

## Ανοικτή Εκπαίδευση: το περιοδικό για την Ανοικτή και εξ Αποστάσεως Εκπαίδευση και την Εκπαιδευτική Τεχνολογία

Τόμ. 8, Αρ. 1 (2012)

Ανοικτή Εκπαίδευση



Διδασκαλία των Μαθηματικών: χθες και σήμερα

Δημήτρης Κωστίνογ

doi: [10.12681/jode.9784](https://doi.org/10.12681/jode.9784)

Βιβλιογραφική αναφορά:

## Διδασκαλία των Μαθηματικών: χθες και σήμερα

### Teaching Mathematics: past and present

Κωστήνος Δημήτρης

Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας

Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

[diko-mas@otenet.gr](mailto:diko-mas@otenet.gr)

#### Περίληψη

Η επιστήμη των μαθηματικών δεν παύει να αντιμετωπίζεται με δέος από όσους ανακαλύπτουν τη λογική και τις εφαρμογές της. Το σχολείο παίζει καθοριστικό ρόλο στην ανακάλυψη αυτή, καθώς οδηγεί το μαθητή στα μονοπάτια της μαθηματικής σκέψης που, με την κατάλληλη καθοδήγηση, μπορεί να επηρεάσει την οικοδόμηση της δικής του προσωπικότητας και ζωής.

Την καθοδήγηση του εκπαιδευόμενου στα μονοπάτια αυτά αναλαμβάνει ο μαθηματικός. Ο τελευταίος, έχοντας αφήσει πίσω του τη δασκαλοκεντρική διδακτική πράξη του περασμένου αιώνα και ακολουθώντας νέα προγράμματα σπουδών που έχουν προκύψει από μακροχρόνιες έρευνες, αντιλαμβάνεται πλέον το ρόλο του ως συνοδοιπόρου στις αναζητήσεις και τους πειραματισμούς των μαθητών του. Στο έργο του αυτό έχει πλέον στη διάθεσή του και τα σύγχρονα τεχνολογικά μέσα, που του παρέχουν ασύγκριτα περισσότερες δυνατότητες. Με την κατάλληλη αξιοποίηση της υλικοτεχνικής υποδομής και των διαθέσιμων λογισμικών ο μαθηματικός μπορεί να εξοικονομήσει πολύτιμο χρόνο από την εκτέλεση απλών μηχανικών εργασιών, τον οποίο θα διαθέσει εποικοδομητικότερα για την ανάλυση και την επεξήγηση τρόπων προσέγγισης διαφόρων προβλημάτων.

Η κριτική αντιμετώπιση της νέας τεχνολογίας διασφαλίζει αφενός τη θέση του εκπαιδευτικού ως καθοδηγητή σε μια μαθητοκεντρική τάξη και αφετέρου τη βέλτιστη απόδοση των χρησιμοποιούμενων μέσων. Κατ' αυτόν τον τρόπο ο μαθηματικός μπορεί να συντελέσει και στην αναβάθμιση του προγράμματος σπουδών, υποδεικνύοντας πραγματικούς στόχους και συνδέοντας τη διδακτική πράξη με το κοινωνικό γίγνεσθαι. Έτσι αναδεικνύεται ο πραγματικός ρόλος της τεχνολογίας και του διδάσκοντος στο νέο ελπιδοφόρο αλλά και γεμάτο παγίδες εκπαιδευτικό πλαίσιο.

#### Abstract

Mathematics has always been treated with awe by those exploring its logic and applications. School plays an essential part in this exploration, since it shows students the paths of mathematical reasoning which, if properly followed, may help them build their personality and life.

Professors of mathematics lead the way along these paths. They have left behind the past century teaching methods which place professor in the centre of teaching; they follow the reformed curricula which have resulted from long lasting mathematical

research and they now realize their role as fellow-travellers sharing questions and experimentations of their students, whatever these may be. In this task, professors of mathematics can nowadays use, in addition to traditional teaching aids, new information technologies, which provide them with incomparably more skills and options. Proper exploitation of material and technical infrastructure, as well as of available software packages, can save professors of mathematics a great deal of time and work for the execution of simple routine work, in favour of analyzing and explaining different approaches to various problems.

New technology potential, if treated critically by professors, on the one hand guarantees the leading part of professors in a class focused on student and on the other maximizes the effect of the aids used. In doing so, professors of mathematics may also contribute to the upgrading of curricula, pointing out realistic aims and connecting teaching to social needs. It's this critical treatment that shows off the actual role that technology and professor can play in the new promising but quite tricky educational environment that emerges.

### **Λέξεις κλειδιά**

*διδασκαλία μαθηματικών, μαθηματικός, νέες τεχνολογίες*

### **Η εξελικτική πορεία στις έρευνες και αντιλήψεις για τη διδασκαλία των μαθηματικών**

Η επιστήμη των μαθηματικών αποτελεί ένα ερευνητικό πεδίο σε διαρκή εξέλιξη. Τον 20<sup>ο</sup> αιώνα η έρευνα αφορούσε κυρίως την πρωτοβάθμια εκπαίδευση, ενώ από τη δεκαετία του '60 και μετά το ενδιαφέρον στρέφεται και στη δευτεροβάθμια και μεταδευτεροβάθμια εκπαίδευση. Κατά τις δεκαετίες '70-'90 οι ερευνητές ασχολούνται πολύ και με την εκπαίδευση των Μαθηματικών στο πλαίσιο της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, καθώς και με τη διδασκαλία των μαθηματικών σε ενήλικες οι οποίοι για κάποιο λόγο επιθυμούν να συνεχίσουν τη φοίτησή τους στο σχολείο.

