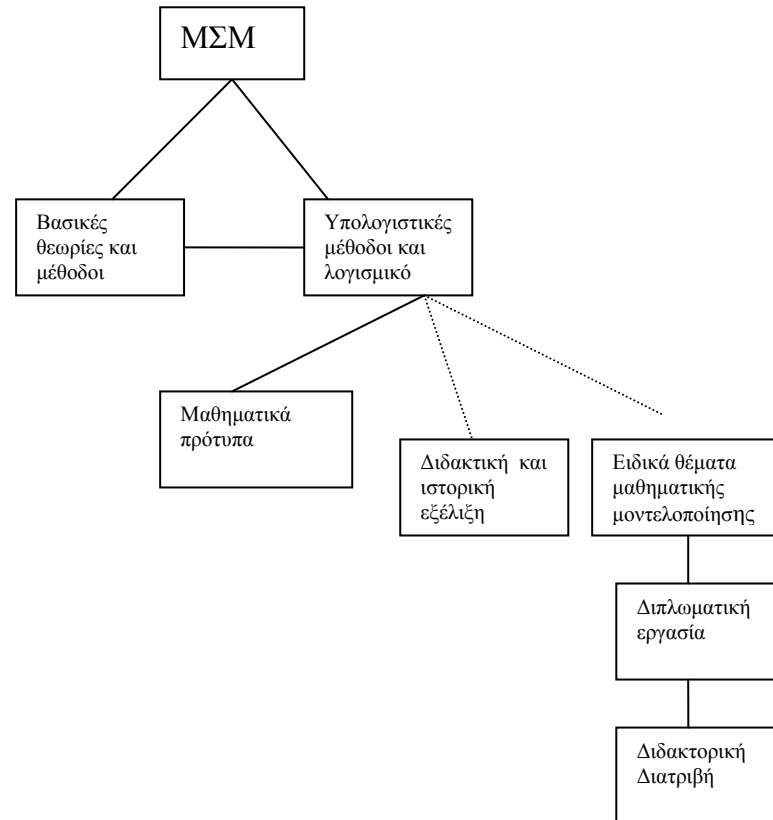
Για τις θετικές επιστήμες και την τεχνολογία είναι γνωστό ότι τα Μαθηματικά αποτελούν τη μοναδική και αναντικατάστατη γλώσσα διατύπωσης, επικοινωνίας και εφαρμογής νόμων, μεθόδων και αλγοριθμικών διαδικασιών. Εκείνο που είναι λιγότερο γνωστό, και που γίνεται συνεχώς όλο και πιο αποδεκτό, είναι ότι ακόμη και για επιστήμες που πιστεύαμε ότι δεν απαιτούν μαθηματικές γνώσεις, η μαθηματική σκέψη που καλλιεργείται, βοηθά στο να αντιμετωπιστούν τα προβλήματα σε ένα υψηλότερο και βαθύτερο επίπεδο κατανόησης μέσω της μοντελοποίησης.

Επιστήμες όπως η Φυσική, η Βιολογία, η Ιατρική, η Γεωλογία, η Χημεία, η Οικονομία, η Κοινωνιολογία, οι Πολιτικές Επιστήμες, η Γλωσσολογία, καθώς και τεχνολογικοί κλάδοι όπως η Πληροφορική, οι Τηλεπικοινωνίες, η επιστήμη των Υλικών, η Βιοτεχνολογία, ή οι τεχνολογικές εφαρμογές για την προστασία του περιβάλλοντος, αποτελούν μερικούς μόνο τομείς, πεδία εφαρμογής Μαθηματικής Μοντελοποίησης.

Και οι δυο προσεγγίσεις εξυπηρετούν τους σκοπούς του Προγράμματος Σπουδών του ΕΑΠ: «Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά». Ο σκοπός, η φιλοσοφία, οι αρχές, το περιεχόμενο και το πλαίσιο λειτουργίας του, παρουσιάζονται και αναλύονται στη συνέχεια.

## **2. Σκοπός και δομή**

Σκοπός του Προγράμματος «Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά» είναι η εξειδίκευση πτυχιούχων μαθηματικών που ασχολούνται ή πρόκειται να ασχοληθούν με τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση αλλά και αυτών που θέλουν να ασχοληθούν με τις εφαρμογές των Μαθηματικών στις άλλες επιστήμες καθώς και με την μαθηματική έρευνα στις αντίστοιχες περιοχές. Για την εξυπηρέτηση του στόχου αυτού, το πρόγραμμα έχει σχεδιαστεί και διαρθρώνεται ως εξής.



Στο πρώτο έτος, κατακτώνται ενιαία οι απαραίτητες μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες που εξασφαλίζουν την απρόσκοπτη συνέχιση της μαθηματικής ενασχόλησης των μεταπτυχιακών φοιτητών. Αυτές αφορούν μαθηματικές θεωρίες, μεθόδους ανάλυσης, γραμμικής Άλγεβρας και στοχαστικών διαδικασιών, καθώς επίσης υπολογιστικές μεθόδους και μαθηματικό λογισμικό το οποίο πρόκειται να αξιοποιηθεί από τους φοιτητές είτε για την ανάπτυξη εκπαιδευτικών εφαρμογών, είτε για την επίλυση, διερεύνηση αξιολόγηση και οπτικοποίηση λύσεων των μαθηματικών προτύπων.

Στο δεύτερο έτος, οι φοιτητές εισάγονται στη μαθηματική μοντελοποίηση μέσω διαφορικών και ολοκληρωτικών τελεστών, φυσικών φαινομένων και προβλημάτων, όπως η ροή θερμότητας ή μάζας, το δυναμικό, η κυματική διάδοση. Χρησιμοποιούν θεωρήματα και μεθόδους συναρτησιακής ανάλυσης για να ελέγξουν την καλή τοποθέτηση του προβλήματος, την ύπαρξη, και ευστάθεια των λύσεων.

