

## Ανοικτή Εκπαίδευση: το περιοδικό για την Ανοικτή και εξ Αποστάσεως Εκπαίδευση και την Εκπαιδευτική Τεχνολογία

Τόμ. 8, Αρ. 1 (2012)

Ανοικτή Εκπαίδευση



Σύγχρονες θεωρήσεις και εφαρμογές στη Διδακτική των Μαθηματικών στα πλαίσια της Ανοικτής και εξ Αποστάσεως εκπαίδευσης

Παναγιώτης Βλάμος

doi: [10.12681/jode.9782](https://doi.org/10.12681/jode.9782)

Βιβλιογραφική αναφορά:

**Σύγχρονες θεωρήσεις και εφαρμογές στη Διδακτική των Μαθηματικών στα  
πλαίσια της Ανοικτής και εξ Αποστάσεως εκπαίδευσης**

**Contemporary considerations and applications in Mathematics Didactics  
in the framework of Open Distance Education**

**Παναγιώτης Βλάμος**  
Ιόνιο Πανεπιστήμιο,  
Επίκουρος Καθηγητής  
[vlamos@ionio.gr](mailto:vlamos@ionio.gr)

**Περίληψη**

Η αλληλεπίδραση και ο συνδυασμός της ιστορικής εξέλιξης μαθηματικών κλάδων, της ανάπτυξης φιλοσοφικών ρευμάτων και της εφαρμογής μεθόδων διδακτικής που προέρχονται από σύγχρονες θεωρήσεις της γνωσιακής επιστήμης, συνιστούν την κατεύθυνση της «Ιστορικής εξέλιξης και διδακτικής των Μαθηματικών» του Μεταπτυχιακού προγράμματος Σπουδών στα Μαθηματικά του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου. Αναλύονται οι άξονες και υποενότητες της κατεύθυνσης, ο τρόπος ανάπτυξής τους, οι απαιτούμενες εργασίες και οι παραγόμενες διπλωματικές εργασίες με τους αντίστοιχους θεματικούς άξονες.

**Abstract**

The interaction of the historical evolution of Mathematics together with the birth of philosophical aspects applied through methods of cognitive knowledge towards educational practices, consists a challenging course in the program “Graduate Studies in Mathematics” of the Hellenic Open University. The main directions of the course and its presentation are examined together with the MSc theses accomplished in this framework.

**Keywords**

*cognitive knowledge, didactics, mathematical modelling, philosophy, problem solving, graduate studies in HOU.*

**Οι βασικοί άξονες και οι υποενότητες της κατεύθυνσης της «Ιστορικής εξέλιξης και Διδακτικής των Μαθηματικών» στο πρόγραμμα ΜΣΜ του ΕΑΠ**

Η θεματική ενότητα «Ιστορική εξέλιξη και Διδακτική των Μαθηματικών» του προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών του ΕΑΠ, απετέλεσε εξ αρχής ένα φιλόδοξο πρόγραμμα συγκερασμού:

- 1) της εξέλιξης μαθηματικών εννοιών
- 2) της γέννησης φιλοσοφικών ρευμάτων
- 3) της γνωσιακής επιστήμης στην σύγχρονη θεώρησή της
- 4) της διδακτικής των μαθηματικών και
- 5) της εκπαιδευτικής πρακτικής

Η αλληλεπίδραση των πέντε αυτών αξόνων και η μελέτη τους όχι μόνο μεμονωμένα, αλλά και με διαφορετικούς συσχετισμούς οδηγεί συνήθως στην ανανέωση του προγραμματισμού ανά έτος και στην ανάπτυξη νέων εργασιών.

Η ενότητα απαρτίζεται από τρεις υποενότητες.