Η ίδια διεύρυνση χαρακτηρίζει και το γνωστικό αντικείμενο της διδασκαλίας των μαθηματικών. Έτσι τις δεκαετίες '60-'70 τους μαθηματικούς απασχολεί κυρίως τι πρέπει να διδαχθεί και πώς: ποιες μαθηματικές ενότητες να συμπεριλάβουν στο πρόγραμμα, σε ποια θεωρητική βάση, με ποια σειρά, τι πρέπει να κάνει ο εκπαιδευτικός στην τάξη και ποια χρονική στιγμή, τι πρέπει να κάνει ο μαθητής, πώς πρέπει να είναι τα σχολικά εγχειρίδια και πώς να χρησιμοποιούνται τα τεχνικά βοηθήματα διδασκαλίας ούτως ώστε να εξυπηρετούν τη «σωστή» μετάδοση των γνώσεων από τον εκπαιδευτικό στον εκπαιδευόμενο.

Στο επίκεντρο της διδακτικής πράξης βρίσκεται ο εκπαιδευτικός-αυθεντία, ο οποίος ακολουθεί απαρέγκλιτα την πορεία που του χαράζει το σχολικό εγχειρίδιο και κατευθύνει τον εκπαιδευόμενο με ασφάλεια και χωρίς εκπλήξεις στο μονοπάτι της μετάδοσης και εμπέδωσης της έτοιμης μαθηματικής γνώσης. Όλα είναι προγραμματισμένα και αναμενόμενα: παράδοση μαθηματικής θεωρίας, επίλυση ασκήσεων εφαρμογής και εξέταση των μαθητών για να αξιολογηθεί πόσο καλά αφομοίωσαν το μάθημα. Στο περιβάλλον αυτό ο μεν εκπαιδευτικός επαναπαύεται στις γνώσεις που απαιτούνται για τη διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών που περιλαμβάνονται στο πρόγραμμα σπουδών, ο δε εκπαιδευόμενος αποδέχεται άκριτα και παθητικά τις γνώσεις που του παρέχονται, ενώ δεν υπάρχει ούτε κίνητρο μάθησης και

πραγματική ανταλλαγή απόψεων ούτε καλλιέργεια της κριτικής ικανότητας και της μαθηματικής σκέψης.

Από τη δεκαετία του '70 και μετά η έννοια του προγράμματος σπουδών εμπλουτίζεται σταδιακά με διδακτικούς στόχους, προσεγγίσεις και τρόπους αξιολόγησης. Κατά συνέπεια οι ερευνητές αναζητούν απαντήσεις σε ερωτήματα όπως ποιοι πρέπει να είναι οι στόχοι της διδασκαλίας των μαθηματικών και γιατί, ποιοι εμπλέκονται στην κατάρτιση των προγραμμάτων σπουδών και πώς μπορεί ο εκπαιδευτικός να συμμετέχει εποικοδομητικά στη διαδικασία αυτή, τι σημαίνει αναμόρφωση του προγράμματος διδασκαλίας των μαθηματικών και ποιοι παράγοντες την επηρεάζουν, πώς αλλάζει ο ρόλος του εκπαιδευτικού και πώς μπορεί να αξιοποιηθεί σωστά το υλικό και η τεχνολογία. Οι απαντήσεις στα ερωτήματα αυτά εμπεριέχουν θεσμικές και κοινωνικοπολιτιστικές πτυχές και διαφοροποιούνται από χώρα σε χώρα και ανάλογα με τις ομάδες αποδεκτών της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Όπως φαίνεται από άρθρα που δημοσιεύονται στο περιοδικό *New trends in mathematics teaching*, Vol. III (1973) και IV (1979), της UNESCO, τα οποία απηχούν τόσο τις διεθνείς όσο και τις εθνικές τάσεις, αρχίζει να εκδηλώνεται ζωηρό ενδιαφέρον για μια αναδιοργάνωση του προγράμματος μαθηματικής εκπαίδευσης. Είναι βεβαίως εξαιρετικά δύσκολο να εφαρμοστούν στην εκπαιδευτική πραγματικότητα οι όποιες θεωρητικές ιδέες, καθώς προσκρούουν σε διάφορα εμπόδια του εκπαιδευτικού συστήματος κάθε χώρας, π.χ. φορείς (συχνά κρατικοί) σχεδιασμού του προγράμματος σπουδών, φορείς (κρατικοί και ιδιωτικοί) εμπλεκόμενοι στη διδασκαλία των μαθηματικών, εργοδότες και γονείς, αλλά συχνά και τους ίδιους τους μαθηματικούς, ο ρόλος των οποίων μάλιστα είναι πρωταγωνιστικός στην εφαρμογή του προγράμματος.

