Ανοικτή Εκπαίδευση: το περιοδικό για την Ανοικτή και εξ Αποστάσεως Εκπαίδευση και την Εκπαιδευτική Τεχνολογία

Vol 8, No 1 (2012)

Ανοικτή Εκπαίδευση

Η Γνωσιακή Επιστήμη των Ενσώματων Μαθηματικών. Το Παράδειγμα του Τετραγωνισμού της Παραβολής.

Γιώργος Μπούκης

doi: 10.12681/jode.9783

To cite this article:

Η Γνωσιακή Επιστήμη των Ενσώματων Μαθηματικών

Το Παράδειγμα του Τετραγωνισμού της Παραβολής

Μπούκης Γιώργος
Μαθηματικός Msc.
Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο
Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας
Γυμνάσιο Καστελλάνων Μέσης Κέρκυρας
48084 Καστελλάνοι Κέρκυρα
gboukis1@gmail.com

Περίληψη

Κατά την τελευταία εικοσαετία, έχει αναπτυχθεί στο πεδίο της γνωσιακής έρευνας μια τάση με αυξανόμενη επιρροή, η οποία δίνει έμφαση στον *ενσώματο* χαρακτήρα της μαθηματικής κατανόησης. Τα μέχρι τώρα συμπεράσματά της έρχονται να εμπλουτίσουν ή ακόμη να αμφισβητήσουν κρατούσες απόψεις της ψυχολογίας, της φιλοσοφίας και της διδακτικής ως προς τις απαρχές, τη δημιουργία και την εκμάθηση των Μαθηματικών.

Η βασική θέση των εν λόγω θεωρήσεων είναι ότι οι *αισθητηριακές* και *κινητικές* ιδιότητες του ανθρώπινου σώματος παίζουν κρίσιμο ρόλο στη μαθηματική δραστηριότητα. Επιχειρείται υπό αυτό το πρίσμα να υλοποιηθεί ένα φιλόδοξο εγχείρημα: να εξηγηθεί πώς ακριβώς οι αφηρημένες και τυπικές μαθηματικές ιδέες είναι δυνατόν να αναδύονται μέσω των αισθητηριακών και κινητικών εμπειριών.

Ως βασικό εργαλείο προβάλλεται η έννοια της *εννοιολογικής μεταφοράς* και ο ρόλος της στη διαμόρφωση του μαθηματικού νοήματος. Η συνακόλουθη *ανάλυση των μαθηματικών ιδεών* αποτελεί μια καινοτόμα και διεισδυτική προσπάθεια να αποκαλυφθεί το ενσώματο εννοιολογικό περιεχόμενο σε ένα ευρύ φάσμα μαθηματικών εννοιών και να καλυφθεί έτσι το χάσμα ανάμεσα στην *τυπική* και την *ενορατική* όψη των Μαθηματικών.

Σε πρώιμα μαθηματικά κείμενα όπου οι ευρετικές περιγραφές έχουν διασωθεί, η ενσώματη διάσταση των μαθηματικών ιδεών γίνεται ευκρινέστερη.

Στο πρώτο μέρος της παρούσας εργασίας παρουσιάζεται συνοπτικά το πλαίσιο ιδεών της Γνωσιακής Επιστήμης των Ενσώματων Μαθηματικών. Αναφέρεται κυρίως στις εργασίες των Lakoff & Núñez (2000) και Núñez (1993-2005) και θέτει τα απαραίτητα προαπαιτούμενα για το δεύτερο μέρος. Το δεύτερο μέρος είναι αφιερωμένο στην πραγματεία του Αρχιμήδη περί Τετραγωνισμού της Παραβολής, όπου αναδεικνύονται οι ενσώματες όψεις της ευρετικής προσέγγισης του προβλήματος.

Λέξεις Κλειδιά

ενσώματα Μαθηματικά, τετραγωνισμός της παραβολής, εννοιολογική μεταφορά

Abstract

During the last twenty years, an increasingly influential trend has been developed in cognitive science which gives emphasis to the embodied character of mathematical understanding. Cognitive research results have enriched and in certain cases even called into question some long held views in the fields of psychology, philosophy and pedagogy on the origin of mathematics and the ways it is created and learned. Such results are based on the premise that the sensory-motor properties of the human body play a crucial role in mathematical activity. Here, the major attempt consists in explaining how it is possible for the abstract and formal mathematical ideas to emerge through sensory-motor experience. The basic tool used is the concept of conceptual metaphor and its role in the formation of mathematical meanings is explored. The analysis of mathematical ideas from this perspective is an innovative and penetrating effort to uncover the embodied conceptual content in a wide spectrum of mathematical concepts and to bridge the gap between the formal and the intuitive aspects of mathematics. In early mathematical texts, wherever heuristic descriptions by the authors have been preserved, the aspect of mathematical ideas is made more lucid. The first part of this paper, based on the work of Lakoff & Núñez, offers a summary presentation of a particular framework of the cognitive science of embodied mathematics. Moreover, it serves as a useful prerequisite for the next part. The second part is concerned with Archimedes' treatise on the quadrature of the parabola. Here the embodied aspects of the heuristic approach towards the problem are pointed.

Keywords

embodied mathematics, quadrature of the parabola, conceptual metaphor

Γενικά

Η γνωσιακή επιστήμη είναι ένας νεοσύστατος επιστημονικός κλάδος που μελετά εννοιολογικά συστήματα. Σύμφωνα με τον Gardner (1987: 6) πρόκειται για την

> *«σύγχρονη, εμπειρικά βασιζόμενη προσπάθεια να απαντηθούν μακροχρόνια επιστημολογικά ερωτήματα- ιδιαίτερα εκείνα που αφορούν τη φύση της γνώσης, τα συστατικά της, τις πηγές της, την ανάπτυξη και τη χρήση της».*

Μια ισχυρή τάση στο εσωτερικό της, γνωστή ως *ερευνητικό πρόγραμμα της ενσώματης γνώσης*, δίνει έμφαση στις αισθητηριακές και κινητικές λειτουργίες του σώματος για το *πώς* και *τι* σκέφτεται ένας οργανισμός. Καθώς ο άνθρωπος είναι προϊόν εξέλιξης και ο νευρικός εξοπλισμός των βιολογικών του προπατόρων λειτουργούσε ανέκαθεν στη βάση της αισθητηριακής και κινητικής επεξεργασίας, η γνωστική δραστηριότητα ήταν μια αδιαμεσολάβητη, απευθείας διάδραση με το περιβάλλον. Κατά συνέπεια, η ανθρώπινη γνώση δεν μπορεί παρά να έχει βαθιές ρίζες στην αισθητικοκινητική επεξεργασία: οι ίδιοι νευρικοί και γνωστικοί μηχανισμοί που μας επιτρέπουν να αντιλαμβανόμαστε και να κινούμαστε, θα πρέπει να δημιουργούν τα εννοιολογικά μας συστήματα και τους τρόπους νόησης. Κατ' αυτή την έννοια, οι έννοιες και ο νους είναι *ενσώματα* .

Με τον όρο *γνωσιακός* θα εννοούμε στο εξής κάθε νοητική λειτουργία ή δομή η οποία υπεισέρχεται στη γλώσσα, στη νοηματοδότηση, στην αισθητηριακή αντίληψη, στα εννοιολογικά συστήματα και στη λογική.

Εξειδικεύσεις στα Μαθηματικά

Εμπειρικές έρευνες έχουν δείξει ότι κάθε ανθρώπινο ον γεννιέται με μια έμφυτη ικανότητα «προ-αριθμητικής», δηλαδή είναι σε θέση να διακρίνει πολύ μικρό πλήθος αντικειμένων και συμβάντων (subitizing) να εκτελεί δε υπολογισμούς με πολύ μικρούς αριθμούς. Ωστόσο, τα Μαθηματικά εκτείνονται πολύ πέραν της αριθμητικής των πολύ μικρών αριθμών. Ακόμη και αυτή η κατανόηση ότι το μηδέν είναι αριθμός ή ότι οι αρνητικοί αριθμοί είναι όντως αριθμοί, ήταν αποτέλεσμα αιώνων εξέλιξης. Η επέκταση των φυσικών αριθμών με τους ρητούς, τους πραγματικούς, τους μιγαδικούς και τους υπερπραγματικούς απαιτεί τη βαθμιαία δόμηση και ενεργοποίηση ενός τεράστιου γνωστικού μηχανισμού, ο οποίος σαφώς υπερβαίνει τον καθημερινό, χωρίς ειδική εκπαίδευση ενήλικα. Εντούτοις, οι ενσώματες γνωστικές ικανότητες, οι ίδιες που χρησιμοποιούνται σε πεδία έξω από τα Μαθηματικά, είναι αυτές που, κατά τους Lakoff και Núñez, μας επιτρέπουν να κινηθούμε πέρα από τις βασικές αριθμητικές δεξιότητες, σε κατανόηση βαθύτερων μαθηματικών εννοιών. Αναφέρουν σχετικά, τέσσερις γνωστικούς μηχανισμούς ενσωματωμένους στον ανθρώπινο εξοπλισμό, οι οποίοι αποτελούν τους δομικούς λίθους των θεωρήσεών τους.