Ακολουθούν οι Θεματικές Ενότητες (ΘΕ) επιλογής, οι οποίες αφορούν: η μία στην περεταίρω ενασχόληση με θέματα μαθηματικής φυσικής, μηχανικής του συνεχούς μέσου, καθώς και θέματα βιοϊατρικών επιστημών, ενώ η άλλη τις θεωρίες και τα ερευνητικά αποτελέσματα της γνωσιακής επιστήμης που αφορούν στη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών. Η κατεύθυνση της ανάλυσης μαθηματικών προτύπων επιτυγχάνεται με την επιλογή της πρώτης ΘΕ από τις δυο προσφερόμενες, ενώ η κατεύθυνση της διδακτικής μέσω της δεύτερης.

Στο επόμενο έτος οι φοιτητές εκπονούν τη Διπλωματική τους εργασία σε περιοχές που άπτονται των ενδιαφερόντων τους και αποτελούν συνέχεια της θεματικής επιλογής τους. Οι διπλωματικές εκπονούνται στα πλαίσια του ειδικού εσωτερικού κανονισμού εκπόνησης διπλωματικών εργασιών του προγράμματος. Ο χαρακτήρας τους μπορεί να είναι είτε συνθετικής, κριτικής παρουσίασης είτε αμιγώς ερευνητικός.

Στους αποφοίτους του μεταπτυχιακού προγράμματος ΜΣΜ, δίνεται η δυνατότητα εκπόνησης διδακτορικής διατριβής σε θέματα μαθηματικών προτύπων, περιοχής ερευνητικής δραστηριότητας των δύο μαθηματικών μελών ΔΕΠ του ΕΑΠ.

Αναλυτικότερα, η διάρθρωση του προγράμματος έχει ως εξής. Στο Α' έτος, προσφέρονται οι Θεματικές Ενότητες:

## 1. ΒΑΣΙΚΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, ΜΣΜ50

Το περιεχόμενό της ΘΕ αφορά σε ανάλυση των θεμελιωδών εννοιών των βασικών αποδεικτικών μεθόδων καθώς και την συσχέτιση των κεντρικών θεωριών στην Μαθηματική Επιστήμη. Επίσης εισάγονται βασικές μαθηματικές τεχνικές με τις οποίες αναλύονται τα διάφορα μαθηματικά πρότυπα. Αυτό αφορά σε τεχνικές επίλυσης διαφορικών εξισώσεων, σε στοιχειώδη ασυμπτωτική ανάλυση, σε στατιστική ανάλυση δεδομένων και σε τεχνικές που απορρέουν από την θεωρία της Γραμμικής Άλγεβρας. Με την ολοκλήρωση αυτής της ΘΕ, ΜΣΜ50 ο φοιτητής θα είναι σε θέση να γνωρίζει και να κατανοεί τα βασικά θεωρήματα της Ανάλυσης και της Γραμμικής Άλγεβρας, να χρησιμοποιεί τα εργαλεία της Γραμμικής Άλγεβρας στην μοντελοποίηση φυσικών προβλημάτων, στην επίλυση γραμμικών συστημάτων διαφορικών εξισώσεων, στη μελέτη αλυσίδων Markov, στον γραμμικό προγραμματισμό, κα. Τέλος, θα είναι σε θέση να γνωρίζει βασικές έννοιες της Θεωρίας Πιθανοτήτων, να κάνει υπολογισμούς και να εφαρμόζει την Θεωρία στην μοντελοποίηση προβλημάτων. Συνοψίζοντας, η επιτυχής ολοκλήρωση της Θεματικής ενότητας ΜΣΜ50 παρέχει στο φοιτητή τη δυνατότητα να αποκτήσει γνώση και κατανόηση βασικών μαθηματικών θεωριών και να εφοδιαστεί με τις μαθηματικές γνώσεις που είναι απαραίτητες για να παρακολουθήσει τις άλλες θεματικές ενότητες του προγράμματος,

## 2. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΚΑΙ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΣΜ61

Στην ενότητα αυτή, γίνεται εισαγωγή στην κωδικοποιημένη μαθηματική γνώση και τη χρήση μαθηματικών υπολογιστικών πακέτων και τεχνολογιών πληροφόρησης για παραγωγή υλικού που εξυπηρετεί τόσο στην μαθηματική προτυποποίηση όσο και στην παραγωγή εκπαιδευτικών εφαρμογών για χρήση και υποβοήθηση της διδασκαλίας. Τα μαθησιακά αποτελέσματα αφορούν στην κατανόηση, γνώση των αρχών δημιουργίας εκπαιδευτικού λογισμικού την ανάπτυξη δεξιοτήτων στη χρήση του λογισμικού πακέτου Mathematica και στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων που προκύπτουν από τη μαθηματική μοντελοποίηση. Η επιτυχής ολοκλήρωση της ΘΕ ΜΣΜ61 επιτρέπει στο φοιτητή να χρησιμοποιεί αναλυτικές και αριθμητικές μεθόδους επίλυσης συνήθων και μερικών διαφορικών εξισώσεων. Επίσης, θα μπορεί να χρησιμοποιεί μεθόδους της διαστατικής ανάλυσης και της θεωρίας διαταραχών για τη μελέτη προβλημάτων, που είναι αδύνατη με άλλες μεθόδους. Θα μπορεί επίσης να αξιοποιεί μεθόδους της θεωρίας των μεταβολών με επίλυση προβλημάτων ακρότατων για συναρτησιακά. Συνοψίζοντας θα μπορεί να μελετάει και να επιλύει προβλήματα των φυσικών επιστημών με ποικίλες μεθόδους των εφαρμοσμένων μαθηματικών, να αξιοποιεί τα υπολογιστικά πακέτα στη διδασκαλία αλλά και στην έρευνα., να οργανώνει και να χρησιμοποιεί τη γνώση που αποκτά στην επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων αλλά και στην εκπαιδευτική διαδικασία και διδασκαλία.

Στο Β' έτος προσφέρεται η υποχρεωτική ενότητα:



### 3. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΤΥΠΑ ΣΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ. ΜΣΜ60.