Μέσα στο γενικότερο αυτό κλίμα ανανέωσης είναι αυτονόητο ότι οι μαθηματικοί οφείλουν να είναι πλήρως καταρτισμένοι και ως προς το γνωστικό αντικείμενο αλλά και από παιδαγωγική άποψη, προκειμένου να ανταποκριθούν στο νέο τους ρόλο που τους θέλει συντονιστές της διδασκαλίας και καθοδηγητές των προσπαθειών των εκπαιδευομένων να αυτονομηθούν και να αναπτύξουν αυτό που λέμε «μαθηματική λογική». Ο μαθηματικός παύει να κινείται με σαφώς καθορισμένο τρόπο στο πλαίσιο ενός αυστηρά δομημένου προγράμματος σπουδών με στόχο την απλή μετάδοση γνώσεων και καλείται να συντονίσει ποικίλες δραστηριότητες για ολόκληρη την τάξη, μεμονωμένους διδασκόμενους ή ομάδες. Εμπλέκεται συνεπώς ενεργά στη μαθησιακή διαδικασία, παρακολουθεί στενά την εξέλιξή της, οδηγεί τους εκπαιδευόμενους στη διερεύνηση, την ανακάλυψη και τη δημιουργική επίλυση προβλημάτων.

Μεγάλη σημασία αποδίδεται επομένως στην εκπαίδευση των Μαθηματικών και δημοσιεύονται πολλά σχετικά άρθρα σε διεθνή περιοδικά. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε δύο τεύχη του περιοδικού *Studies in mathematics education*, Vol.3 (1984) και Vol.4 (1985), της UNESCO, εξολοκλήρου αφιερωμένα στην εκπαίδευση των δασκάλων και καθηγητών μαθηματικών.

Με την εξέλιξη της γνωστικής επιστήμης και της γνωστικής ψυχολογίας αναδεικνύεται επίσης η επίδραση των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών στον τρόπο διδασκαλίας των μαθηματικών και τελικά στον τρόπο μάθησης των εκπαιδευομένων. Κάθε μαθηματικός αντιλαμβάνεται την επιστήμη του και τη διδακτική της με διαφορετικό τρόπο, σύμφωνα με τον οποίο προσεγγίζει τα μαθηματικά προβλήματα και επιλέγει τη γνωστική στρατηγική που χρησιμοποιεί. Οι πεποιθήσεις του δηλαδή καθορίζουν τον τρόπο με τον οποίο διδάσκει, χειρίζεται τις μαθηματικές γνώσεις και

επικοινωνεί με τους εκπαιδευόμενους. Μεγάλο τμήμα της σύγχρονης έρευνας για τη μαθηματική εκπαίδευση ασχολείται με αυτές τις πεποιθήσεις και το επάγγελμα του μαθηματικού εν γένει.

Οι εκπαιδευόμενοι, από την πλευρά τους, έχουν τις δικές τους γνωστικές και μαθησιακές διεργασίες, οι οποίες διαφοροποιούνται ανάλογα με την ηλικία και τη γνωστική τους ανάπτυξη. Διαμορφώνουν επίσης τις δικές τους αντιλήψεις και στάσεις απέναντι στα διδασκόμενα αντικείμενα, εν προκειμένω τα μαθηματικά. Οι διεργασίες αυτές και οι παράγοντες που συντελούν στη δημιουργία αυτών των αντιλήψεων αποτελούν από τη δεκαετία του '80 και μέχρι σήμερα αντικείμενο εκτεταμένης έρευνας που φιλοδοξεί να καλύψει κάθε πτυχή της διαμόρφωσης μαθηματικών εννοιών, στάσεων και στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων, γνωστικών σχημάτων, κ.λπ. στους εκπαιδευόμενους.

Καθώς η διδακτική πράξη λαμβάνει χώρα στην τάξη ενός εκπαιδευτικού ιδρύματος με πρωταγωνιστές τους εκπαιδευτικούς και τους διδασκόμενους, επιρροές ασκούνται και από την αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο αυτών συμμετεχόντων αλλά και των διδασκόμενων μεταξύ τους. Σε ένα σημαντικό άρθρο του που δημοσιεύθηκε το 1980 στο περιοδικό Educational Studies in Mathematics ο Bauersfeld αναφέρεται σε τέσσερις «κρυμμένες πτυχές αυτού που ονομάζουμε πραγματικότητα μιας τάξης μαθηματικών: η διδασκαλία και η εκμάθηση των μαθηματικών πραγματοποιούνται και αποκτούν νόημα μέσα από την ανθρώπινη αλληλεπίδραση, λαμβάνουν χώρα σε εκπαιδευτήρια, επηρεάζουν αισθητά τη ζωή του εκπαιδευόμενου και την ανάπτυξη της προσωπικότητάς του και χαρακτηρίζονται από εξαιρετικά μεγάλη πολυπλοκότητα που πρέπει να περιοριστεί δραστικά αλλά και να αντιμετωπιστεί δεόντως.». Κατά τον Bauersfeld οι πτυχές αυτές «αποτελούν τα αδύνατα σημεία της έρευνας».