(α) τα εικονοσχήματα
(β) τα σχήματα όψεως
(γ) την εννοιολογική μεταφορά και
(δ) την εννοιολογική μίξη.

Τα Εικονοσχήματα

Έρευνες στο πεδίο της γνωσιακής γλωσσολογίας έχουν δείξει ότι οι χωρικές σχέσεις στα πλαίσια μιας δεδομένης γλώσσας μπορούν να αναλυθούν σε εννοιολογικά πρωτογενή στοιχεία, τα οποία ονομάζονται *εικονοσχήματα* (*image schemas)* και εμφανίζεται να έχουν καθολικότητα. Πρόκειται για σχηματικά, ενσώματα στοιχεία εντός του εγκεφάλου τα οποία είναι προ-εννοιακά, μη-γλωσσικά, παρέχουν δε συσσωρευτικά τη βάση για το σχηματισμό των εννοιών. Πιο συγκεκριμένα τα εικονοσχήματα είναι:

- *Σχηματικά*, καθώς δεν αποτελούν λεπτομερείς αναπαραστάσεις των βιωμένων συμβάντων. Είναι μερικώς δομημένα μορφώματα της διάδρασής μας με τον κόσμο.
- *Ενσώματα*, καθώς είναι σωματικά θεμελιωμένα. Εξαρτώνται από τον τρόπο με τον οποίο το σώμα αλληλεπιδρά με τον κόσμο. Επί παραδείγματι, το εικονοσχήμα της *ισορροπίας* διαμορφώνεται από τον τρόπο ελέγχου του μυϊκού συστήματος ως απόκριση σε εξωτερικό περιβαλλοντικό ερέθισμα.
- *Προ-εννοιακά*, καθώς είναι παρόντα πριν σχηματιστούν οι έννοιες. Αποτελούν τη βάση πάνω στην οποία χτίζονται οι έννοιες και ως εκ τούτου δεν είναι προϊόν της συνείδησης – η συνείδηση προϋποθέτει την έννοια.
- *Μη-γλωσσικά*, καθώς δεν κάνουν χρήση της γλώσσας ή της σκέψης.

Σημαντικά εικονοσχήματα για τα Μαθηματικά είναι το αυτό του *εγκλεισμού (Container Schema), της κεντρικότητας*, της *επαφής*, της *γειτνίασης*, της *ισορροπίας*, της *ευθείας* κ.α. Τα εικονοσχήματα ενέχουν σύμφυτες λογικές, ουσιώδεις για τη μαθηματική σκέψη.

Το Σχήμα 1 παρουσιάζει τη σύμφυτη χωρική λογική του σχήματος εγκλεισμού. Με αναφορά στο εν λόγω σχήμα, ας θεωρήσουμε τις ακόλουθες προτάσεις:

Σχήμα 1

Αν το δοχείο Α βρίσκεται εντός του δοχείου Β και το Χ βρίσκεται εντός του Α, τότε το Χ βρίσκεται εντός του Β.

Αν το δοχείο Α βρίσκεται εντός του δοχείου Β και το Υ βρίσκεται εκτός του Β, τότε το Υ βρίσκεται εκτός του Α.

Δεν είναι απαραίτητο να καταφύγουμε σε συμπερασματικού χαρακτήρα λειτουργίες για να οδηγηθούμε στα παραπάνω συμπεράσματα. Τα εικονοσχήματα είναι ταυτόχρονα τόσο αντιληπτικής όσο και εννοιολογικής φύσεως.

Κινητικός Ελεγχος και Σχήματα Όψεως

Εκ πρώτης όψεως οι μαθηματικές ιδέες και το σύστημα κινητικού ελέγχου - το νευρικό σύστημα που κυβερνά τον τρόπο κίνησης του σώματός μας, φαίνονται τελείως διαφορετικά θέματα. Όμως, πρόσφατες ανακαλύψεις για τη σχέση ανάμεσα στο σύστημα κινητικού ελέγχου και στο ανθρώπινο αντιληπτικό σύστημα δείχνουν θεμελιώδη συνάφεια μεταξύ τους. Οι εν λόγω ανακαλύψεις προέρχονται από το πεδίο της δομημένης συνδεσμικής νευρικής προτυποποίησης (*structured connectionist neural modeling*).

Ο Srini Narayanan (1977) παρατήρησε ότι όλα τα νευρικά προγράμματα κινητικού ελέγχου παρουσιάζουν την ίδια υπερδομή:

Κατάσταση Ετοιμότητας: Πριν εκτελεστεί μια σωματική πράξη, πρέπει να πληρούνται συγκεκριμένες συνθήκες ετοιμότητας (δηλαδή, θα πρέπει να αναπροσανατολίσεις το σώμα σου, να σταματήσεις νωρίτερα κάποια άλλη δράση, να ξεκουραστείς για λίγο, κ.ο.κ).

Διαδικασία Έναρξης: Πρέπει να κάνεις οτιδήποτε προηγείται της έναρξης της διαδικασίας (δηλαδή, για να σηκώσεις ένα φλιτζάνι, πρέπει πρώτα να το φθάσεις και να το πιάσεις).

Κυρίως Διαδικασία: Κατόπιν αρχίζεις την κυρίως διαδικασία.

Πιθανή διακοπή και επανεκκίνηση: Ενόσω εκτελείς την κύρια διαδικασία, υπάρχει η δυνατότητα-επιλογή να τη διακόψεις και αν τη διακόψεις, να την ξαναρχίσεις ή να μην την ξαναρχίσεις.

Επανάληψη ή Συνέχιση: Όταν ολοκληρώσεις την κυρίως διαδικασία, μπορείς να την επαναλάβεις ή να τη συνεχίσεις.

Σκοπός: Εάν η πράξη εκτελείται για την επίτευξη κάποιου σκοπού, ελέγχεις αν πέτυχες το σκοπό.

Ολοκλήρωση: Εν συνεχεία κάνεις ό,τι είναι απαραίτητο για την ολοκλήρωση της πράξης.

Τελική Κατάσταση: Σε αυτό το σημείο, βρίσκεσαι στην τελική κατάσταση, όπου υπάρχουν τα αποτελέσματα και οι συνέπειες της πράξης.

Κάθε σύνθετη κινητική δραστηριότητα (όπως να σηκώσουμε ένα φλιτζάνι ή να ξύσουμε το κεφάλι μας) έχει την παραπάνω δομή.

Το σύστημα κινητικού ελέγχου σχετίζεται με τις έννοιες, ειδικά δε τις αφηρημένες έννοιες όπως αυτές βρίσκουν έκφραση στις γραμματικές των διαφόρων γλωσσών. Ο Narayanan παρατήρησε ότι το εν λόγω σχήμα κινητικού ελέγχου έχει την ίδια δομή με αυτό που στην γλωσσολογία ονομάζεται *όψη*, δηλαδή, με την εν γένει δομή των γεγονότων. Οτιδήποτε αντιλαμβανόμαστε ή θεωρούμε ως πράξη ή γεγονός νοείται σα να έχει την ανωτέρω δομή. Οι φυσικές γλώσσες κατέχουν τα γραμματικά μέσα για την αποκωδικοποίηση αυτής της δομής.

Στην εργασία του ο Narayanan υποστηρίζει ότι *η ίδια νευρική δομή που χρησιμοποιείται στον έλεγχο κινητικών σχημάτων σύνθετου χαρακτήρα μπορεί να χρησιμοποιηθεί στο συλλογισμό για γεγονότα και πράξεις* (Narayanan, 1977).

Η συγκεκριμένη δομή ονομάζεται *σχήμα όψεως*.