Το περιεχόμενο της ΘΕ αυτής εντάσσεται στο χώρο των μαθηματικών προτύπων και δίνει έμφαση στην ανάλυση και μεθοδολογική αντιμετώπιση προτύπων από τις φυσικές επιστήμες, όπως το δυναμικό σε κατάσταση ισορροπίας, η διάχυση μιας ουσίας, η κυματική διάδοση κ.λπ. Στη μαθηματική τους διατύπωση, οι νόμοι και οι φυσικές διαδικασίες περιγράφονται με διαφορικούς ή ολοκληρωτικούς τελεστές. Η επίλυση σχετικών προβλημάτων χρησιμοποιεί μεθόδους όπως ο Χωρισμός των μεταβλητών, η εύρεση της θεμελιώδους λύσης του διαφορικού τελεστή κ.α. Εφαρμόζονται θεωρήματα συναρτησιακής ανάλυσης για να μελετηθούν τα χαρακτηριστικά και οι ιδιότητες των τελεστών, η καλή τοποθέτηση του προβλήματος, η ύπαρξη, μοναδικότητα, και ευστάθεια της λύσης. Ο φοιτητής αποκτά δεξιότητες στη μαθηματική διατύπωση ενός φυσικού προβλήματος, στην επιλογή της κατάλληλης μεθόδου επίλυσής του και στην αξιολόγηση των αποτελεσμάτων. Συνοψίζοντας, η επιτυχής ολοκλήρωση της Θεματικής ενότητας ΜΣΜ60 παρέχει στο φοιτητή τη δυνατότητα να αντιλαμβάνεται να συνδέει και να ποσοτικοποιεί ένα φυσικό πρόβλημα με τις μαθηματικές οντότητες, όπως οι τελεστές, να οργανώνει και να χρησιμοποιεί τη γνώση που αποκτά στην επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων. Να χρησιμοποιεί τις γνώσεις του και τις δεξιότητες του για περεταίρω μελέτη και έρευνα.

Η κατεύθυνση των μαθηματικών προτύπων ολοκληρώνεται με την επιλογή της ΘΕ:

### 4. ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΣΜ62

Το περιεχόμενο αυτής της ΘΕ αφορά σημαντικές εφαρμογές μοντελοποίησης σε προβλήματα μαθηματικής φυσικής, βιοϊατρικών επιστημών και μηχανικής του συνεχούς μέσου και αποτελεί το επιστέγασμα της κατεύθυνσης των μαθηματικών προτύπων. Περιγράφονται μαθηματικά οι κυρίαρχοι μηχανισμοί φυσικών και βιολογικών φαινομένων, όπως η ροή ρευστών σε πορώδη, η μη, μέσα, διαδικασίες μεταφοράς θερμότητας και μάζας, η σκέδαση ακουστικών, ελαστικών ηλεκτρομαγνητικών κ.α κυμάτων, η ροή αίματος, οι ηλεκτροχημικοί παλμοί των νευρών, η ανάπτυξη καρκινικών όγκων.. Η μαθηματική προτυποποίηση των «φαινομένων αυτών» χρησιμοποιεί τανυστικές ποσότητες για τη διατύπωση των αντίστοιχων προβλημάτων. Στη συνέχεια εφαρμόζονται αναλυτικές μέθοδοι της που μελετήθηκαν στην ΜΣΜ60 (π.χ. χωρισμό μεταβλητών, τεχνικές επίλυσης ολοκληρωτικών εξισώσεων αλλά και νέες, μέθοδοι διαταραχών, λογισμός μεταβολών κ.α.) για την αντίστοιχων μαθηματικών προβλημάτων. Από την παραμετρική μελέτη εξάγονται χρήσιμα συμπεράσματα για την ευστάθεια και ακρίβεια του μοντέλου. Με τη χρήση μαθηματικών υπολογιστικών πακέτων (π.χ. Mathematica, MAtlab, κ.α.) επιβεβαιώνονται τα παραγόμενα αποτελέσματα, γίνονται προβλέψεις και αναπτύσσεται ή βελτιώνεται το μαθηματικό πρότυπο. Η επιλογή αυτής της Θεματικής Ενότητας παρέχει στο φοιτητή δεξιότητες για εφαρμογή μαθηματικών μεθόδων στην προτυποποίηση διεργασιών διάφορων επιστημονικών πεδίων και προσφέρει κίνητρα για εκπόνηση έρευνας στα πεδία αυτά. Επίσης του δίνει δυνατότητα να παρουσιάζει μια επιστημονική εργασία ή αποτέλεσμα σε επιστημονικό κοινό ή σε λιγότερο εξειδικευμένο κοινό, δεξιότητα να επικοινωνεί με επιστήμονες και μηχανικούς διάφορων ειδικοτήτων. η εμπλοκή του στη διαδικασία της μοντελοποίησης του προσφέρει μια διαφορετική οπτική και προσέγγιση της πραγματικού κόσμου και των δυνατοτήτων του.

Εναλλακτικά στην προηγούμενη επιλογή, η κατεύθυνση της διδακτικής υπηρετείται από την επιλογή της παρακάτω ΘΕ:

##### 5. ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΜΣΜ51

Η ΘΕ πραγματεύεται θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών, και ασχολείται με τη μελέτη τρόπων και μεθόδων διδακτικής και κατανόησης των μαθηματικών εννοιών. Μελετώνται πρόσφατες θεωρίες και ερευνητικά αποτελέσματα της γνωσιακής επιστήμης που αφορούν στη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών θέματα Ιστορίας των Μαθηματικών αναλύονται με τρόπο που να αντλούνται πληροφορίες σχετικά με την διαδικασία με την οποία αποδέχεται, κατανοεί και παράγει Μαθηματικά ο ανθρώπινος εγκέφαλος. Αυτό βοηθά στην ανάπτυξη μεθόδων μέσω των οποίων μπορεί ο μαθηματικός να μεταδώσει την μαθηματική γνώση. Ολοκληρώνοντας επιτυχώς τη ΘΕ, οι φοιτητές θα είναι σε θέση να κατανοούν εξελικτικές, διδακτικές και φιλοσοφικές ερμηνείες της γνώσης. Συγκεκριμένα, θα μπορούν να αντιλαμβάνονται τις διάφορες ψυχολογικές απόψεις που εμπλέκονται στη διδασκαλία των μαθηματικών, να κατανοούν τις θεωρίες της εξέλιξης της γνώσης των μαθηματικών εννοιών καθώς και την εφαρμογή τους στη διδασκαλία και τη μάθηση. Θα είναι σε θέση επίσης να κατανοήσουν τη σχέση μεταξύ της λειτουργίας του εγκεφάλου και σημαντικές πτυχές της νόησης, της αλγοριθμικής σκέψης το πως αυτό εκφράζεται στο πεδίο της γνωσιακής επιστήμης και την εφαρμογή τους στη διδασκαλία. Θα μπορούν να συζητούν τα πλεονεκτήματα και τις αδυναμίες της γνωσιακής νευροεπιστήμης και της γνωσιακής ψυχολογίας όπως και τις προσεγγίσεις για τη γνωσιακή μοντελοποίηση. Στόχο επίσης αποτελεί η εξοικείωση με βασικές έννοιες που αφορούν στην έρευνα για μάθηση, την ευφυΐα και την εγκεφαλική δραστηριότητα αλλά και η καλλιέργεια δυνατοτήτων, ώστε να εξετάζουν κριτικά τις επιπτώσεις της έρευνας στο πεδίο της γνωσιακής νευροεπιστήμης σχετικά με την εφαρμογή τους στην τάξη.