Οι έρευνες όμως επεκτείνονται και πέρα από τη μικροκοινωνιολογία της τάξης και του εκπαιδευτηρίου, στις διάφορες κοινωνίες μέλη των οποίων είναι οι εκπαιδευτικοί και οι εκπαιδευόμενοι. Διερευνάται πώς οι κοινωνίες αυτές με τα ιδιαίτερα κοινωνικοπολιτικά, οικονομικά, τεχνολογικά και πολιτιστικά χαρακτηριστικά τους, καθώς και το φύλο, η εθνότητα, η γλώσσα, τα ήθη και τα έθιμα προάγουν ή αποτελούν τροχοπέδη για τη μαθηματική εκπαίδευση. Οι έρευνες αυτές συνιστούν τα λεγόμενα εθνομαθηματικά (για να αποδώσουμε στα ελληνικά τον όρο ethno-mathematics που προέρχεται ετυμολογικά από δύο ελληνικά συνθετικά).

Παράλληλα διεξάγονται διαπολιτισμικές μελέτες, που συγκρίνουν επιδόσεις που καταγράφονται και στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων που ακολουθούνται σε διάφορες χώρες. Σκοπός τους είναι να αποκαλύψουν πολιτιστικές ιδιαιτερότητες που πιθανόν να ευθύνονται για τις διαφορές που παρατηρούνται, αλλά και τις βέλτιστες πρακτικές που, αν συνδυαστούν και εφαρμοστούν, ενδέχεται να βελτιστοποιήσουν και τη διδασκαλία και εκμάθηση των μαθηματικών.

Στα τέλη της δεκαετίας του '80 άρχισαν να διεξάγονται έρευνες και στον τομέα της αξιολόγησης της μαθηματικής εκπαίδευσης. Τα ερωτήματα που τέθηκαν καλύπτουν αφενός την υφιστάμενη αξιολόγηση, πώς δηλαδή οι καθιερωμένοι τρόποι αξιολόγησης επηρεάζουν τη διδασκαλία και την εκμάθηση των μαθηματικών, και αφετέρου την επιθυμητή, δηλαδή τους τρόπους αξιολόγησης που πρέπει να εφεύρουμε και να εφαρμόσουμε για να σταθμίσουμε κατά πόσο επιτυγχάνονται οι στόχοι που επιδιώκουμε με τη μαθηματική εκπαίδευση.

Εντούτοις, όλο αυτό το πολύτιμο ερευνητικό υλικό κινδυνεύει να μείνει αναξιοποίητο χωρίς την κατάλληλη επεξεργασία και συστηματοποίηση, ούτως ώστε να καταλήξουμε σε αξιόπιστες γενικεύσεις και έγκυρα πορίσματα. Όπως αναφέρει ο Mogens Niss σε εισήγησή του στο 9ο Διεθνές Συνέδριο για τη Μαθηματική Εκπαίδευση «δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι ο τελικός στόχος κάθε επιστημονικής προσπάθειας είναι να περιορίσει όσο χρειάζεται την πολυπλοκότητα».

Αξίζει, τέλος, να επισημάνουμε μια παρατήρηση του Mogens Niss στην προαναφερθείσα εισήγηση: υπάρχει χάσμα μεταξύ των μαθηματικών-ερευνητών και των μαθηματικών-εκπαιδευτικών, το οποίο μάλιστα διευρύνεται σε ανησυχητικό βαθμό. Δεν μπορούμε βεβαίως να ζητάμε από τους ερευνητές θαυματουργές συνταγές επιτυχημένης διδασκαλίας, αφού η διδακτική πράξη περιλαμβάνει, όπως είδαμε, τόσες μεταβλητές και αστάθμητες παραμέτρους που, αν προσπαθήσουμε να διδάξουμε τα ίδια μαθηματικά με τον ίδιο τρόπο σε διαφορετικούς αποδέκτες, το αποτέλεσμα θα είναι διαφορετικό.

Μπορούμε όμως να περιορίσουμε το χάσμα δημιουργώντας γέφυρες ουσιαστικής επικοινωνίας και ανταλλαγής απόψεων μεταξύ ερευνητών και εκπαιδευτικών. Αν αντιστρέφονται κατά καιρούς οι ρόλοι, με τους ερευνητές να συμμετέχουν στη διδασκαλία των μαθηματικών και τους εκπαιδευτικούς στην έρευνα, αφενός η έρευνα θα γίνει επικοινωνιακότερη και αφετέρου η διδακτική πρακτική θα εμπλουτιστεί με νέες προσεγγίσεις και προτάσεις εφαρμογής προς όφελος των διδασκόμενων και της ευρύτερης κοινωνίας.

### **Σχεδιασμός του προγράμματος σπουδών: εκπαιδευτικοί και μαθηματικοί στόχοι, επιλεκτική χρήση της τεχνολογίας για την επίτευξή τους**

Οι μαθηματικοί, όπως εξάλλου και οι εκπαιδευτικοί άλλων ειδικοτήτων, έχουν στη διάθεσή τους ένα πρόγραμμα σπουδών με τις ενότητες που καλούνται να διδάξουν, τους στόχους που τίθενται σε καθεμία, καθώς και κατευθυντήριες γραμμές που τους εξασφαλίζουν ένα είδος οδηγού πλοήγησης στη διδασκαλία του αντικειμένου τους και στην αξιολόγηση των εκπαιδευόμενων. Για την κατάρτιση του προγράμματος συνεργάζονται ερευνητές, συγγραφείς, εκπαιδευτικοί, αξιολογητές, εκδότες, καθένας από τους οποίους συμβάλλει από την πλευρά του ώστε το τελικό προϊόν να ανταποκρίνεται όσο το δυνατόν περισσότερο στις πραγματικές ανάγκες και τους εκπαιδευτικούς στόχους του τελικού αποδέκτη, ολόκληρης δηλαδή της εκπαιδευτικής κοινότητας.