Από τη σκοπιά της γλωσσολογίας, η όψη είναι κατ' αρχήν μια γραμματική κατηγορία χρονικής υφής, η οποία ωστόσο διακρίνεται από τη γραμματική κατηγορία του χρόνου με ουσιαστικό τρόπο. Ενώ ο γραμματικός χρόνος τοποθετεί τα γεγονότα στον άξονα του χρόνου σε σχέση με το παρόν του ομιλούντος ή κάποιο άλλο γεγονός, η όψη αποδίδει τον τρόπο με τον οποίο ο ομιλών επιλέγει να δει και να παρουσιάσει ένα γεγονός σε σχέση με την εσωτερική χρονική ή άλλη σύστασή του. Συνεπώς, η όψη δεν αφορά την αντικειμενική χρονική σύσταση κάθε ενέργειας ή κατάστασης, αλλά τον τρόπο με τον οποίο ο ομιλών τη θεωρεί, και μάλιστα, αν τη θεωρεί συνοπτικά, ως σύνολο, χωρίς να ενδιαφέρεται για την εσωτερική της διάρθρωση ή αν τη θεωρεί στην εξέλιξή της και επιλέγει να μας δώσει πληροφορίες σχετικά. Εν τέλει, αν επιλέγει σημείο θέασης *έξω* από το γεγονός ή *μέσα* από το γεγονός. Στην πρώτη περίπτωση, η θέαση είναι *συνοπτική* ενώ στην δεύτερη, *μη συνοπτική*. («Τον Αύγουστο θα δουλέψω σε εστιατόριο» ↔ «Τον Αύγουστο θα δουλεύω σε εστιατόριο») (Μόζερ, 2007).

Από τα πλέον αξιοσημείωτα συμπεράσματα του Narayanan είναι ότι το ίδιο ακριβώς γενικό νευρικό σύστημα ελέγχου που μοντελοποίησε στην εργασία του, αν τεθεί ως είσοδος σε μύες, μπορεί να εκτελέσει μια σωματικά σύνθετη κίνηση, ενώ, αν δεν υπάρξει είσοδος σε μύες, μπορεί να εκτελέσει έναν λογικό συμπερασμό. Τούτο σημαίνει ότι τα νευρικά συστήματα ελέγχου των σωματικών κινήσεων έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά με αυτά που είναι απαραίτητα για την εξαγωγή λογικών συμπερασμών στο πεδίο της όψεως.

Ανάμεσα στους λογικούς συμπερασμούς του σχήματος όψεως, δυο συμπερασματικού χαρακτήρα σχήματα δόμησης είναι σπουδαία για τα Μαθηματικά:

Το στάδιο που χαρακτηρίζει μια διαδικασία ως ολοκληρωμένη βρίσκεται μακρύτερα από οποιοδήποτε στάδιο εντός της διαδικασίας της ίδιας.

Δεν υπάρχει σημείο της διαδικασίας μακρύτερα από το στάδιο ολοκλήρωσης της διαδικασίας της ίδιας.

Οι δυο αυτές συναγωγές, αν και σχεδόν προφανείς, είναι αξιοσημείωτης σπουδαιότητας για τα Μαθηματικά και εμφανίζονται στην κατασκευή της Βασικής Μεταφοράς του Απείρου.

Η Εννοιολογική Μεταφορά

Η μεταφορά θεωρείτο για μεγάλο διάστημα ως απλός τρόπος του λέγειν. Όμως, σχετικά πρόσφατα εμπειρικά ευρήματα έδειξαν ότι αποτελεί κεντρική διαδικασία στην καθημερινή σκέψη. Μάλιστα, αποτελεί το βασικό μηχανισμό που επιτρέπει την πρόσβαση σε μια αφηρημένη έννοια μέσω ενός πλέγματος απτών και συγκεκριμένων αισθητηριακών-κινητικών εμπειριών. Κύριο πόρισμα της γνωσιακής επιστήμης είναι ότι οι αφηρημένες έννοιες γίνονται τυπικά κατανοητές με όρους πιο συγκεκριμένων εννοιών, μέσω της μεταφοράς.

Εν είδη ορισμού, *εννοιολογική μεταφορά* είναι μια μονοκατευθυντική απεικόνιση στοιχείων από ένα σχετικά συγκεκριμένου χαρακτήρα εννοιολογικό πεδίο (πεδίο αφετηρίας) σε αντίστοιχα στοιχεία ενός άλλου σχετικά αφηρημένου εννοιολογικού πεδίου (πεδίο άφιξης). Η εν λόγω απεικόνιση μεταφέρει τη συμπερασματική δομή του πεδίου αφετηρίας στο πεδίο άφιξης, χωρίς ωστόσο να έχει χαρακτηριστικά ισομορφισμού: είναι εν μέρει συνεπής με την τοπολογία των δυο πεδίων. Οι απεικονίσεις των εννοιολογικών μεταφορών διατηρούν τη δομή των εικονοσχημάτων. Η γλωσσικές διατυπώσεις έπονται, με αποτέλεσμα πολλά ονόματα των εννοιών του πεδίου αφετηρίας να χρησιμοποιούνται επίσης για τις έννοιες του πεδίου άφιξης.

Στα Μαθηματικά χαρακτηριστική είναι η μεταφορά *Τα Σύνολα Είναι Δοχεία*, μέσω της οποίας καταλαβαίνουμε το σύνολο σαν φραγμένη περιοχή του χώρου και τα στοιχεία της σαν αντικείμενα μέσα σε αυτήν. Η μεταφορική αντιστοίχιση έχει ως εξής:

ΤΑ ΣΥΝΟΛΑ ΕΙΝΑΙ ΔΟΧΕΙΑ

Πεδίο Αφετηρίας ΔΟΧΕΙΑ		*Πεδίο Άφιξης* ΣΥΝΟΛΑ
Φραγμένες περιοχές του χώρου	→	Σύνολα
Αντικείμενα μέσα στο δοχείο	→	Στοιχεία του Συνόλου
Η μια φραγμένη περιοχή μέσα στην άλλη	→	Ένα Υποσύνολο

Ας υποθέσουμε ότι εφαρμόζουμε την ανωτέρω απεικόνιση στα δυο συμπερασματικού χαρακτήρα μορφώματα (δοχεία – σύνολα) που προαναφέραμε.

Πεδίο Αφετηρίας ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΟΙ ΤΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ ΕΓΚΛΕΙΣΜΟΥ		*Πεδίο Άφιξης* ΣΥΝΟΛΟΘΕΩΡΗΤΙΚΟΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΟΙ
Νόμος Αποκλείσεως Τρίτου Κάθε αντικείμενο Χ βρίσκεται είτε εντός του Δοχείου Α είτε εκτός του δοχείου Α.		Νόμος Αποκλείσεως Τρίτου Κάθε στοιχείο Χ είτε ανήκει στο σύνολο Α είτε δεν ανήκει στο σύνολο Α.
Νόμος Απόσπασης - Modus Ponens Δοθέντων δυο δοχείων Α και Β και ενός αντικειμένου Χ, αν το Α είναι μέσα στο Β και το Χ μέσα στο Α, τότε το Χ είναι μέσα στο Β.		Νόμος Απόσπασης - Modus Ponens Δοθέντων δυο συνόλων Α και Β και ενός στοιχείου Χ, αν το Α είναι υποσύνολο του Β και το Χ ανήκει στο Α, τότε το Χ ανήκει στο Β.
Νόμος Υποθετικού Συλλογισμού Δοθέντων τριών δοχείων Α, Β και Γ, αν το Α είναι μέσα στο Β και το Β μέσα στο Γ, τότε το Α είναι μέσα στο Γ.		Νόμος Υποθετικού Συλλογισμού Δοθέντων τριών συνόλων Α, Β και Γ, αν το Α είναι υποσύνολο του Β και το Β είναι υποσύνολο του Γ, τότε το Α είναι υποσύνολο του Γ.
Νόμος Συλλογισμού Αρνητικής Μορφής – Modus Tollens Δοθέντων δυο δοχείων Α και Β και ενός αντικειμένου Υ, αν το Α είναι μέσα στο Β και το Υ είναι έξω από το Β, τότε το Υ είναι έξω από το Α.		Νόμος Συλλογισμού Αρνητικής Μορφής – Modus Tollens Δοθέντων δυο συνόλων Α και Β και ενός στοιχείου Υ, αν το Α είναι υποσύνολο του Β και το Υ δεν ανήκει στο σύνολο Β, τότε το Υ δεν ανήκει στο σύνολο Α.