Μετά την ολοκλήρωση των τεσσάρων ΘΕ, η εκπαίδευση ολοκληρώνεται με την εκπόνηση διπλωματικής εργασίας.

##### 6. ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Στόχο της διπλωματικής εργασίας αποτελεί η σύνθεση των γνώσεων που απέκτησε ο φοιτητής κατά τη διάρκεια των σπουδών του. Τα θέματα των ΔΕ μπορούν να είναι θέματα μαθηματικής εκπαίδευσης ή θέματα από την Μαθηματική Επιστήμη και τις Εφαρμογές της. Στα πέντε χρόνια λειτουργίας του προγράμματος έχουν εκπονηθεί 62 ποιοτικές διπλωματικές εργασίες που αφορούν στις ως άνω περιοχές και μπορούν να διαχωριστούν σε τρεις κατηγορίες: Η πρώτη είναι τα « *Μαθηματικά και εκπαίδευση* ». Οι διπλωματικές εδώ, αφορούν θεωρίες της μαθηματικής εκπαίδευσης καθώς και εφαρμογές που χρησιμοποιούνται για τη μαθηματική εκπαίδευση, για παράδειγμα ανάπτυξη mathlets κλπ. Ενδεικτικά αναφέρονται οι εργασίες με τίτλο: Η γνωσιακή επιστήμη για τα Μαθηματικά, Χρήση υπολογιστικών πακέτων για τη διδασκαλία των Μαθηματικών, Τα Mathlets στη Μαθηματική Εκπαίδευση, Μαθηματικά μοντέλα για τη διαδικασία της μάθησης, Ασαφή συμπερασματικά μοντέλα και εφαρμογή στην διαγνωστική αξιολόγηση των μαθηματικών. Η δεύτερη αφορά επεξεργασία θεωρητικών θεμάτων υπό τον τίτλο « *Μαθηματικές θεωρίες* ». Οι εργασίες αυτής της ενότητας πραγματεύονται θεωρητικά θέματα άλγεβρας ανάλυσης και γεωμετρίας. Ενδεικτικοί τίτλοι διπλωματικών εργασιών που εκπονήθηκαν στην περιοχή αυτή



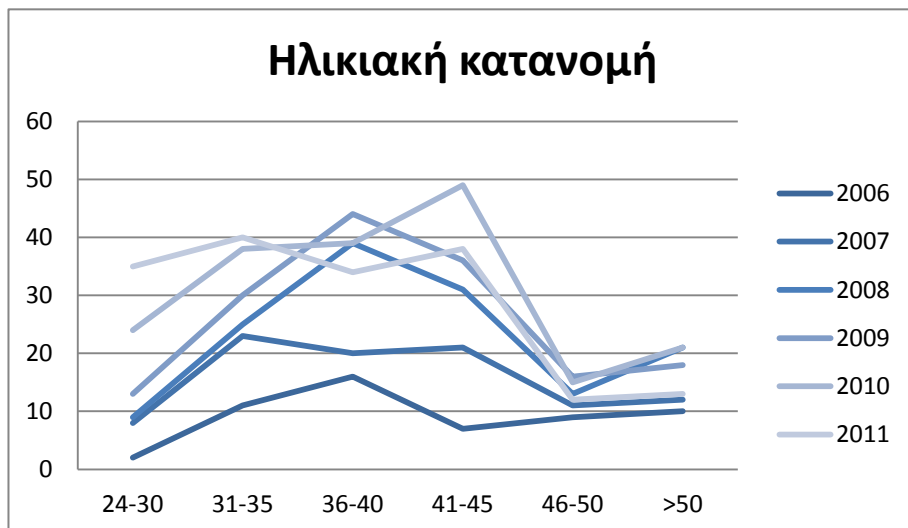
είναι: Συναρτήσεις Green για προβλήματα δυναμικού και κυματικής διάδοσης. Μελέτη έρπουσας ροής σε αξονοσυμμετρικά συστήματα συντεταγμένων, Θεωρία γραφημάτων: χρωματισμοί - επίπεδα γραφήματος - θεωρία Ramsey Πληθαρριθμικά αναλλοίωτα τυπολογικών χώρων-Μετρηκοποιήσιμοι τοπολογικοί χώροι, Η νηματοποίηση του Hopf. Τέλος η τρίτη κατηγορία αφορά στα «*Μαθηματικά και εφαρμογές*» Στο πλαίσιο αυτό μελετώνται ή αναπτύσσονται . μαθηματικά πρότυπα στις φυσικές επιστήμες, στην οικονομία, στη βιολογία, στην ιατρική, καθώς και στην τεχνολογία και στις επιστήμες του μηχανικού. Ενδεικτικοί τίτλοι σε αυτή την κατηγορία είναι: Νευρωνικά δίκτυα προσομοίωσης του ανθρώπινου εγκεφάλου Μελέτη της μη αγγειακής καρκινικής ανάπτυξης μέσω ενός πεπλατυσμένου σφαιροειδούς προτύπου. Μαθηματική προτυποποίηση μέσω προβλημάτων ελευθέρου συνόρου, Μαθηματικά μοντέλα ανάπτυξης καρκινικών όγκων, Σκέδαση ακουστικών κυμάτων από ομαλούς σκεδαστές και εφαρμογές με το υπολογιστικό πακέτο Mathematica, εισαγωγή στη στοχαστική χρηματοοικονομική ανάλυση ο τύπος των Black-Scholes, κα. Αξίζει να σημειωθεί στο σημείο αυτό, ότι μέρος των διπλωματικών εργασιών έχουν παρουσιαστεί σε συνέδρια, έχουν αξιοποιηθεί από φορείς, αλλά επίσης έχουν αποτελέσει κίνητρο και βάση περεταίρω ερευνητικής προσπάθειας. Αυτό εκφράζεται με συνέχιση, αποφοίτων του προγράμματος, για εκπόνηση διδακτορικής διατριβής στο ΕΑΠ ή σε άλλα Πανεπιστήμια.

Κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της ΔΕ, οι φοιτητές εκτός από την στενή συνεργασία τους με του επιβλέποντες, για λόγους ομοιογένειας στην ποιότητα, αλλά και για λόγους διαφάνειας της εκπόνησης, καθώς και παρακολούθησης της πορείας της, καλούνται να παρουσιάσουν σε ενδιάμεση χρονική στιγμή την πρόοδο τους σε δημόσια συνεδρίαση της επιτροπής Προγράμματος σπουδών και των μεταπτυχιακών φοιτητών. Η πρακτική αυτή έχει αποδειχθεί εξαιρετικά αποτελεσματική και χρήσιμη, καθώς επιτρέπει στο φοιτητή μια πρώτη δημόσια έκθεση της δουλειάς του και τη λήψη τυχόν διορθωτικών μέτρων. Κρατά δε το φοιτητή σε επαφή με το πρόγραμμα και την ομάδα, και βοηθά στον χρονικό συντονισμό του.

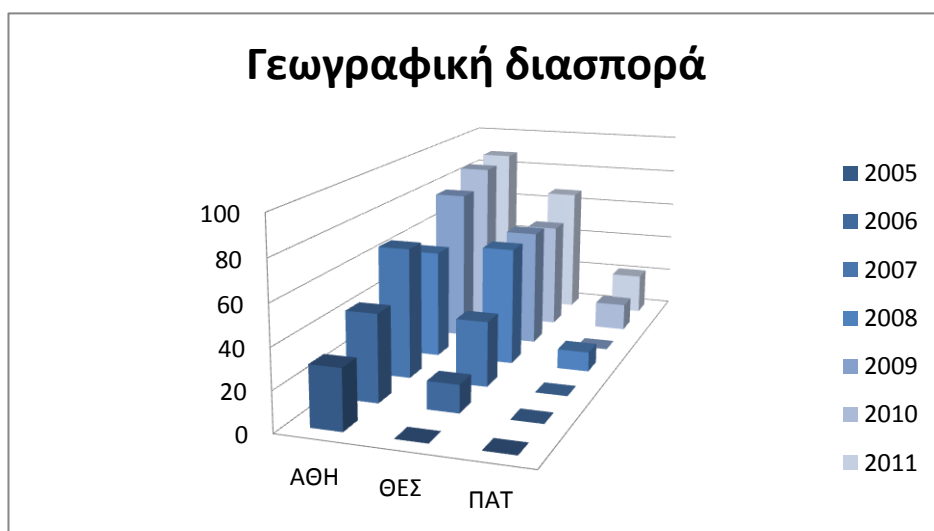
### 3. Ποσοτικά και ποιοτικά χαρακτηριστικά.

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα παρακάτω στοιχεία που αφορούν στο πρόγραμμα για τη συνολική διάρκεια που προσφέρεται (2006-σήμερα). Σύμφωνα με αυτά, υπάρχει μια σταθερά μεγάλη ζήτηση για το πρόγραμμα. Κατά μέσο όρο, η αναλογία εγγεγραμμένων προς αιτούντες είναι 1:8. Το ποσοστό εγκατάλειψης φτάνει το 16% ενώ το ποσοστό αποφοίτησης είναι 76%. Οι εγκαταλείψεις συμβαίνουν κύρια στο πρώτο έτος σπουδών, ενώ όσοι συνεχίζουν αποφοιτούν επιτυχάνοντας στις εξετάσεις, είτε κανονικά, είτε επαναλαμβάνοντας την ενότητα. Το γεγονός αυτό οφείλεται στην αποφασιστικότητα, αυτοδέσμευση και επιμονή των φοιτητών την προσήλωση στο στόχο τους αλλά και στην καθοριστική υποστήριξη τους, από τους Συμβούλους καθηγητές τους, όπως και οι ίδιοι οι φοιτητές αναφέρουν.

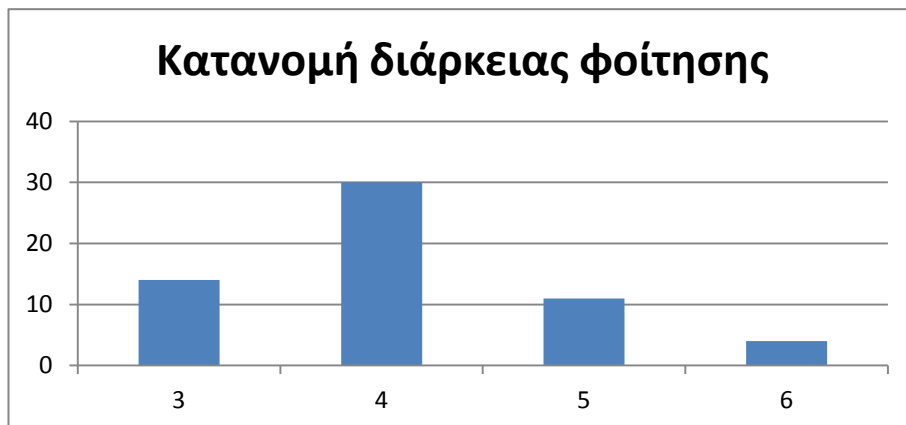
Σχετικά με την ηλικιακή κατανομή των μεταπτυχιακών φοιτητών, και όπως απεικονίζεται και στο διάγραμμα, το μεγαλύτερο πλήθος των φοιτητών ανήκει στην ηλικιακή κατηγορία των 30-45 ετών, με ευχάριστες παρουσίες σε μικρότερες και μεγαλύτερες τιμές, με ακρότατα τις ηλικίες των 24 και 49 ετών.