Ο Judah L. Schwartz αναφέρει πολύ εύστοχα τρεις βασικούς στόχους του εκπαιδευτικού συστήματος μιας κοινωνίας: να συμβάλει στην ανάπτυξη και καλλιέργεια της προσωπικότητας των πολιτών, να προετοιμάσει τα άτομα για την ένταξή τους στην αγορά εργασίας και να μεταλαμπαδεύσει την πολιτιστική κληρονομιά και τις αξίες της στις επόμενες γενιές. Ανάλογα με τη βαρύτητα που δίνεται σε καθέναν από αυτούς οργανώνεται και η μαθηματική εκπαίδευση και σχεδιάζεται το πρόγραμμα σπουδών.

Αφετηρία λοιπόν για την κατάρτιση ενός προγράμματος σπουδών είναι ο καθορισμός των απώτερων εκπαιδευτικών στόχων, οι οποίοι λειτουργούν σαν ομπρέλα κάτω από την οποία συγκεντρώνεται και οργανώνεται το μαθηματικό υλικό που θα διδαχθεί, επιλέγονται τα μέσα διδασκαλίας που θα εξυπηρετήσουν με τον καλύτερο τρόπο την επίτευξη των στόχων και εξετάζονται οι πρακτικές λεπτομέρειες εφαρμογής. Οι στόχοι αυτοί γίνονται αποδεκτοί αξιωματικά από τους συμμετέχοντες στο σχεδιασμό και περνούν έμμεσα μηνύματα και πεποιθήσεις στους διδασκόμενους.

Στη συνέχεια, προκειμένου να οργανωθεί σωστά το μαθηματικό υλικό και να καθοριστούν οι επιμέρους μαθηματικοί στόχοι της διδασκαλίας, χρειάζεται να γίνει διαχωρισμός των μαθηματικών αντικειμένων και των μαθηματικών ενεργειών. Πρέπει επομένως να καθορίσουμε ποια μαθηματικά αντικείμενα (π.χ. ποσοτικά μεγέθη, σχήματα, συναρτήσεις, κ.λπ.) θέλουμε να μάθουν οι εκπαιδευόμενοι να χρησιμοποιούν με ευχέρεια και τι είδους ενέργειες να κάνουν με αυτά (π.χ. παρατήρηση και συγκέντρωση ποιοτικών και ποσοτικών δεδομένων, διαμόρφωση τεκμηριωμένων και λογικών κρίσεων για ό,τι είναι χρήσιμο ή περιττό σε δεδομένη κατάσταση, υπολογισμοί μεγεθών, κ.λπ.).

Σε ένα τέτοιο πλαίσιο δόμησης του προγράμματος σπουδών για τα μαθηματικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν και τεχνολογικά εργαλεία που παρέχουν στον εκπαιδευόμενο δυνατότητες διατύπωσης και διερεύνησης εικασιών, συλλογής, αξιολόγησης και ανάλυσης δεδομένων, πειραματισμού με την κατασκευή μοντέλων, εφεύρεσης λογικών διαδικασιών που αντικαθιστούν τις μηχανικές, καθώς και βαθύτερης και ευρύτερης κατανόησης αφηρημένων εννοιών. Το δυναμικό των τεχνολογικών αυτών μέσων ενισχύει το πρόγραμμα προς την επίτευξη των μαθηματικών και εκπαιδευτικών στόχων του.

Η διατύπωση και διερεύνηση εικασιών για μαθηματικά αντικείμενα αποτελεί την πεμπτουσία της μαθηματικής επιστήμης. Η διαδραστικότητα που χαρακτηρίζει το περιβάλλον των σύγχρονων εκπαιδευτικών λογισμικών τα καθιστά ιδιαίτερα φιλικά προς το χρήστη και διευκολύνει αυτή τη διαδικασία. Το λογισμικό παρακολουθεί πώς αλληλεπιδρά ο χρήστης με το περιβάλλον και αναλύει αυτή την αλληλεπίδραση στα χρησιμοποιούμενα αντικείμενα και στις ενέργειες που εκτελούνται σε αυτά. Στη συνέχεια απομνημονεύει το σύνολο των ενεργειών ως ενιαία διαδικασία που μπορεί να επαναληφθεί σε άλλα αντικείμενα. Συνεπώς, αν ο χρήστης ανακαλύψει κάποιες ενδιαφέρουσες ιδιότητες σε ένα αντικείμενο μπορεί να υποθέσει ότι θα τις ξανασυναντήσει και σε άλλα και να επιβεβαιώσει την εικασία του εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία σε διαφορετικά αντικείμενα.