- Την υποενότητα, «Θεμέλια και Θεμελιώδεις Έννοιες των Μαθηματικών, Φιλοσοφία των Μαθηματικών», με βασικά διδακτικά βοηθήματα τα βιβλία:
  1. Howard Eves, Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics.
  2. R. Wilder, Εξέλιξη των Μαθηματικών Εννοιών.
  3. S. Shapiro, Σκέψεις για τα Μαθηματικά: Η Φιλοσοφία των Μαθηματικών.
- Την υποενότητα, «Γνωστικές επιστήμες και Μαθηματικά», με βασικό περιεχόμενο τις εργασίες:
  1. Rafael Núñez and George Lakoff, The Cognitive Foundations of Mathematics: The Role of Conceptual Metaphor, Handbook of Mathematical Cognition.
  2. Rafael E. Núñez, Conceptual Metaphor and the Cognitive Foundations of Mathematics: Actual Infinity and Human Imagination
  3. Rafael E. Núñez, Embodied Cognition and The Nature of Mathematics
  4. Christophe Heintz, Psychologism and the cognitive foundations of mathematics.
  5. George Lakoff and Rafael E. Núñez, Reviews and criticisms about the book, Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics Into Being.
- Την υποενότητα, «Μαθηματική Παιδεία», με βασικό διδακτικό βοήθημα το βιβλίο:

D. Tall. MATHEMATICAL GROWTH: from Child to Mathematician. Journeys through Three Worlds of Mathematics,

Το διδακτικό υλικό που προτείνεται είναι δύο ειδών: το βασικό διδακτικό υλικό που αποτελεί το κύριο υλικό μελέτης και το εναλλακτικό διδακτικό υλικό. Εκτός από το προτεινόμενο υλικό που δίνεται, οι φοιτητές προτείνεται να ερευνούν σε βιβλιοθήκες και το διαδίκτυο για σχετικές πηγές (βιβλία, εργασίες, κ.λπ.), με τις οποίες θα εμπλουτίσουν τις εργασίες τους.

Η ιστορική εξέλιξη βασικών μαθηματικών κλάδων εμφανίζεται στο βιβλίο του Eves: ένα αμιγώς μαθηματικό βιβλίο, ιδιαίτερα προσιτό σε μαθηματικούς που εντοπίζει σημαντικές εξελικτικές αλλαγές, καταλήγοντας στις τρεις κρίσεις των Μαθηματικών. Η απήχηση του βιβλίου είναι άμεση, το περιεχόμενο αφομοιώνεται από τους μεταπτυχιακούς φοιτητές, ενώ φαίνεται να βοηθά στη συγκρότηση των ήδη υπάρχουσών γνώσεών τους.

Η γέννηση και η πορεία των φιλοσοφικών ρευμάτων στα Μαθηματικά «εκπροσωπείται» από το βιβλίο του Shapiro. Η γραφή του βιβλίου είναι διαλεκτική δημιουργώντας συχνά «ασταθές» αντικείμενο μελέτης, το οποίο είναι ασύμβατο με τη συνήθη πρόσληψη γνώσης στην πλειονότητα των μαθηματικών. Η διαλεκτική αντιμετώπιση των τριών φιλοσοφικών ρευμάτων που αναπτύχθηκαν στα Μαθηματικά, όπως και «παραλλαγών» τους παρουσιάζεται έξυπνα από τον Shapiro, ως «διαμάχη» των εκπροσώπων τους μέσα από γόνιμες αμφισβητήσεις ή νέες ιδέες.

Η δυσκολία της ενότητας κορυφώνεται με την ένταξη σε σύγχρονες θεωρήσεις της γνωσιακής επιστήμης, οι οποίες εκφράζονται από το βιβλίο των Lakoff και Núñez, τα θετικά και αρνητικά σχόλια που προκάλεσε και μία σειρά εργασιών τους σχετικά με τη χρήση των μεταφορών. Το βιβλίο των Lakoff και Núñez αποτελεί μία προκλητική θεώρηση του τρόπου με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε και μαθαίνουμε Μαθηματικά, καθώς κρατά αποστάσεις τόσο από τη Νευροφυσιολογία όσο και από τη στερεότυπη Διδακτική. Διατυπώνει την άποψη ότι τα Μαθηματικά υπάρχουν μέσα μας (ενσώματη γνώση) και τα αντιλαμβανόμαστε μέσω μεταφορών. Η σειρά των εργασιών προσπαθεί να θεμελιώσει αυτή την άποψη μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα με σημαντικότερο αυτό της Βασικής Μεταφοράς του Απειρού.

Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζουν, οι εκ διαμέτρου αντίθετες κριτικές του βιβλίου τους από τη μαθηματική κοινότητα. Άλλοι μαθηματικοί τονίζουν ότι καλύπτεται ένα μεγάλο κενό της γνωσιακής επιστήμης ανάμεσα στη φυσιολογία και την εφαρμοσμένη διδακτική με ελπιδοφόρα αποτελέσματα στην εκπαιδευτική πράξη.

Πολλοί επίσης μαθηματικοί εντοπίζουν υπάρχουσες αδυναμίες, ασάφειες και ασυνέπειες που είναι φυσικό να πηγάζουν από τη διαπραγμάτευση ενός ψυχολόγου και ενός γλωσσολόγου της «προέλευσης» των Μαθηματικών. Είναι φυσικό βέβαια να προκαλούνται στα πλαίσια της ενότητας εξαιρετικά ζητήματα συζήτησης αλλά και πρακτικής εφαρμογής των θεμάτων που δημιουργεί το σύνολο αυτού του θεματικού άξονα.

Μια σύγχρονη θεώρηση της διδακτικής των Μαθηματικών παρουσιάζεται στο βιβλίο του Tall με τους τρεις κόσμους των Μαθηματικών. Η ίδια η μέθοδος γραφής του βιβλίου είναι υπόδειγμα διδακτικής μεθοδολογίας. Το βιβλίο «εκτέθηκε» ημιτελές στο διαδίκτυο, ανοικτό σε παρατηρήσεις από τους αναγνώστες του. Οι μεταπτυχιακοί φοιτητές με ανακούφιση επιστρέφουν σε ενδιαφέροντα και βατά θέματα διδακτικής, ενώ με τις εργασίες τους δημιουργούν δικές τους εκπαιδευτικές πρακτικές.

### **Η ανάπτυξη της κατεύθυνσης της «Ιστορικής εξέλιξης και Διδακτικής των Μαθηματικών» στο πρόγραμμα ΜΣΜ του ΕΑΠ**

Τα πρώτα έτη του μεταπτυχιακού προγράμματος η ανάπτυξη της ενότητας γινόταν σειριακά και οι πέντε άξονες παρουσιάζονταν σχεδόν ανεξάρτητοι. Επιπλέον, τα θέματα διδακτικής εισάγονταν στο τέλος με αποτέλεσμα να υστερεί η συνδυαστική εφαρμογή των υποενοτήτων της κατεύθυνσης.

Κατόπιν, το πρόγραμμα αναδιαμορφώθηκε ακόμα δύο φορές ενώνοντας μέρη του υλικού και διαμορφώνοντας νέες πιο προκλητικές συνθήκες για τους μεταπτυχιακούς φοιτητές. Οι αναδιαμορφώσεις λειτούργησαν θετικά παρά την άνοδο της δυσκολίας στη θεματική ενότητα, ενώ προκάλεσαν νέα θέματα διπλωματικών εργασιών.

Η ανάπτυξη της ενότητας δεν παρέμεινε θεωρητική, αλλά είναι εμπλουτισμένη με πολλές μελέτες-περιπτώσεις όπως :

- Όσες αφορούν την εξέλιξη μαθηματικών εννοιών, για παράδειγμα ο μέγιστος κοινός διαιρέτης που αρχικά παρουσιάστηκε με τον αλγόριθμο της ανθυφαίρεσης στα Στοιχεία του Ευκλείδη για την εύρεση κοινού μέτρου ομοειδών μεγεθών, ο οποίος τελικά διδάσκεται ως δεξιότητα, με την ανάλυση σε πρώτους παράγοντες όπως εξελίχθηκε πολύ αργότερα στη Θεωρία Αριθμών.
- Όσες αφορούν στην καθιέρωση στερεοτύπων: «οι μιγαδικοί δημιουργήθηκαν για την επίλυση της εξίσωσης  $x^2 + 1 = 0$ », «η παράγωγος δημιουργήθηκε για την εύρεση της κλίσης της εφαπτομένης».

- Όσες είναι εκτενείς και δίνονται και ως εργασίες, όπως «η περιπέτεια της Γεωμετρίας», η οποία έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον ως προς την αφετηρία και τη διαδρομή παρουσίασης.

Οι σύγχρονες θεωρήσεις της διδακτικής οδηγούν στα επίπεδα γνώσης, τα οποία έχουν εκφραστεί όχι μόνο από τον Tall με διαφορετικές ταξινομήσεις και ονομασίες.