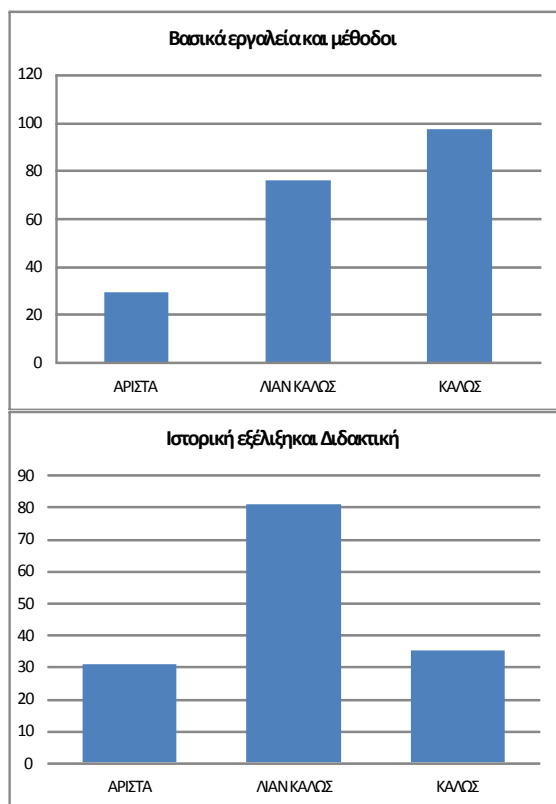
Η κατανομή των φοιτητών στα τμήματα με έδρα τα μεγάλα αστικά κέντρα, παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα και είναι ανάλογη του πληθυσμού των περιοχών αυτών. Αξίζει να σημειωθεί ότι σε αυτά εντάσσονται φοιτητές από όλη την Ελλάδα.

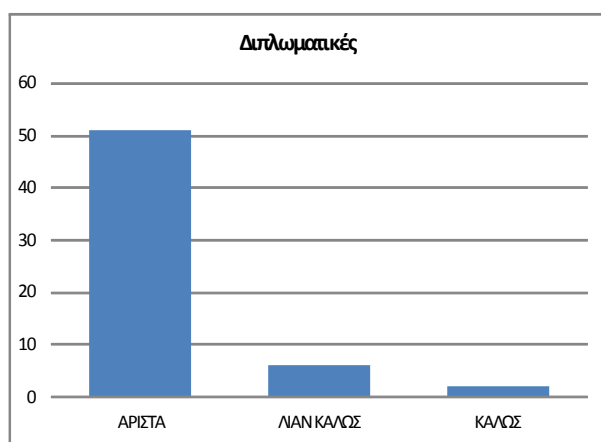
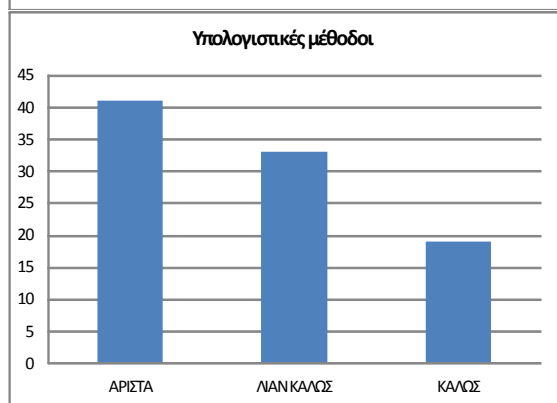
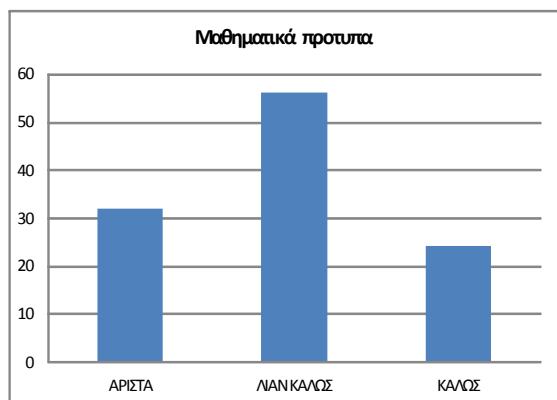


Με δεδομένο τον κανονισμό του ΕΑΠ, που δεν επιτρέπει την παρακολούθηση πάνω από δύο ΘΕ το χρόνο, αλλά και το φόρτο μελέτης και εργασίας που απαιτούν οι ΘΕ, καθώς και τον προσωπικό χρόνο των φοιτητών, προκύπτει από τα διαθέσιμα στοιχεία, ότι το μεγαλύτερο μέρος των φοιτητών ολοκληρώνει τις σπουδές του σε τέσσερα έτη ενώ δεν ξεπερνάει τα έξι.



Οι επιδόσεις των φοιτητών κατά τις εξετάσεις φαίνονται παρακάτω. Παρατηρείται ότι στην πρώτη Θεματική Ενότητα που έχει ως στόχο την εμβάθυνση σε θεμελιώδεις μαθηματικές έννοιες και είναι γενική, μεγάλο ποσοστό των επιδόσεων των φοιτητών ανήκουν στην κατηγορία «καλώς» και «λίαν καλώς», γεγονός που ερμηνεύεται και ως προσαρμογή στο σύστημα της ΑεξΑΕ. Στις επόμενες Θεματικές Ενότητες που ο βαθμός εξοικείωσης με το σύστημα αυξάνει και το περιεχόμενο εξειδικεύεται, οι επιδόσεις μετατοπίζονται σταδιακά (ακολουθώντας τη χρονική σειρά επιλογής) στην κλίμακα «λίαν καλώς» και «άριστα», για να κορυφωθεί στη ΘΕ των Διπλωματικών εργασιών με ποσοστό 86%, στην κλίμακα του «άριστα», γεγονός που αντανακλά την υψηλή ποιότητα και το επίπεδο των διπλωματικών εργασιών, που τεκμηριώνεται με σχετικές δημοσιεύσεις και τη συνέχιση της έρευνας.