Για παράδειγμα, αν κατασκευάσουμε σε περιβάλλον δυναμικού λογισμικού τρίγωνο  $AB\Gamma$  και ενώσουμε τα μέσα  $\Delta E$  των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα, τότε βλέπουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα  $\Delta E$  είναι ίσο με το μισό του  $B\Gamma$ . Μετακινώντας σε διάφορες θέσεις την κορυφή  $A$  παρατηρούμε ότι το  $\Delta E$  εξακολουθεί να είναι ίσο με το μισό του  $B\Gamma$ .

Με το διαδίκτυο και γενικότερα τα αυτοματοποιημένα μέσα που έχει σήμερα στη διάθεσή του ο εκπαιδευόμενος για να συλλέγει, να αξιολογεί και να αναλύει δεδομένα εξοικονομεί πολύ κόπο και χρόνο και απαλλάσσεται από τα λάθη καταγραφής. Παράλληλα εξασφαλίζει ποιοτικότερη ανάλυση και εξοικειώνεται με χώρους πέραν των τριών διαστάσεων και την κατανόηση κάθε είδους δεδομένων. Λόγω όμως της δραματικής αύξησης του όγκου των δεδομένων, απαιτείται μεγαλύτερη προσοχή στην αξιολόγηση της εγκυρότητας και της καταλληλότητάς τους για την εκάστοτε ανάλυση.

Μία ακόμα δυνατότητα της σύγχρονης τεχνολογίας που μπορεί να αξιοποιηθεί στην εκπαίδευση, στο πλαίσιο των εκπαιδευτικών και μαθηματικών στόχων που έχουν τεθεί, αφορά την προαγωγή των μηχανικά εκτελούμενων εργασιών σε λογικές συνειδητές διαδικασίες. Οι εκπαιδευόμενοι καλούνται να εφεύρουν τρόπους να επιτύχουν συγκεκριμένους στόχους χωρίς τη βοήθεια συγκεκριμένων μαθηματικών αντικειμένων ή ενεργειών. Κατ' αυτόν τον τρόπο εμβαθύνουν στην κατανόηση διαφόρων αντικειμένων

(π.χ. υπολογιστικών αλγορίθμων) ή ενεργειών (π.χ. σχεδιασμός περίπλοκων σχημάτων) που συνήθως τα βρίσκουν έτοιμα στο υπολογιστικό περιβάλλον.

Καλούνται, για παράδειγμα, να κατασκευάσουν σε δυναμικό λογισμικό τρίγωνα και τετράπλευρα περιγεγραμμένα σε κύκλο χρησιμοποιώντας μόνο σημεία και ευθύγραμμα τμήματα και όχι τα έτοιμα τρίγωνα και τετράπλευρα που περιλαμβάνονται στο λογισμικό.

Το περιβάλλον των σύγχρονων εκπαιδευτικών λογισμικών συμβάλλει πολλαπλά στη βαθύτερη και ευρύτερη κατανόηση αφηρημένων εννοιών, εφόσον ο χρήστης του «διατηρεί τον έλεγχο είτε του πνευματικού περιεχομένου των προσπαθειών του είτε του τρόπου αλληλεπίδρασης με το περιεχόμενο ή και των δύο» (J. L. Schwartz). Υποστηρίζει π.χ. τη δημιουργία και επεξεργασία γραφικών και δίνει στο χρήστη τη δυνατότητα να τροποποιήσει τον τύπο μιας συνάρτησης και να παρατηρήσει τις συνέπειες της τροποποίησης και στον τύπο και στη γραφική παράσταση. Κάποια περιβάλλοντα υποστηρίζουν και το αντίστροφο: επιτρέπουν δηλαδή στο χρήστη να τροποποιήσει την καμπύλη της συνάρτησης και να παρατηρήσει τις συνέπειες και στην καμπύλη και στον τύπο.

Μέσα από τις τεράστιες δυνατότητές της η σύγχρονη τεχνολογία είναι σε θέση να δώσει νέα δυναμική στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών. Ανοίγει το δρόμο για την επεξεργασία νέων μαθηματικών πεδίων, αλλά και για την προσέγγιση των ήδη γνωστών θεμάτων με καινοτόμους και ενδιαφέροντες τρόπους που κρατούν σε εγρήγορση τον εκπαιδευόμενο και του δίνουν έμπνευση και κίνητρο για νέους πειραματισμούς. Ενώ με τους συμβατικούς τρόπους διδασκαλίας, ακόμα και στις ευνοϊκότερες συνθήκες υλοποίησης της εκπαιδευτικής πράξης, ο διδασκόμενος θα έπρεπε να περάσει από πολλά ενδιάμεσα στάδια υπολογισμών και δοκιμών για να δει π.χ. το τελικό αποτέλεσμα διερεύνησης μιας εικασίας, με τα σύγχρονα υπολογιστικά μέσα συντομεύεται κατά πολύ η διαδικασία και δίνεται η ευκαιρία μελέτης περισσότερων περιπτώσεων που θα επιβεβαιώσουν ή θα διαψεύσουν την ερευνώμενη εικασία. Η ιδιότητα του (εξ)ερευνητή συμβάλλει στην ανάπτυξη της αυτοπεποίθησης και αυτοεκτίμησης του εκπαιδευόμενου και τα απτά αποτελέσματα των προσπαθειών του αποτελούν ένα είδος ανταμοιβής που τον ωθεί να προχωρήσει ακόμα παραπέρα.