Οι προηγούμενοι άξονες πλαισιώνονται και από το βιβλίο του Wilder, το οποίο εισάγεται στο τέλος της ενότητας: ένα απλό εγχειρίδιο που τονίζει τα Μαθηματικά ως πολιτισμικό και κοινωνικό αγαθό, μια συνιστώσα που πρέπει να λαμβάνεται υπόψη για την μελέτη της εξελικτικής τους πορείας.

### **Οι εργασίες της κατεύθυνσης**

Ουσιαστικά οι εργασίες της ενότητας, δεν αποτελούν εργασίες φοιτητών, άλλα μικρά άρθρα, κάποια από τα οποία θα μπορούσαν να δημοσιευθούν ως εργασίες αναφοράς (review papers). Μέσα σε δέκα το πολύ σελίδες πρέπει να ακολουθηθεί μία συγκεκριμένη διαδρομή σκέψης που να φανερώνεται από τη δομή και να εκπροσωπεί ατομικά τον συγγραφέα της εργασίας.

Τονίζονται τα εξής βασικά χαρακτηριστικά κάθε εργασίας: η αποτύπωση των προσωπικών επιλογών κάθε συγγραφέα, τεκμηριωμένος κριτικός σχολιασμός των θέσεων που παρουσιάζονται και η εισαγωγή αναφορών για την ανάπτυξη απόψεων και επιχειρημάτων ενθαρρύνοντας την εύρεση νέας βιβλιογραφίας.

Δίνονται υποδείγματα άρθρων και δομής εργασιών καθώς και μέθοδοι αναζήτησης βιβλιογραφίας από βάσεις δεδομένων με τη χρήση κατάλληλων μεταδεδομένων (προτύπου Dublin Core).

Όσον αφορά στην εκπαιδευτική πράξη οι μεταπτυχιακοί φοιτητές παρουσιάζουν δικές τους προτάσεις σχεδίων μαθήματος εφαρμόζοντας όλα όσα έχουν αποκομίσει από τους προηγούμενους άξονες στην συνήθως ήδη μεγάλη εμπειρία τους στη διδασκαλία.

Μικρότερης έκτασης θεματικοί άξονες που συζητούνται είναι η χρήση νέων τεχνολογιών και παραγώγων τους, όπως διαδραστικοί πίνακες, webcasts, mathlets, mathML στη διδασκαλία των Μαθηματικών της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, καθώς και η εισαγωγή της μαθηματικής προτυποποίησης στις διάφορες βαθμίδες εκπαίδευσης.

### **Οι διπλωματικές εργασίες της κατεύθυνσης**

Η πολύπλευρη ανάπτυξη της ενότητας δίνει τη δυνατότητα της συνδιαμόρφωσης θεμάτων διπλωματικών εργασιών μαζί με τους μεταπτυχιακούς φοιτητές, αλλά και την αυτόνομη πρόταση εκ μέρους τους. Οι τρεις βασικοί θεματικοί άξονες των διπλωματικών εργασιών της κατεύθυνσης είναι οι ακόλουθοι.

#### **Εφαρμογές Μαθηματικής Προτυποποίησης στην Έρευνα**

Στόχος του θέματος αυτού είναι η εισαγωγή στη μαθηματική προτυποποίηση και επίλυση προβλημάτων, όπως:

- Αναγνώριση προβλημάτων σε πληθώρα συστημάτων.
- Αναγνώριση σχετικών πληροφοριών και περιορισμών.
- Αναπαράσταση εναλλακτικών λύσεων ή τρόπων λύσης.
- Επιλογή μοντέλων και προτυποποίηση.
- Έλεγχος και αξιολόγηση λύσεων.
- Επικοινωνία αποτελεσμάτων.