Η ομάδα διδασκόντων στο πρόγραμμα αποτελείται από δύο μέλη ΔΕΠ, του ΕΑΠ με αντικείμενο Γενικά Μαθηματικά και Μαθηματικά πρότυπα στις Φυσικές Επιστήμες αντίστοιχα, και έξι έως οκτώ μέλη Συνεργαζόμενου Εκπαιδευτικού Προσωπικού (Σ.Ε.Π.) που είναι μέλη ΔΕΠ άλλων Πανεπιστημίων. Συναντώνται συχνά στα πλαίσια των συνεδριάσεων της επιτροπής προγράμματος σπουδών, διαμορφώνοντας κοινή αντίληψη για το περιεχόμενο και το επίπεδο του προγράμματος. Η ομοιογένεια των απόψεων και στάσεων τους έχει ως αποτέλεσμα την καλή λειτουργία του προγράμματος, την υψηλή ποιότητα των σπουδών, ενώ παράλληλα, παρέχει στους φοιτητές εμπιστοσύνη στο θεσμό και αίσθημα δικαίου. Μεριμνούν διαρκώς για την ποιότητα της παρεχόμενης εκπαίδευσης, σχεδιάζοντας και διατυπώνοντας προτάσεις που αφορούν στη βελτίωση των συνιστωσών του προγράμματος. Αναφορικά, έχουν υποβληθεί για παράδειγμα προτάσεις συμπλήρωσης υλικού, ή δημιουργίας νέου, (έντυπου και εναλλακτικού, όπως

βιντεοσκοπημένες διαλέξεις καταξιωμένων επιστημόνων, webcast κ.λπ.), προτάσεις που αφορούν παράλληλες δραστηριότητες, όπως την ίδρυση μαθηματικού σπουδαστηρίου και εργαστηρίου μαθηματικού λογισμικού.

Ο συμβουλευτικός και καθοδηγητικός ρόλος των διδασκόντων, που δεν εξαντλείται στην τυπική άσκηση των καθηκόντων τους, έχει σημαντική θετική επίδραση στο βαθμό εμπλοκής των φοιτητών στο πρόγραμμα, στην ποιότητα των γνώσεών, τη θετική στάση τους για τις σπουδές τους και την έρευνα, τις δεξιότητες που αναπτύσσουν, γεγονός που αντικατοπτρίζεται και στις επιδόσεις τους.

Το υλικό που αναπτύσσεται διατίθεται στους φοιτητές κατά την έναρξη αλλά και κατά τη διάρκεια των σπουδών τους αποτελείται από σύγχρονα συγγράμματα στην Ελληνική και Αγγλική γλώσσα, και συμπληρωματικό ψηφιακό υλικό και υλικό που δίνεται αξιοποιώντας ηλεκτρονικές πηγές. Συνεισφέρει ουσιαστικά στην ευρεία και σφαιρική κάλυψη των διδακτικών αντικειμένων, την σε βάθος κατανόηση τους καθώς και στη διευκρίνιση ζητημάτων που χρειάζονται κατά περίπτωση περισσότερη ανάλυση και επεξεργασία.

#### 4. Συζήτηση-Συμπεράσματα

Το Πρόγραμμα Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά εκπληρώνει σε πολύ υψηλό βαθμό τους κεντρικούς του στόχους, καθώς ένα μεγάλο μέρος της μαθηματικής κοινότητας έχει εναισθητοποιηθεί και εκδηλώσει το ενδιαφέρον της για μεταπτυχιακές σπουδές, εκφράζοντας την αναγκαιότητα για δια βίου μάθηση. Τα παραπάνω αντικατοπτρίζονται στην αναλογία εισερχομένων φοιτητών προς τους αιτούντες, που είναι (1:8) κατά μέσο όρο, όλα τα χρόνια. Το Πρόγραμμα Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά, συμβαδίζει με τα αντίστοιχα σύγχρονα προγραμμάτων ελληνικών και ξένων Ανοικτών Πανεπιστημίων ως προς το περιεχόμενο και τους στόχους. Είναι διαρθρωμένο ώστε να προσφέρει ειδίκευση σε δύο κατευθύνσεις. Η μία οδηγεί στην κατεύθυνση «ιστορική εξέλιξη και διδακτική των μαθηματικών», ενώ η δεύτερη σε ειδίκευση με έμφαση στη μαθηματική προτυποποίησης και τις εφαρμογές των Μαθηματικών στις επιστήμες και την τεχνολογία. Η δεύτερη κατεύθυνση χαρακτηρίζεται ως νεωτερική, καθώς δεν συναντάται σε ανάλογα προγράμματα παρόλο που σήμερα, θεωρείται πια σημαντική. Προσφέρεται έτσι ένα ολοκληρωμένο πρόγραμμα σπουδών που απευθύνεται στους πτυχιούχους μαθηματικούς που ασχολούνται ή πρόκειται να ασχοληθούν με τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση αλλά και σε αυτούς που θέλουν αν ασχοληθούν με τις εφαρμογές των Μαθηματικών στις θετικές, τεχνολογικές, βιοϊατρικές και άλλες επιστήμες καθώς και την μαθηματική έρευνα σε αυτές.

Η ανάγκη χρήσης οργανωμένης μαθηματικής σκέψης αυξάνεται παράλληλα με την αύξηση της ανθρώπινης γνώσης σε κάθε επιστημονική περιοχή. Η εμβάθυνση του προβλήματος κατά τη μελέτη ενός φαινομένου, απαιτεί συχνά την ανάπτυξη πολύπλοκων διαδικασιών, οι οποίες οδηγούν σε συγκεκριμένα συμπεράσματα. Η ανάγκη χρήσης μαθηματικών τεχνικών γίνεται όλο και περισσότερο απαραίτητη, τόσο στην ανάπτυξη αυτών των διαδικασιών όσο και την περιγραφή και διατύπωση των σχετικών συμπερασμάτων. Αυτό οδηγεί σε αυξημένες απαιτήσεις για τη δημιουργία νέων μαθηματικών μεθόδων, δηλαδή σε απαιτήσεις για «όλο και περισσότερα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά». Το πρόγραμμα φιλοδοξεί να συνεισφέρει στην κατεύθυνση αυτή.