Πίνακας 1 (WMCF: 44)

Το συμπέρασμα εδώ είναι ότι οι ανωτέρω νόμοι της λογικής είναι μεταφορικές απεικονίσεις της χωρικής λογικής των σχημάτων εγκλεισμού, και ως τέτοιοι είναι θεμελιωμένοι στις νευρικές δομές που χαρακτηρίζουν τα εν λόγω σχήματα.

Η μεταφορά Τα Σύνολα Είναι Δοχεία αποτελεί μια εννοιολογικού χαρακτήρα μεταφορά και διατηρεί ως εκ τούτου τη συμπερασματική δομή του πεδίου αφετηρίας.

Η Εννοιολογική Μίξη

Εννοιολογική μίξη είναι ο εννοιολογικός συνδυασμός δυο διακριτών γνωστικών δομών με σταθερές αντιστοιχίες μεταξύ τους. Μια απλή περίπτωση στο πεδίο των Μαθηματικών αποτελεί ο μοναδιαίος κύκλος εμφυτευμένος στο καρτεσιανό επίπεδο. Οι σταθερές αντιστοιχίες είναι:

(α) το κέντρο του κύκλου είναι η αρχή των αξόνων και

(β) η ακτίνα του κύκλου είναι ίση με 1.

Η εν λόγω μίξη δημιουργεί συμπερασμούς που προκύπτουν τόσο από τις αντιστοιχίες τις ίδιες όσο και από τη συμπερασματική δομή των δυο πεδίων.

Όταν οι σταθερές αντιστοιχίες μιας εννοιολογικής μίξης δίνονται με μια μεταφορά, η μίξη ονομάζεται *μεταφορική μίξη*. Παράδειγμα αποτελεί η μίξη Αριθμός — Ευθεία Γραμμή, η οποία χρησιμοποιεί τις αντιστοιχίες που προκύπτουν από τη μεταφορά Οι Αριθμοί Είναι Σημεία Μιας Ευθείας. Κατά τη μίξη, προκύπτουν καινούργιες οντότητες, τα σημεία-αριθμοί, που είναι ταυτόχρονα σημεία μιας ευθείας αλλά και αριθμοί (Fauconnier 1997, Turner και Fauconnier 1995, 1998).

Κατά τη μηχανική προσέγγιση του Αρχιμήδη στο πρόβλημα του τετραγωνισμού της παραβολής αναγνωρίζεται η μεταφορική μίξη Το Ευθύγραμμο Τμήμα Είναι Ράβδος, όπου τα ευθύγραμμα τμήματα αντιμετωπίζονται σαν ομοιογενείς ράβδοι. Προϊόν της μίξης είναι μια καινούργια οντότητα, το Ευθύγραμμο Τμήμα – Ράβδος, το οποίο διατηρεί τις πρωτοτυπικές – γεωμετρικές ιδιότητες του ευθυγράμμου τμήματος αλλά και τη φυσική ιδιότητα του βάρους. Η επακόλουθη συμπερασματική δομή (ισορροπία των μοχλών) είναι καταλυτικής σημασίας για την επίλυση του προβλήματος του τετραγωνισμού.

Η Βασική Μεταφορά του Απείρου (ΒΜΑ)

Πρόκειται για μια γενικού χαρακτήρα εννοιολογική απεικόνιση, η οποία απαντάται εντός αλλά και εκτός των Μαθηματικών, ωστόσο κατανοείται με τον καλύτερο τρόπο στα πλαίσια του ακριβούς και αυστηρού πεδίου των Μαθηματικών. Οι Lakoff και Núñez θεωρούν ότι η ΒΜΑ είναι ένας απλός, καθημερινός ανθρώπινος αντιληπτικός μηχανισμός υπεύθυνος για τη δημιουργία ενεστωτικού απείρου κάθε είδους: από τα κατ' εκδοχήν σημεία της Προβολικής Γεωμετρίας, μέχρι τις σειρές, τα απειροσύνολα, τα απειροστά και τα όρια.

Η εν λόγω εννοιολογική απεικόνιση παρουσιάζεται στον παρακάτω Πίνακα 2.

Το πεδίο αφετηρίας περιέχει τις ολοκληρωμένες επαναληπτικές διαδικασίες (συνοπτικής όψεως). Στα Μαθηματικά, οι εν λόγω διαδικασίες αντιστοιχούν σε αυτές που είναι ορισμένες στο χώρο του πεπερασμένου. Το πεδίο άφιξης είναι ο χώρος ο οποίος περιέχει τις ατέρμονες επαναληπτικές διαδικασίες (μη συνοπτικής όψεως), και ως εκ τούτου χαρακτηρίζει διαδικασίες οι οποίες ενέχουν το δυνητικό άπειρο.

Πεδίο Αφετηρίας		*Πεδίο Άφιξης*
ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΕΣ (ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ) ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ		ΑΤΕΡΜΟΝΕΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ
Εναρκτήρια Κατάσταση	→	Εναρκτήρια Κατάσταση
Κατάσταση απορρέουσα από το αρχικό στάδιο της διαδικασίας.	→	Κατάσταση απορρέουσα από το αρχικό στάδιο της διαδικασίας.
Η Διαδικασία: Από μια δεδομένη ενδιάμεση κατάσταση δημιούργησε την επόμενη κατάσταση.	→	Η Διαδικασία: Από μια δεδομένη ενδιάμεση κατάσταση δημιούργησε την επόμενη κατάσταση.
Το ενδιάμεσο αποτέλεσμα μετά την επανάληψη της ανωτέρω διαδικασίας.	→	Το ενδιάμεσο αποτέλεσμα μετά την επανάληψη της ανωτέρω διαδικασίας.
Η τελική καταληκτική κατάσταση	→	**«Η τελική καταληκτική κατάσταση» (ενεστωτικό άπειρο)**
Συμπέρασμα: Η τελική καταληκτική κατάσταση είναι μοναδική και έπεται κάθε μη τελικής κατάστασης.	→	**Συμπέρασμα: Η τελική καταληκτική κατάσταση είναι μοναδική και έπεται κάθε μη τελικής κατάστασης.**

Πίνακας 2

Τα τέσσερα πρώτα στοιχεία του πεδίου άφιξης είναι κατά κυριολεξία ταυτόσημα με τα αντίστοιχα τέσσερα στοιχεία του πεδίου αφετηρίας. Η εννοιολογική μεταφορά είναι αυτή που επιβάλλει μια «τελική καταληκτική κατάσταση» στην ατέρμονη διαδικασία (στο τελευταίο στοιχείο του πεδίου άφιξης). Επιπροσθέτως, το κρίσιμο συμπέρασμα στο πεδίο άφιξης είναι προϊόν της ίδιας μεταφοράς: σε κάθε ολοκληρωμένη διαδικασία, η τελική καταληκτική κατάσταση είναι *μοναδική*. Αυτό σημαίνει ότι:

Δεν υπάρχει πρότερη καταληκτική κατάσταση: Δεν υπάρχει διακριτή πρότερη κατάσταση εντός της διαδικασίας η οποία να ακολουθεί το στάδιο ολοκλήρωσης αλλά και να προηγείται της τελικής κατάστασης της διαδικασίας.

Δεν υπάρχει ύστερη καταληκτική κατάσταση: Δεν υπάρχει άλλη κατάσταση της διαδικασίας η οποία να είναι αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης της διαδικασίας και να ακολουθεί την τελική κατάσταση της διαδικασίας.

Κατά αυτή την έννοια, η μοναδικότητα της τελικής κατάστασης μιας ολοκληρωμένης διαδικασίας είναι προϊόν της ανθρώπινης επίγνωσης και όχι οπωσδήποτε κάποιο γεγονός που αφορά στον εξωτερικό κόσμο: προκύπτει από τον τρόπο που αντιλαμβανόμαστε κάθε ολοκληρωμένη διαδικασία.

Η ΒΜΑ έρχεται να απεικονίσει τούτη τη ιδιότητα της μοναδικότητας των ολοκληρωμένων διαδικασιών και να την επιβάλει στο ενεστωτικό άπειρο. Το ενεστωτικό άπειρο είναι μοναδικό, μετά από *κάθε δεδομένη εφαρμογή της ΒΜΑ.*

Η διατύπωση αυτής της μεταφοράς έγινε με όρους μιας απλής, βήμα προς βήμα επαναληπτικής διαδικασίας: από μια δεδομένη κατάσταση δημιούργησε την επόμενη κατάσταση. Με δεδομένη την εναρκτήρια κατάσταση, η διαδικασία παράγει ενδιάμεσες καταστάσεις. Η μεταφορική διαδικασία διέρχεται μια απειρία τέτοιων ενδιάμεσων καταστάσεων και καταλήγει σε μια μεταφορική, μοναδική καταληκτική κατάσταση.