Βασικά περιεχόμενα της διπλωματικής εργασίας αποτελούν η παροχή ολοκληρωμένης γνώσης με ενιαία μεθοδολογική προσέγγιση των βασικών

εργαλείων της μαθηματικής προτυποποίησης συνεχών και διακριτών συστημάτων και διαδικασιών, μικροσκοπικών και μακροσκοπικών, ντετερμινιστικών και στοχαστικών, και η *δια παραδειγμάτων εμπέδωση των δυνατοτήτων της προτυποποίησης* σε πληθώρα συστημάτων, που καλύπτουν το ευρύτερο φάσμα των *τεχνολογιών της ζωής* (περιβάλλον, ποιότητα ζωής και υπηρεσιών, βιολογία, βιοτεχνολογία και βιοϊατρική), *της κοινωνίας της πληροφορίας* (πληροφορική, επεξεργασία χωροχρονικών σημάτων, επικοινωνίες) των υλικών και άλλων κλάδων.

### **Εφαρμογές Μαθηματικής Προτυποποίησης στην Εκπαίδευση**

Η συγκεκριμένη ομάδα θεμάτων οδηγεί στην ανάπτυξη της ικανότητας προτυποποίησης του προβλήματος, στην κατανόηση του πραγματικού προβλήματος το οποίο πρόκειται να μοντελοποιηθεί, καλλιεργεί την αφαιρετική σκέψη και την ικανότητα αναδιατύπωσης του προβλήματος, ώστε να μπορεί να αντιμετωπισθεί με μαθηματικό τρόπο. Επιστρατεύονται γνώσεις και διαδικασίες από οποιαδήποτε περιοχή των Μαθηματικών και χρησιμοποιείται η διαδικασία της επανατροφοδότησης.

Καλλιεργούνται οι δεξιότητες διερεύνησης και δημιουργικότητας και οι στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων, ενώ εξετάζεται η χρήση των εργαλείων προτυποποίησης στην εκπαιδευτική διαδικασία των μαθηματικών. Τέλος, περικλείεται η ανάλυση και ερμηνεία προβληματικών καταστάσεων, προτείνοντας, ελέγχοντας και βελτιώνοντας τις υπάρχουσες λύσεις.

Επιτυγχάνεται έτσι, η οικοδόμηση βασικών μαθηματικών εννοιών, γνώσεων και διαδικασιών με σκοπό να χρησιμοποιηθούν στη μάθηση με μεθόδους επαναδόμησης και επαναδιατύπωσης ενός προβλήματος από μια εξωμαθηματική περιοχή, σε μαθηματικό πρόβλημα καθώς και τη χρήση μαθηματικών εργαλείων για την επίλυση προβλημάτων.

### **Μέθοδοι Επίλυσης και Διερεύνησης (Μαθηματικών) Προβλημάτων.**

Στόχοι της προτεινόμενης ομάδας θεμάτων είναι η δόμηση των μαθηματικών εννοιών και σχέσεων μέσω της χρήσης και αξιοποίησης πολλαπλών αναπαραστάσεων, η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών ως βασικό στοιχείο της επίλυσης προβλημάτων και η χρήση και δόμηση στρατηγικών για την επίλυση ενός προβλήματος.

Η επίλυση προβλήματος βρίσκεται στο επίκεντρο της μαθηματικής εκπαίδευσης, όχι απαραίτητα ως ανεξάρτητη θεματική περιοχή αλλά ως βασικός άξονας γύρω από τον οποίο οργανώνεται η ερμηνεία και η διερεύνηση βασικών μαθηματικών εννοιών.

Η διδακτική μέθοδος που προβάλλεται διεθνώς, αλλά και τονίζεται με έμφαση στη σύγχρονη εκπαιδευτική μεταρρύθμιση, ξεκινά με μια προβληματική κατάσταση στην οποία εμπλέκονται οι μαθηματικές έννοιες που πρέπει να διδαχθούν. Η κατανόηση ενός προβλήματος και η αναζήτηση της λύσης του γίνεται αρχικά σε διαισθητικό και εμπειρικό επίπεδο, αλλά είναι επιθυμητό στη συνέχεια να μετασχηματίζεται σταδιακά σε μια αποδεικτική διαδικασία που στηρίζεται σε μια σειρά λογικών ισχυρισμών.

Ενδεικτικά, αναφέρονται τίτλοι ήδη εκπονημένων διπλωματικών εργασιών.