Οι φοιτητές δείχνουν μεγάλο ενδιαφέρον και ενθουσιασμό για τις σπουδές τους, που διατηρείται και ενισχύεται τις περισσότερες φορές με την πρόοδο στις Θ.Ε. Η μέση φοιτητική επίδοση είναι ικανοποιητική τόσο στις γραπτές εργασίες όσο και στις

τελικές εξετάσεις, όπως προαναφέρθηκε. Η εγκατάλειψη του προγράμματος από τους φοιτητές διατηρείται σε χαμηλά επίπεδα και συμβαίνει κατά κύριο λόγο στην αρχή της φοίτησης. Ένα υψηλό ποσοστό των φοιτητών συμμετέχει ανελλιπώς στις ομαδικές συμβουλευτικές συναντήσεις διανύοντας συχνά μεγάλες αποστάσεις. Καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών επικοινωνούν με τους ΣΕΠ αλλά και μεταξύ τους συνεργαζόμενοι σε ομάδες.

Μείζονος σημασίας παράγοντα, στα πλαίσια αυτά, αποτελεί η ουσιαστική επικοινωνία διδάσκοντα και φοιτητή, η οποία αντισταθμίζει τα εμπόδια που δημιουργούν η μεταξύ τους γεωγραφική απόσταση και η συχνά ασύγχρονη αλληλεπίδραση. Η προσωποποιημένη επικοινωνία έχει αποδώσει σπουδαίους καρπούς και έχει αποδειχθεί καθοριστική για την προσέλκυση του ενδιαφέροντος για το πρόγραμμα, την εμπλοκή και την παραμονή των εξ αποστάσεως φοιτητών σε αυτό, σημειώνοντας όπως προαναφέρθηκε μικρά ποσοστά εγκατάλειψης, κι αυτά κύρια για λόγους έλλειψης διαθέσιμου χρόνου για μελέτη. Τα αντίστοιχα δεδομένα, καταδεικνύουν ότι όσο πιο προσωπική είναι η επικοινωνία και καθοδήγηση, υποστήριξη του φοιτητή, τόσο αυτός τείνει να εμπλέκεται στις εκπαιδευτική διαδικασία ανταποκρινόμενος προς το ενδιαφέρον του ΣΕΠ. Μεγάλο ποσοστό, ενδιαφέρεται να συνεχίσει να ασχολείται με τα μαθηματικά και να διατηρήσει τη σχέση του με το ΕΑΠ και μετά την αποφοίτησή του ζητώντας ενημέρωση και συμμετέχοντας σε επιστημονικές δραστηριότητες (π.χ συνέδρια ημερίδες κ.λπ.) ή ακόμη εκπονώντας Διδακτορικό. Έξι απόφοιτοι του προγράμματος συνεχίζουν για διδακτορικές σπουδές στο ΕΑΠ ή και σε άλλα Πανεπιστήμια. Τα θέματα με τα οποία ασχολούνται οι διδακτορικοί φοιτητές του ΕΑΠ αφορούν σε Μαθηματική προτυποποίηση της ροής πλάσματος γύρω από ερυθρά αιμοσφαίρια μέσω της ροής Stokes, της ανάπτυξης καρκινικών όγκων, της σκέδασης ακουστικών κυμάτων, της ηλεκτρομαγνητικής λειτουργίας του εγκεφάλου και απεικονίσεων του. Οι απόφοιτοι του προγράμματος, αναγνωρίζουν την ευεργετική επίδραση που είχε το Πρόγραμμα ΜΣΜ στην αναβάθμιση των γνώσεων τους, στην καλλιέργεια της μαθηματικής τους σκέψης, στη στάση τους απέναντι στο αντικείμενο των μαθηματικών τη διδασκαλία του αλλά και στους μαθητές τους, στη διάθεση για έρευνα, και στην ερευνητική μεθοδολογία και πράξη. Το πλαίσιο της Ανοικτής και Εξ Αποστάσεως εκπαίδευσης, παρέχει τη δυνατότητα στους φοιτητές για αυτενέργεια, ασύγχρονη εκπαίδευση προσαρμοσμένη στις προσωπικές ανάγκες και χρονικές απαιτήσεις του κάθε μεταπτυχιακού φοιτητή, καθώς και ουσιαστική προσωπική συμβουλευτική υποστήριξη για συντονισμό, κατανόηση, ανάπτυξη δεξιοτήτων και καλλιέργεια ερευνητικών στάσεων.

### Βιβλιογραφία

- Βεργίδης, Δ., Λιοναράκης, Α., Λυκουργιώτης, Α., Μακράκης, Β., Ματραλής, Χ., (1998). *Ανοικτή και εξ αποστάσεως εκπαίδευση*, ΕΑΠ.
- Δάσιος, Γ., 2001. *Δέκα Διαλέξεις Μαθηματικών*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης
- Τραχανάς, Σ., (2004) *MATHEMATICA και εφαρμογές*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης
- Alladin, I., (1992). International co-operation in higher education: the globalization of universities. *Higher Education in Europe*, XVII (4), pp. 4-13
- Ammari, H. (2009). *Mathematical modeling in Biomedical Imaging*. Lecture Notes in Mathematics, Springer
- Blum, W. et al. (2002). Applications and Modelling in Mathematics Education. *Journal for Mathematik-Didaktik*, 23, 262-280
- Chevallard, Y., 1985/1991. *La transposition didactique* : Grenoble: Pensee sauvages.
- Courant, R., Hilbert, D., (1989) (Methods of Mathematical Physics. John Wiley & sons



- Eves, H., (1990) *Foundations and fundamental Concepts of Mathematics*. Dover
- Fiedman, A., (2004) *Free boundary problems arising in tumor models*. Rend. Mat. Acc. Lincei s.9, v 15:161-168.
- Jones, D.S., Plank, M. J., Sleeman B.D., *Differential equations and Mathematical Biology*. Chapman & Hall/CRS
- Kaiser, G & Schwartz, B. (2006). Mathematical modelling as bridge between school and university. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik*, 38(2), 196-208
- Logan ,J.D, (2005). *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης
- Sapiro S., (1997) *Philosophy of Mathematics*, Oxford University Press.
- .