Η Πλασματική Κίνηση

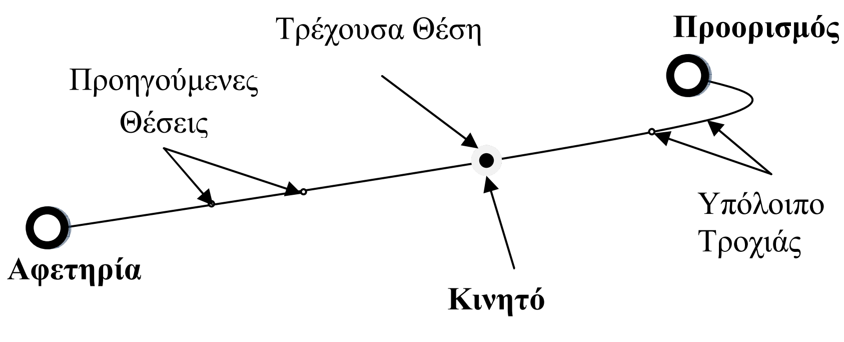
Για να προσεγγίσουμε από τη σκοπιά της γνωσιακής επιστήμης την ανάλυση του Αρχιμήδη στο πρόβλημα του τετραγωνισμού της παραβολής, απαραίτητη είναι επίσης η έννοια της *πλασματικής κίνησης* (Talmy, 1988). Πρόκειται για έναν θεμελιακό ενσώματο γνωστικό μηχανισμό μέσω του οποίου ασυνείδητα αντιλαμβανόμαστε στατικές οντότητες με δυναμικής φύσεως όρους.

Κάθε φυσική γλώσσα διαθέτει τρόπους να εκφράσει χωρικού τύπου έννοιες όπως *αφετηρίες* («από»), *προορισμούς* («προς»), καθώς και τις *διαδρομές* μεταξύ τους («μέσω», «κατά μήκος»). Οι εν λόγω έννοιες δεν εμφανίζονται απομονωμένες, αλλά αποτελούν μέρος μιας ευρύτερης ενότητας, του *σχήματος Αφετηρία-Διαδρομή-Προορισμός*. Πρόκειται για εικονοσχήμα που αναφέρεται στην κίνηση και συναρμόζεται από τα εξής επιμέρους στοιχεία:

- Ένα κινούμενο παράγοντα (: *κινητό*)
- Ένα σημείο (ή τοποθεσία) αφετηρίας
- Έναν τελικό προορισμό (του κινητού)
- Μια διαδρομή από την αφετηρία μέχρι τον προορισμό
- Την τρέχουσα τροχιά της κίνησης
- Τη θέση του κινητού σε μια δεδομένη χρονική στιγμή
- Την κατεύθυνση του κινητού τη δεδομένη χρονική στιγμή
- Την τρέχουσα τελική θέση του κινητού, η οποία ίσως είναι ή δεν είναι ο τελικός προορισμός.

Στο πεδίο της γλώσσας, στη φράση «ο δρόμος πηγαίνει στο δάσος», η κίνηση ανήκει αποκλειστικά στο χώρο της φαντασίας και η φράση η ίδια δεν περιέχει κυριολεξία οποιουδήποτε είδους.

Το κινητό μπορεί να είναι αντικείμενο είτε πραγματικό (ένα αυτοκίνητο που κινείται στο δρόμο) είτε μεταφορικής φύσεως (ο ισημερινός της Γης που διασχίζει πολλές χώρες).



Το ανωτέρω εικονοσχήμα έχει εγγενή χωρική λογική και ενσωματωμένες συμπερασματικές δομές:

- Αν έχεις διανύσει μια διαδρομή μέχρι την τρέχουσα θέση, έχεις διανύσει όλες τις προηγούμενες θέσεις της διαδρομής
- Αν έχεις μετακινηθεί από το σημείο *Α* στο σημείο *Β* και από το σημείο *Β* στο σημείο *Γ*, τότε έχεις μετακινηθεί από το *Α* στο *Γ*
- Αν υπάρχει απευθείας διαδρομή από το *Α* προς το *Β* και κινείσαι σε αυτή τη διαδρομή προς το *Β*, τότε πλησιάζεις ολοένα εγγύτερα στο *Β*.
- Αν τα *Χ* και *Υ* κινούνται από το *Α* προς το *Β* σε απευθείας διαδρομή και το *Χ*

προσπερνά το *Y*, τότε το *X* είναι μακρύτερα από το *A* και πλησιέστερα στο *B* από ότι το *Y*.

Πρόκειται για σχήμα με βαρύνουσα σημασία στη μαθηματική σκέψη. Οι συναρτήσεις στο καρτεσιανό επίπεδο συχνά γίνονται αντιληπτές με όρους κίνησης, όταν για παράδειγμα τις περιγράφουμε σαν να «ανεβαίνουν», να «φθάνουν» σε μια μέγιστη τιμή και κατόπιν να «κατεβαίνουν». Στη Γεωμετρία επίσης, σκεφτόμαστε δυο ευθείες σαν να «συναντώνται» σε ένα σημείο ή να «διέρχονται» από αυτό. Στα Μαθηματικά, έχει μεταφορικό χαρακτήρα πάντα. Στην πρόταση «το σημείο Μ κινείται από το σημείο Α μέχρι το σημείο Β», αποδίδουμε κίνηση σε μια μεταφορική οντότητα η οποία τυπικά, έχει μόνον θέση.

Παραπλήσια περιγραφή διακρίνεται στον Αριστοτέλη, όπου, το σημείο (*στιγμή*) θεωρείται σαν ένα άκρο, μια χρονική αφετηρία, ή ένα σημείο διαίρεσης μιας ευθείας. Το ίδιο δεν αποτελεί μέγεθος, ούτε μέρος μεγέθους ή ευθείας· μπορεί όμως μετέχοντας της κίνησης να παραγάγει μια γραμμή και να αποτελέσει έτσι αφετηρία ενός μεγέθους (*Φυσικής Ακροάσεως* Δ, 220α 9-11).

Στα περισσότερα εγχειρίδια Απειροστικού Λογισμού, πριν τον τυπικό *ε-δ* ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης αφιερώνονται συνήθως μια-δυο παράγραφοι σε μια άτυπη περιγραφή της ιδέας της συνέχειας, με επίκληση στην ενόραση. Στο εγχειρίδιο *Mathematics, Its Contents, Methods and Meaning* των Aleksandrov, Kolmogorov, και Lavrent'ev αναφέρεται: «Μπορούμε να αποκτήσουμε τη γενική ιδέα μιας συνεχούς συνάρτησης από το γεγονός ότι η γραφική της παράσταση είναι συνεχής, δηλαδή μπορούμε να σχεδιάσουμε την καμπύλη της χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί».

Παρόμοια, στο κλασικό εγχειρίδιο "Calculus" του G. Simmons αναγράφεται για το ίδιο θέμα: «Στην καθομιλουμένη, συνεχής διαδικασία είναι εκείνη που εκτυλίσσεται χωρίς κενά ή διακοπές ή ξαφνικές αλλαγές».

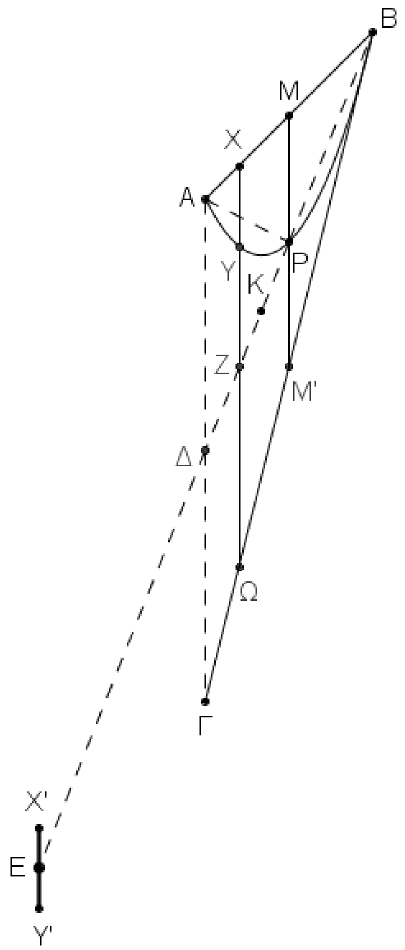
Και στα δυο εγχειρίδια η περιγραφή της συνέχειας γίνεται με δυναμικούς όρους. Κάτι «κινείται»: ένα μολύβι σχεδιάζει μια καμπύλη, κάτι «εκτυλίσσεται χωρίς κενά». Και οι δυο περιγραφές αντιστοιχούν με ακρίβεια στην έννοια του *φυσικού συνεχούς* όπως αυτό έχει περιγραφεί από τους Lakoff και Núñez (1998).