Παράλληλα οξύνεται η κριτική του ικανότητα και καλλιεργείται το πνεύμα και γενικότερα η προσωπικότητά του. Έχει την αίσθηση ότι συμμετέχει και στο μαθηματικό γίνεσθαι, όπως συμμετέχει στο γλωσσικό ή το καλλιτεχνικό γίνεσθαι, και εγκαταλείπει τη θέση του θεατή για να γίνει παράγοντας των μαθηματικών εξελίξεων. Έτσι τα μαθηματικά αρχίζουν να λειτουργούν ως φορέας πολιτισμού και αξιών και αναδεικνύεται η βαθύτερη φύση τους ως πηγής ομορφιάς και απόλαυσης. Επιπλέον, είναι αυτονόητο ότι ένα εκπαιδευτικό σύστημα όπου επιδιώκονται τέτοιοι στόχοι προετοιμάζει με τον καλύτερο τρόπο τους εκπαιδευόμενους και για την αγορά εργασίας.

Όλα τα παραπάνω ίσως δημιουργήσουν μια ιδανική εικόνα για τη χρήση των νέων τεχνολογικών εργαλείων και του διαδικτύου. Ακριβώς όμως λόγω του τεράστιου δυναμικού τους οι νέες τεχνολογίες μπορούν πολύ εύκολα να ξεφύγουν από τον έλεγχό μας και να επιφέρουν αλλαγές σιωπηρά, χωρίς να γίνουν αντιληπτές, αλλαγές που ενδέχεται να αποδειχθούν ακόμα και ανεπιθύμητες. Κινδυνεύει π.χ ο εκπαιδευόμενος να αρκεστεί στην παρατήρηση κάποιου θεωρήματος και να μη μπει στον κόπο να ασχοληθεί με την απόδειξή του, απομακρυνόμενος έτσι από την ουσία της μαθηματικής σκέψης.



Χρειάζεται επομένως να θέσουμε την τεχνολογία στην υπηρεσία των μαθηματικών και όχι το αντίστροφο. Αυτό συνεπάγεται ότι το πρόγραμμα σπουδών θα πρέπει, χωρίς να αποπροσανατολιστεί ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο, να συμπεριλάβει τη διδασκαλία τεχνικών δεξιοτήτων απαραίτητων για την κατανόηση και το χειρισμό των τεχνολογικών μέσων που θα επιλεγούν ως καταλληλότερα για την εξυπηρέτηση των στόχων του.

### **Ο καθηγητής μαθηματικών μπροστά στη νέα τεχνολογική πραγματικότητα: ενδοιασμοί και προκλήσεις**

Σήμερα, παρά το γεγονός ότι τα προγράμματα σπουδών έχουν σε μεγάλο βαθμό εκσυγχρονιστεί τόσο ως προς το περιεχόμενο όσο και ως προς τους στόχους και τα προτεινόμενα μέσα διδασκαλίας, τα μαθηματικά εξακολουθούν σε πολλές περιπτώσεις να διδάσκονται με τρόπο που δίνει έμφαση στην απόκτηση ακαδημαϊκών γνώσεων σε βάρος της καλλιέργειας ανεξάρτητου πνεύματος και κριτικής ικανότητας. Μέσα από την πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια γενική μαθηματική παιδεία ο μαθητής μαθαίνει αριθμητική, γεωμετρία, άλγεβρα και λογισμό, αλλά, δυστυχώς, φαίνεται να τα αξιοποιεί μόνο για να εκτελέσει μηχανικές και καθοδηγούμενες ασκήσεις επανάληψης.

Βέβαια, σύμφωνα με τον Piaget και τη θεωρία του κονστρουκτιβισμού – που υποστηρίζει ότι η γνώση κατασκευάζεται μέσα από την εκτέλεση ενεργειών – τέτοιες καθοδηγούμενες ασκήσεις θέτουν τη βάση για την αφαιρετική σκέψη. Μπορούμε επομένως να συμπεράνουμε ότι είναι απαραίτητες, τουλάχιστον στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Αν όμως ο εκπαιδευόμενος περάσει στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και παραμείνει εγκλωβισμένος σε ανάλογες δραστηριότητες, αμφιβάλλω αν θα επέλθει ποτέ το επιθυμητό άλμα προς την ανώτερη μορφή της αφαιρετικής νόησης.

Στο σημείο αυτό ακριβώς χρειάζεται το χέρι βοήθειας του εκπαιδευτικού, που θα βοηθήσει τον εκπαιδευόμενο να αυτενεργήσει, να ερευνήσει, να επαληθεύσει και να φτάσει σε συμπεράσματα και σε αποδείξεις. Και εδώ είναι που ο καθηγητής μαθηματικών μπορεί να αξιοποιήσει τις ευκαιρίες που του παρέχουν, όπως είδαμε και παραπάνω, οι νέες τεχνολογίες, αρκεί να είναι σε θέση να διακρίνει εάν, τότε, πώς και για ποιον σκοπό θα τις χρησιμοποιήσει.