- Πλέρου Αντωνία, «Νευρωνικά Δίκτυα Προσομοίωσης του Ανθρώπινου Εγκεφάλου».
- Γεωργανάκης Γεώργιος, «Ανάπτυξη και Αξιολόγηση της Γεωμετρικής Σκέψης».
- Κασούτσας Αιμιλιανός, «Τα MathLets στην Μαθηματική Εκπαίδευση».
- Χατζόπουλος Σταύρος, «Κριτήρια επιλογής για την παρουσίαση μαθηματικών θεμάτων με τη χρήση νέων τεχνολογιών».
- Παπανικολάου Λεωνίδα, «Βασικές εννοιολογικές μεταφορές στα Μαθηματικά».
- Δουκάκης Παναγιώτης, «Μαθηματικά μοντέλα προβλημάτων Αντίδρασης-Διάχυσης».
- Καραμουζιάς Νικόλαος, «Εφαρμογές Μαθηματικών προτύπων στη Βιολογία».
- Παπαχρήστου Γρηγόρης, «Η χρήση της γλώσσας MathML στην Εξ αποστάσεως εκπαίδευση της εξίσωσης Laplace».
- Αντωνίου Γεωργία, «Μαθηματικά μοντέλα στη Θεωρία Παιγνίων».
- Σταύρου Αγγελική, «Δυσκολίες στη μαθηματική σκέψη. Θεωρητική διερεύνηση και μεθοδική αντιμετώπιση»
- Ρόδη Μαρία, «Αρχές δημιουργίας φύλλων εργασίας και σχεδίων μαθήματος στα Μαθηματικά».

Οι μεταπτυχιακοί φοιτητές είναι πλέον αρκετά ώριμοι να συνθέσουν τις εμπειρίες τους, με τις νέες γνώσεις και τις ιδιαιτερότητες της εξ αποστάσεως Εκπαίδευσης, ενώ παρακινούνται στην παρακολούθηση συνεδρίων, στα οποία πολλές φορές συμμετέχουν ανακοινώνοντας μέρη των διπλωματικών τους εργασιών. Όλες οι διπλωματικές εργασίες έχουν την προσωπική σφραγίδα των μεταπτυχιακών φοιτητών, σε ότι αφορά τη διαδρομή του θέματος που αναπτύσσουν ενώ σε αρκετές από αυτές αναπτύσσονται πρωτότυπες υποενότητες.

### **Συμπεράσματα**

Η κατεύθυνση της «Ιστορικής εξέλιξης και διδακτικής των Μαθηματικών» απευθύνεται σε εκείνους τους φοιτητές του προγράμματος «Μεταπτυχιακές σπουδές στα Μαθηματικά», του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου, οι οποίοι έχουν ενδιαφέρον στην ανανέωση της εκπαιδευτικής πρακτικής μέσα από σύγχρονες θεωρήσεις φιλοσοφίας, γνωστικής επιστήμης και διδακτικής.

Η ειδικευση που αποκτούν τους οδηγεί σε αναθεωρήσεις πρακτικών και μεθόδων διδασκαλίας μακριά από στερεότυπα και μεμονωμένες εμπειρικές προσπάθειες.

Δίνεται η δυνατότητα να αυτενεργήσουν σε επίπεδο εργασιών και να συνδιαμορφώνουν νέα θέματα διπλωματικών εργασιών με μεγάλο βαθμό πρωτοτυπίας. Η κατεύθυνση δημιουργεί το απαιτούμενο υπόβαθρο ανάπτυξης συγκροτημένων εκπαιδευτικών πρακτικών.

Η ανάπτυξη της κατεύθυνσης έχει αυτόνομη δυναμική πορεία καθώς βελτιώνεται διαρκώς η αλληλεπίδραση των βασικών αξόνων υλοποίησής της.

### **Βιβλιογραφία**

- [1] Blum W. & Niss M., Applied mathematical problem solving, Modelling, Applications, and links to other subjects: state, trends and issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics*, v. 22, n. 1, p. 27-68, 1991.
- [2] Coello C., Van Veldhuizen D. & Lamont G. (2002). *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems*. Norwell, MA: Kluwer.
- [3] Gershenfeld N. (1998). *The Nature of Mathematical Modeling*, Cambridge University Press.
- [4] Lesh, R. and Doerr, H., *Foundations of a models and modelling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving*, Beyond Constructivism: Models and Modeling