Η πλασματική κίνηση στα Μαθηματικά λειτουργεί επί ενός δικτύου εξαιρετικής ακρίβειας εννοιολογικών μεταφορών, όπως Οι Αριθμοί Είναι Θέσεις Στο Χώρο (που μας επιτρέπει να αντιλαμβανόμαστε τους αριθμούς με όρους χωρικών θέσεων) και μας παρέχει την απαραίτητη συμπερασματική δομή για να αντιλαμβανόμαστε τις συναρτήσεις σαν να έχουν κίνηση και κατεύθυνση. Η εννοιολογική μεταφορά παράγει μια ακραιφνώς φανταστική οντότητα εντός ενός μεταφορικού χώρου, ενώ η πλασματική κίνηση την μετατρέπει σε κινητό εντός του μεταφορικού χώρου (Núñez, 2006).

Ο Τετραγωνισμός της Παραβολής

Το 1906 ανακαλύπτεται τυχαία το πιο εκπληκτικό έργο του Αρχιμήδη (287-212 π.Χ.), το «*Περί των μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένην έφοδος*», όπου περιγράφεται με συστηματικό τρόπο, πώς ο Αρχιμήδης *συνέλαβε* τα σημαντικότερα αποτελέσματά του. Το παλίμψηστο χειρόγραφο βρέθηκε στην Κωνσταντινούπολη κάτω από ένα στρώμα βυζαντινών προσευχών με το οποίο είχε επικαλυφθεί κατά τον 13^{ο} αιώνα. Στον πρόλογο αυτού του έργου, ο Αρχιμήδης αναφέρει ρητά ότι πρώτα ανακάλυψε «μηχανικώς» και κατόπιν απέδειξε «γεωμετρικώς» τα πιο ωραία αποτελέσματά του. Επίσης, εκθειάζει την αποτελεσματικότητα της μεθόδου της «εξάντλησης», η οποία ωστόσο υποκρύπτει μια κρίσιμη προϋπόθεση: πρέπει κανείς να γνωρίζει εκ των προτέρων το ακριβές αποτέλεσμα αυτού που θα αποδείξει, *πριν* το αποδείξει μέσω αυτής της μεθόδου.

Ποιοι ενσώματοι μηχανισμοί κατά το παράδειγμα της γνωσιακής επιστήμης των ενσώματων Μαθηματικών διακρίνονται και ποιες έννοιες της σύγχρονης γνωσιακής επιστήμης αναγνωρίζονται στην ευρετική πορεία που περιέγραψε ο Αρχιμήδης;



Σχήμα 2

Το πρόβλημα που απασχόλησε τον Αρχιμήδη ήταν η αναγωγή του εμβαδού $\mathcal{E}$ του παραβολικού τμήματος *ΑΒΡΥΑ* σε εμβαδόν ενός τριγώνου.
Στο Σχήμα 2, *ΒΓ* είναι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο *Β*, *Μ* είναι το μέσον του *ΑΒ*, οι *ΜΡΜ΄* και *ΑΓ* είναι παράλληλες προς τον άξονα της παραβολής, *Υ* είναι τυχόν σημείο του παραβολικού τόξου και η *ΧΥΩ* είναι παράλληλη προς τον άξονα της παραβολής. Φέρουμε επίσης την *ΒΡ* η οποία τέμνει τις *ΧΩ* και *ΑΓ* στα σημεία *Ζ* και *Δ* αντιστοίχως. Στην προέκταση της *ΒΔ* θεωρούμε τα τμήματα *ΔΕ=ΒΔ* και τέλος, φέρουμε το τμήμα *Χ΄Υ΄* παράλληλο και ίσο με το *ΧΥ*.
Κρίσιμη σχέση για τη διαδικασία είναι η

$$\frac{AX}{AB} = \frac{XY}{X\Omega} \qquad (1)$$

Πρόκειται για τη μοναδική σχέση με «αλγεβρική» ποιότητα, καθώς ξεφεύγει από τη συνήθη συλλογιστική των αρχαίων γεωμετρών με όμοια τρίγωνα: το σημείο *Υ* είναι τομή ευθείας με καμπύλη. Τέτοια σημεία υπολογίζονται σήμερα από τη λύση ενός μη γραμμικού συστήματος.
Με εφαρμογή της (1) για το μέσον *Μ* του *ΑΒ*, προκύπτει ότι

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MP}{MM'} = \frac{1}{2}$$

Άρα, το *Ρ* είναι μέσον του *ΜΜ΄* και συνεπώς, λόγω της παραλληλίας των *ΜΜ΄, ΧΩ* και *ΑΓ*, το *Ζ* είναι μέσον του *ΧΩ* και το *Δ* μέσον του *ΑΓ*.
Επίσης, λόγω της παραλληλίας των *ΑΓ, ΧΩ* :

$$\frac{AX}{AB} = \frac{\Delta Z}{\Delta B} \qquad \text{ή} \qquad \frac{AX}{AB} = \frac{\Delta Z}{\Delta E} \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει

$$\frac{XY}{X\Omega} = \frac{\Delta Z}{\Delta E} \qquad \text{ή} \qquad \frac{X'Y'}{X\Omega} = \frac{\Delta Z}{\Delta E} \qquad (3)$$

Αν θεωρήσουμε ότι τα τμήματα $XY = X'Y'$ και $X\Omega$ είναι ράβδοι κατασκευασμένες από το ίδιο ομοιογενές υλικό, τότε τα βάρη τους, έστω F και F' , θα εφαρμόζονται στα μέσα τους E και Z αντίστοιχα.
Η (3) προσαρμοσμένη στη νέα θεώρηση, γράφεται

$$F' \cdot \Delta E = F \cdot \Delta Z \qquad (4)$$

Σύμφωνα με το νόμο της ισορροπίας των μοχλών (μοχλός το BE, υπομόχλιο το Δ), η ισότητα (4) δηλώνει ότι η ράβδος XY μεταφερμένη στη θέση E, *ισορροπεί* την ράβδο $X\Omega$ (στη θέση της).
Εφόσον το τρίγωνο $AB\Gamma$ αποτελείται από όλα τα παράλληλα τμήματα $X\Omega$ και το παραβολικό τμήμα $ABPYA$ αποτελείται από όλα τα παράλληλα τμήματα που άγονται με τον τρόπο του XY, το τρίγωνο $AB\Gamma$ (στη θέση του) ισορροπεί το παραβολικό τμήμα $ABPYA$ μεταφερμένο στο σημείο E. Επειδή το $AB\Gamma$ ισορροπεί στο κέντρο βάρους του K και το τμήμα $ABPYA$ (μεταφερμένο) στο κέντρο βάρους E, θα ισχύει

$$\mathcal{E} \cdot \Delta E = (\Delta\, AB\Gamma) \cdot K\Delta \qquad (5)$$

Η θέση του κέντρου βάρους του τριγώνου είναι γνωστή και προσδιορίζεται από την αναλογία

$$\frac{K\Delta}{B\Delta} = \frac{1}{3} \quad \text{ή} \quad \frac{K\Delta}{\Delta E} = \frac{1}{3} \qquad (6)$$

Από τις σχέσεις (5) και (6) προκύπτει ότι

$$\frac{\mathcal{E}}{\left(\Delta\, AB\Gamma\right)} = \frac{1}{3} \qquad (7)$$

Τούτη η τελευταία σχέση επιτυγχάνει το ζητούμενο: την αναγωγή του εμβαδού του παραβολικού τμήματος σε αυτό ενός τριγώνου.
Επειδή η διαδικασία περιλαμβάνει την κατασκευή του μάλλον περίπλοκου τριγώνου $AB\Gamma$, ο Αρχιμήδης προχωράει σε μια απλοποίηση:

$$\left(\Delta\, AB\Gamma\right) = 2\left(\Delta\, AB\Delta\right) = 4\left(\Delta\, ABP\right)$$