Κατ' αρχήν να διευκρινίσουμε ότι τα νέα τεχνολογικά μέσα είναι ένα ακόμα μέσο διδασκαλίας που έρχεται να προστεθεί στον πίνακα, το χαρτί, το βιβλίο και τα παραδοσιακά εποπτικά μέσα, αυξάνοντας το εύρος των επιλογών που έχει στη διάθεσή του ο εκπαιδευτικός. Η χρήση τους επομένως είναι προαιρετική και ανάλογη των εκάστοτε στόχων. Τα λογισμικά μπορούν να διαχωριστούν με κριτήριο την εκπαιδευτική βαθμίδα στην οποία απευθύνονται, καθώς και τα μαθηματικά πεδία που καλύπτουν.

Προκειμένου ο εκπαιδευτικός να είναι σε θέση να αξιοποιήσει τις διαθέσιμες τεχνολογικές λύσεις και να τις συνδυάσει αποτελεσματικά με άλλες τεχνικές επίλυσης προβλημάτων χρειάζεται υπομονή, προσπάθεια και κυρίως θέληση να διευρύνει τις επιστημονικές γνώσεις και τις τεχνικές δεξιότητές του.

Πέρα όμως από την εξοικείωσή του με τα νέα περιβάλλοντα, ο καθηγητής μαθηματικών πρέπει πλέον να κατέχει το γνωστικό αντικείμενο τόσο βαθιά ώστε να μπορεί να ελέγξει κάθε απροσδόκητη τροπή που μπορεί να πάρει το μάθημα. Γιατί αυτός ο γοητευτικός κίνδυνος ελλοχεύει στις τεράστιες δυνατότητες των νέων εκπαιδευτικών λογισμικών και του διαδικτύου. Πρέπει επίσης να είναι διατεθειμένος να εξερευνήσει πρώτος αυτός τις δυνατότητες των λογισμικών που χρησιμοποιεί και να ανακαλύψει

πιθανές παγίδες που μπορεί να θέσουν σε κίνδυνο τους επιδιωκόμενους στόχους, για να οδηγήσει στη συνέχεια με ασφάλεια και τους μαθητές του στο ανοιχτό, διαδραστικό περιβάλλον των νέων μέσων.

Στην πράξη όμως πολλοί εκπαιδευτικοί αντιμετωπίζουν με καχυποψία και αρνητική διάθεση τις νέες τεχνολογίες στην εκπαίδευση. Ένας λόγος είναι ότι τα εργαλεία πληροφορικής βελτιώνονται συνεχώς και θέτουν σε δοκιμασία τις γνώσεις του εκπαιδευτικού, ο οποίος είναι υποχρεωμένος να επιμορφώνεται συνεχώς και στο γνωστικό αντικείμενο και στις νέες τεχνολογίες, προκειμένου να μην αποδειχθεί ανεπαρκής. Ένας άλλος λόγος είναι η απόρριψη του πρωτόγνωρου. Αρκετοί καθηγητές που δεν είναι εξοικειωμένοι με τα περιβάλλοντα των εκπαιδευτικών λογισμικών φοβούνται μήπως δεν μπορέσουν να αντεπεξέλθουν στις δυσκολίες που θα συναντήσουν. Κάποιοι άλλοι υποστηρίζουν ότι, αφού κάνουν καλά το μάθημά τους με τα ήδη υπάρχοντα διδακτικά μέσα, δεν υπάρχει λόγος να τα αντικαταστήσουν ή να προσθέσουν κι άλλα.

Ο τελευταίος αυτός λόγος ευσταθεί μόνο εφόσον το νέο εργαλείο εκτελεί την ίδια ακριβώς εργασία με το παλαιό, οπότε η επιλογή του δεύτερου είναι συνειδητή καθώς έχει προκύψει από σύγκριση. Όσο για τους δύο προηγούμενους, μπορούν κάλλιστα να εκλείψουν αν ο εκπαιδευτικός έχει τη διάθεση να συνειδητοποιήσει ότι η εξέλιξη είναι αναπόσπαστο στοιχείο της εκπαίδευσης και οφείλει να συμβαδίζει αντί να αντιστέκεται.

Συμπερασματικά, ο εκπαιδευτικός δεν έχει να φοβηθεί τίποτα από τις νέες τεχνολογίες αν πιστέψει ότι ήρθαν ως εξέλιξη του πίνακα και της κιμωλίας και όχι για να πάρουν τη θέση του. Ο ρόλος του έχει πλέον ξεπεράσει την, κατά τον Paulo Freire, «τραπεζική αντίληψη» της παιδείας που τον θέλει καταθέτη έτοιμων γνώσεων στα «άδεια μυαλά» των μαθητών, όπως καταθέτει κάποιος χρήματα στην τράπεζα, αλλά ο ίδιος παραμένει αναντικατάστατος, εφόσον σέβεται τον εαυτό του και το λειτούργημά του.

#### *Σημείωση*

*Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών «Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά» της Σχολής Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου και αποτελεί μέρος της διπλωματικής εργασίας του συγγραφέως, η οποία εκπονήθηκε υπό την επίβλεψη του Δρ. Γκιντίδη Δρόσου, Επίκ. Καθηγητή, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, ΕΜΠ, [dgindi@math.ntua.gr](mailto:dgindi@math.ntua.gr)*