οπότε η σχέση (7) αποκτά την οριστική μορφή:

$$\frac{\mathcal{E}}{\left(\Delta\, ABP\right)} = \frac{4}{3} \qquad (8)$$

Το σημείο P προκύπτει πλέον, ως σημείο τομής της παράλληλης προς τον άξονα της παραβολής, η οποία άγεται από το μέσον του AB, με το παραβολικό τόξο. Πρόκειται για την κορυφή της παραβολής. □

Τι είναι Απόδειξη;
Ο Αρχιμήδης δεν θεωρούσε την παραπάνω διαδικασία *απόδειξη* της σχέσης (8), αλλά μάλλον μια χρήσιμη *μηχανική* διαδικασία, μέσα από την οποία σχημάτισε αρχικά την πεποίθηση ότι το μαθηματικό συμπέρασμα ήταν ορθό, ώστε να μπορέσει να διατυπώσει με ακριβείς όρους την πρότασή του. Για ποιο λόγο η μηχανική διαδικασία δεν χαρακτηρίστηκε από τον Αρχιμήδη ως *απόδειξη*; Κάποιες εύλογες εικασίες είναι δυνατόν να διατυπωθούν προς αυτή την κατεύθυνση. Ο Dijkterhuis (1957) σημειώνει

ότι ο Αρχιμήδης κάνει χρήση δύο διαφορετικών αρχών στην παραπάνω ευρετική διαδικασία. Πρώτον, ενός πλαισίου ιδεών οι οποίες προέρχονται από τη Μηχανική, καθώς αντιλαμβάνεται τα γεωμετρικά σχήματα προσαρμοσμένα σε ένα μοχλό με τρόπο ώστε ο μοχλός να παραμένει σε ισορροπία, και κατόπιν διατυπώνει τις σχετικές συνθήκες ισορροπίας (*βαρυκεντρική ή μηχανική μέθοδος*). Δεύτερον, της ιδέας ότι ένα επίπεδο σχήμα αποτελείται από όλα τα ευθύγραμμα που άγονται παράλληλα προς μια κατεύθυνση και ως εκ τούτου, το εμβαδόν του μπορεί να προκύψει ως το «άθροισμα των μηκών» όλων αυτών των ευθυγράμμων τμημάτων (*μέθοδος των αδιαιρέτων*).

Η μαθηματική επιφύλαξη του Αρχιμήδη δεν φαίνεται να προέρχεται από την εφαρμογή της μηχανικής μεθόδου. Αυτήν εξάλλου την χρησιμοποίησε ξανά στην πραγματεία του για τον Τετραγωνισμό της Παραβολής, δηλαδή στην επίσημη δημοσίευση των συμπερασμάτων του, και συνεπώς μπορούμε με σχετική ασφάλεια να υποθέσουμε ότι ικανοποιούσε όλες τις απαιτήσεις ακρίβειας και αυστηρότητας. Ο δισταγμός και η αμφιβολία έχουν να κάνουν με την εφαρμογή της μεθόδου των *αδιαιρέτων*. Εδώ ο Αρχιμήδης ήρθε αντιμέτωπος με το μείζον και αντιφατικό για την αρχαιοελληνική σκέψη ζήτημα των άπειρων διαδικασιών και των προϋποθέσεων ένταξής τους στην αποδεικτική διαδικασία. Το θεμελιώδες δίλημμα περί διακριτής ή συνεχούς συγκρότησης της ύλης είχε μεταφερθεί ήδη νωρίτερα στα Μαθηματικά και είχε βρει μάλιστα τη γλαφυρή διατύπωσή του στην απορία του Δημόκριτου: αν οι παράλληλες προς την βάση του κώνου τομές είναι ίσες, πώς διαφοροποιείται ο κώνος από τον κύλινδρο; Αν πάλι βαίνουν μειούμενες προς την κορυφή, τότε η επιφάνεια αντί να είναι ομαλή δεν θα έπρεπε να είναι κλιμακωτή;

Η εντυπωσιακή επιχειρηματολογία του Ζήνωνος του Ελεάτη στο παράδοξο της κίνησης φαίνεται ότι αποτέλεσε για τον $4^{ο}$ π. Χ. αιώνα μια τεράστιας απήχησης διανοητική πρόκληση περί του μαθηματικού συνεχούς και σήμανε το τέλος στις πρόχειρες χρήσεις των άπειρων διαδικασιών. Η μέθοδος της εξάντλησης με την διπλή εις άτοπον απαγωγή στο έργο του Αρχιμήδη επανέφερε την αυστηρότητα στις εν λόγω διαδικασίες.

Η *Έφοδος* μας αποκάλυψε –και αυτό αποτελεί μια πρόσθετη σημαντική συνεισφορά της – ότι η μέθοδος των αδιαιρέτων ήταν μεν απαγορευμένη από τις δημοσιευμένες πραγματείες, είχε όμως αμείωτη επιρροή στο μαθηματικό εργαστήρι, εκεί όπου διαμορφώνονταν οι ιδέες. Αποκάλυψε επίσης ότι η παρουσίαση των μαθηματικών εννοιών είναι διαχρονικά κάτι πολύ διαφορετικό από την αρχική ανακάλυψή τους. Ο Αρχιμήδης ενόσω αναζητεί καινούργια μαθηματικά αποτελέσματα, θεωρεί ότι το παραβολικό τμήμα αποτελείται από όλες τις ευθύγραμμες συνιστώσες του και ότι ένα στερεό αποτελείται από όλες τις παράλληλες επίπεδες τομές του˙ και όταν μιλάει για ένα σχήμα, χρησιμοποιεί τις «χαλαρές» εκφράσεις "όλα τα ευθύγραμμα τμήματα" ή "όλοι οι κύκλοι". Αυθαίρετοι τρόποι σκέψης ενσωματωμένοι στην πλέον ορθολογική επιστήμη;

Από τη σκοπιά της γνωσιακής επιστήμης, πρόκειται για ένα πλέγμα εννοιολογικών περιεχομένων με άμεση ενσώματη προέλευση. Η *συνεχής* διαδικασία έχει περιγραφεί από μεταγενέστερους εμβληματικούς μαθηματικούς όπως ο Newton και ο Leibniz τον $17^{ο}$ αιώνα, ως μια διαδικασία που εκτυλίσσεται χωρίς κενά ή διακοπές ή ξαφνικές απότομες αλλαγές. Το γνωσιακό περιεχόμενο τέτοιων περιγραφών περιλαμβάνει κίνηση, ροές, διαδικασίες, μεταβολές στο χρόνο και συνοπτικές, ολιστικές θεωρήσεις. Θεωρούνται εννοιολογικές επεκτάσεις εικονοσχημάτων και εννοιολογικών απεικονίσεων σύμφυτων με το ανθρώπινο εννοιολογικό σύστημα, οι οποίες εδράζονται μεταξύ άλλων στο σχήμα Αφετηρία-Διαδρομή-Προορισμός, στην μεταφορά της πλασματικής κίνησης και σε βασικές εννοιολογικές μίξεις (Núñez &

Lakoff, 1998).

Η μηχανική μέθοδος στην περίπτωση του τετραγωνισμού, εμφανίζει αμέσως μια εννοιολογική μεταφορά: Το Ευθύγραμμο Τμήμα Είναι Ράβδος. Τα τμήματα *ΧΥ*, *Χ΄Υ΄* και *ΧΩ* (Σχήμα 2) λογίζονται σαν ράβδοι κατασκευασμένες από το ίδιο, ομοιογενές υλικό. Η εννοιολογική μίξη Ευθύγραμμο Τμήμα-Ράβδος παράγει μια καινούργια οντότητα η οποία διατηρεί τις πρωτοτυπικές ιδιότητες ενός ευθυγράμμου τμήματος (έχει μήκος αλλά όχι πλάτος) ενώ ταυτόχρονα έχει υλική υπόσταση (έχει βάρος). Μάλιστα, στην περίπτωση του *ΒΕ*, μπορεί να παίξει ρόλο μοχλού. Στην ίδια κατεύθυνση κινείται η μεταφορά Το Σημείο Είναι Υπομόχλιο. Το όλο εννοιολογικό πλέγμα εντάσσεται στο εικονοσχήμα της ισορροπίας. Εν συνεχεία, κατά τον ενσώματο μηχανισμό της *πλασματικής κίνησης* το σημείο *Χ* διατρέχει το τμήμα *ΑΒ*. Το συνακόλουθο τμήμα *ΧΥ* «κινείται» παράλληλα προς τον εαυτό του από το σημείο *Α* μέχρι το σημείο *Β*, διέρχεται μια απειρία ενδιάμεσων θέσεων και «γεμίζει» έτσι τη θεωρούμενη επιφάνεια *ΑΒΡΥΑ*. Έτσι, η επιφάνεια *ΑΒΡΥΑ* αποτελείται από «όλα» τα τμήματα *ΧΥ*. Η συνοπτική θέαση αυτής της άπειρης διαδικασίας, κατά την έννοια της Βασικής Μεταφοράς του Απείρου, επιβάλλει στη διαδικασία ένα μοναδικό όσο και εννοιολογικά «αυτονόητο» πέρας: την επιφάνεια *ΑΒΡΥΑ* εν συνόλω. Ταυτόχρονα το *ΧΩ* σαρώνει το τρίγωνο *ΑΒΓ*. Το όλο σύστημα «ισορροπεί» και η συμπερασματική δομή της ισορροπίας των μοχλών δίνει το τελικό ποσοτικό αποτέλεσμα.

Τα εξαιρετικά γόνιμα μαθηματικά συμπεράσματα που προέκυψαν σε αυτό το γνωσιακό περιβάλλον, χαρακτηρίζονται ως πρόδρομες ιδέες του απειροστικού λογισμού. Όμως, χρειάστηκαν μια μακρά ιστορική περίοδο μαθηματικής ωρίμανσης προς την κατεύθυνση της τυπικής σκέψης, για την οριστική νομιμοποίησή τους.

Κατακλείδα

Παρά τα ακόμη ανοικτά ερευνητικά θέματα, το ερμηνευτικό μοντέλο των ενσώματων Μαθηματικών παρουσιάζεται ικανό να ερμηνεύσει από *εννοιολογική άποψη* σημαντικές πτυχές της μαθηματικής γνώσης, οι οποίες επιφανειακά εμφανίζονται αποσυνδεδεμένες από την άμεση αισθητικοκινητική εμπειρία και συμπεριφορά.

Τονίζει τη σπουδαιότητα του γλωσσικού οργάνου στην αποκάλυψη του ρόλου των εννοιολογικών μεταφορών κατά την πραγμάτευση των μαθηματικών ιδεών. Ιδιαίτερα, επιχειρεί να διερευνήσει και να κατανοήσει το εννοιολογικό χάσμα το οποίο συχνά υφίσταται ανάμεσα στην τυπική και την ενορατική όψη των Μαθηματικών.

Επιστημολογικά, ανήκει στις «δάνειες θεωρίες», τις ενσωματωμένες πλέον στο πεδίο της έρευνας για τη μαθηματική εκπαίδευση, καθώς αντλεί από το πεδίο της ενσώματης γνωσιακής επιστήμης. Θεωρητικά εργαλεία της τελευταίας έχουν χρησιμοποιηθεί σε ερευνητικές μελέτες στα πεδία του μαθηματικού συμβολισμού, της εξεικόνισης - οπτικοποίησης, της μοντελοποίησης με ή χωρίς τη χρήση τεχνολογίας, των ανισοτήτων, των γραμμικών εξισώσεων, του ορίου και της συνέχειας συναρτήσεων, των διανυσμάτων, της εν γένει μαθηματικής σκέψης και κατανόησης, της μεταφορικής γλώσσας στη Γεωμετρία κ.α.

Γενικότερα, η έννοια του *ενσώματου* καταλαμβάνει σήμερα μια θέση Παραδείγματος στην έρευνα για τη σκέψη και τη μάθηση, παρέχοντας πρόσθετα εργαλεία στην πολυτροπική προσέγγιση της μαθηματικής γνώσης και εκπαίδευσης.

Καινούργια χαρακτηριστικά της μαθηματικής γνώσης αναδύονται συνεχώς, παρότι, με τα λόγια του Δαρβίνου, συχνά «χρησιμοποιούμε παλιούς τροχούς, παλιά ελατήρια και παλιές τροχαλίες».

Βιβλιογραφία

Barton, B. (2008). *The Language of Mathematics.* Springer.

Dehaene, S. (1977). *The Nunber Sense: How the Mind Creates Mathematics.* New York: Oxford University Press.

Dijkterhuis, E. (1957). *Archimedes.* New York: Humanities Press.

Edwarts, C. H. (1979). *The Historial Development of the Calculus.* New York: Springer Verlag.

Gardner, H. (1987). *The Mind's New Science: A History of the Cognitive Revolution.* New York: Basic Books.

Heath, T. (1953). *The Works of Archimedes.* New York: Dover.

Lakoff, G., & Johnson, M. (2003). *Metaphors We Live By.* London: The University of Chicago Press.

Lakoff, G., & Johnson, M. (1999). *Philosophy in the Flesh. The Embodied Mind and it's Challenge to Wesrern Thought.* New York: Basic Books.

Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From.* Basic Books

Narayanan, S. (1977). Embodiment in Language Understanding: Sensory-Motor Representations for Metaphoric Reasoning about Event Descriptions. (Ph.D. Desertetion).

Núñez, R. (1993a). Approaching Infinity: A view from cognitive psychology. *Proceedings of 15th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathmatics Education*, (σσ. 105-111). North America.

Núñez, R. (2003). Conceptual Metaphor and the Cognitive Foundations of Mathematics: Actual Infinity and Human Imagination. *Metaphor and Contemporary Science (pp. 49-72)* , 49-72. Singapore: National University of Singapore.: B. Baaquie & P. Pang: University Scholars Occasional Papers Series.

Núñez, R. (2005). Creating Mathematical Infinities: Metaphor, Blending, and the beauty of Transfinite Cardinals. *Journal of Pragmatics* (37), 1717-1741.

Núñez, R. (2006). Do Real Numbars Really Move? Στο R. (. Hersh, *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics* (σσ. 171-172). NY: SpringerScience+Business Media, Inc.

Núñez, R. (1999). Embodied Cognition as Grounding for Situatedness and Contex in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics* (39), 45-65.

Núñez, R. (1990). Infinity in Mathematics as a scientific subject matter for cognitive psychology. *Proceedings of the 14th Conference of Internatiomal Group for Psychology of Mathematics Education*, (σσ. 77-84).

Núñez, R. (2000). Mathematical Idea Analysis: What Embodied Cognitive Science Can Say About the Human Nature of Mathematics. *Proceedings of the 24th International Conference, Psychology of Mathematics*, (σσ. 3-22). Hiroshima, Japan.

Núñez, R. (2005). The Cognitive Foundations of Mathematics, The Role of Conceptual Metaphor. *Handbook of Mathematical Cognitin* .

Núñez, R., & Lakoff, G. (1998). What did Weierstrass really define? The cognitive structure of natural and ε-δ continuity. *Mathematical Cognition, 4(2)* , 85-101.

Talmy, L. (1988). Force Dynamics in language and cognition. *Cognitive Science,12* , 49-100.

Wilson, M. (2002, 9(4)). Six views of embodied cognition. *Psychonomic Bulletin & Review* , 625-636.

Αναπολιτάνος, Δ. Α. (1985). *Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών.* Αθήνα: Εκδόσεις Νεφέλη.

Μόζερ, Α. (2007). *Όψη.* Ανάκτηση 06/ 05/ 2010, από Πύλη για την Ελληνική γλώσσα και την γλωσσική εκπαίδευση: www.greek-language.gr/greekLang/modern_greek/tools/lexica/glossology/

Στράντζαλος, Χ. (1989). *Η Εξέλιξη των Ευκλείδειων και των Μη Ευκλείδειων Γεωμετριών.* Αθήνα: Εκδόσεις Καρδαμίτσα.

Σημείωση

Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών «Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά» της Σχολής Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου και αποτελεί μέρος της διπλωματικής εργασίας του συγγραφέως, η οποία εκπονήθηκε υπό την επίβλεψη του Δρ. Ανούση Μιχάλη, Καθηγητή Πανεπιστημίου Αιγαίου, Τμήμα Μαθηματικών (mano@aegean.gr).