Ανοικτή Εκπαίδευση: το περιοδικό για την Ανοικτή και εξ Αποστάσεως Εκπαίδευση και την Εκπαιδευτική Τεχνολογία

Τόμ. 8, Αρ. 1 (2012)

Ανοικτή Εκπαίδευση

Εφαρμογή ασαφών συμπερασματικών μοντέλων στην διαγνωστική αξιολόγηση των μαθηματικών

Δημήτρης Ζούκης

doi: [10.12681/jode.9787](https://doi.org/10.12681/jode.9787)

Open Education - The Journal for Open and Distance Education and Educational Technology
Volume 8, Number 1, 2012 Section one. © Open Education ISSN: 1791-9312

Εφαρμογή ασαφών συμπερασματικών μοντέλων στην διαγνωστική αξιολόγηση των μαθηματικών

An implementation of fuzzy diagnostic models on teaching mathematics

Δημήτρης Ζούκης
Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο
Σχολή θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας
Μαθηματικός 1ου Γυμνασίου Νάξου
Υποψήφιος Διδάκτορας
Δημοκριτείου Πανεπιστημίου Θράκης
zoukis_dimitris@yahoo.gr

Abstract
Students' evaluation is considered to be one constant educational procedure whereby the progress of learning is monitored and assessed based on the outcome of it. The achievement of the teaching aims of the lessons, as well as the curriculum are taken into consideration while conducting the evaluation process. Diagnostic evaluation takes place at the beginning of the school year and its basic aim is to determine the cognitive level of the students, which, accordingly, affects the teaching methodology. The aim of this project is the construction of a fuzzy, diagnostic model of the cognitive ability of a student who is in the first year of High School. The calculative application of the system has been made via the Fuzzy Logic Toolbox, which is a collection of functions constructed in the numeric environment of Matlab.

Περίληψη
Αξιολόγηση του μαθητή θεωρείται η συνεχής παιδαγωγική διαδικασία με την οποία παρακολουθείται η πορεία της μάθησης, προσδιορίζονται τα τελικά αποτελέσματά της και ο βαθμός επίτευξης των διδακτικών στόχων του μαθήματος και του προγράμματος σπουδών. Η διαγνωστική αξιολόγηση πραγματοποιείται στην αρχή του σχολικού έτους και βασικός σκοπός της είναι να προσδιοριστεί το γνωστικό επίπεδο των μαθητών, ώστε να προσαρμοστεί ανάλογα η διδασκαλία Στόχος της εργασίας αυτής η κατασκευή ενός ασαφούς (Fuzzy) «διαγνωστικού» μοντέλου της γνωστικής ικανότητας ενός μαθητή που ξεκινάει την Α' τάξη του ενιαίου Λυκείου. . Η υπολογιστική εφαρμογή του συστήματος έγινε με την χρήση του Fuzzy Logic Toolbox το οποίο είναι μια συλλογή συναρτήσεων κατασκευασμένων στο αριθμητικό υπολογιστικό περιβάλλον του MatLab

Keywords
fuzzy inference systems, students' evaluation, diagnostic evaluation

1. Προκαταρκτικές Έννοιες

Θα οριστούν σ' αυτήν την παράγραφο όλες οι βασικές προκαταρκτικές έννοιες του ασαφούς συνόλου, της ασαφούς άρνησης, της ασαφούς τομής (t-norm) και της ασαφούς ένωσης (t-conorm) της συνεπαγωγής και των ασαφών συμπερασματικών κανόνων που είναι απαραίτητες για την κατασκευή των ασαφών συμπερασματικών μοντέλων. Οι παρακάτω ορισμοί υπάρχουν στα [1],[2],[3],[5] και αλλού.

Έστω S ένα κλασικό σύνολο αναφοράς. Κάθε συνάρτηση $A: S \to [0,1]$ λέγεται ασαφές υποσύνολο του S. Αν $x \in S$, τότε η τιμή $A(x)$ λέγεται τιμή συμμετοχής του x (membership value) και εκφράζει τον βαθμό που το x ανήκει στο ασαφές σύνολο A. Ένας συνήθης συμβολισμός για τα ασαφή υποσύνολα ενός συνόλου S είναι ο $A = (S, \mu_A)$ όπου $\mu_A : S \to [0,1]$. Η συνάρτηση μ_A ονομάζεται συνάρτηση συμμετοχής (membership function)

Ορισμός 1.1: Μια συνάρτηση $N: [0,1] \to [0,1]$ είναι μια ασαφής άρνηση αν ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

(i) Η N είναι φθίνουσα συνάρτηση.

(ii) $N(0) = 1$ και $N(1) = 0$

Επιπλέον αν $N(N(x)) = x$ για κάθε $x \in [0,1]$ η συνάρτηση N καλείται ισχυρή άρνηση.

Ορισμός 1.2: Μια συνάρτηση $T: [0,1]^2 \to [0,1]$ είναι μια ασαφής τομή ή t-norm (triangular norm) αν για κάθε $x, y, z \in [0,1]$ ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

T_1. $T(x,1) = x$ (συνοριακή συνθήκη)

T_2. $y \le z$ συνεπάγεται $T(x,y) \le T(x,z)$ (μονοτονία)

T_3. $T(x,y) = T(y,x)$ (αντιμεταθετική)

T_4. $T(x, T(y,z)) = T(T(x,y), z)$ (προσεταιριστική)

Ορισμός 1.3: Μια συνάρτηση $S: [0,1]^2 \to [0,1]$ είναι μια ασαφής ένωση ή t-conorm (triangular conorm) αν για κάθε $x, y, z \in [0,1]$ ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

S_1. $S(x,0) = x$ (συνοριακή συνθήκη)

S_2. $y \le z$ συνεπάγεται $S(x,y) \le S(x,z)$ (μονοτονία)

S_3. $S(x,y) = S(y,x)$ (αντιμεταθετική)

S_4. $S(x, S(y,z)) = S(S(x,y), z)$ (προσεταιριστική)

Ορισμός 1.4: Μια ασαφής συνεπαγωγή *I*, είναι μια συνάρτηση της μορφής:

$I: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$

η οποία για κάθε δυνατή αληθή τιμή *a*, *b* των ασαφών προτάσεων *p*, *q* αντίστοιχα ορίζει μια αληθή τιμή $I(a,b)$ της υποθετικής πρότασης "ΑΝ *p* ΤΟΤΕ *q*". Η συνάρτηση *I* θα πρέπει να είναι μια επέκταση της κλασσικής συνεπαγωγής, $p \Rightarrow q$, στην οποία οι τιμές αληθείας περιορίζονται στο $\{0,1\}$, στο διάστημα $[0,1]$ για τις τιμές αληθείας στην ασαφή λογική. Στην κλασσική λογική η συνεπαγωγή έχει τον ακόλουθο πίνακα αληθείας

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Έτσι η ασαφής συνεπαγωγή θα πρέπει να ικανοποιεί τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες:

$$I(0,0) = I(0,1) = I(1,1) = 1 \text{ και } I(1,0) = 0 \quad (1)$$

Στον κλασικό συλλογισμό που χρησιμοποιεί την κλασική λογική χρησιμοποιούνται για την εξαγωγή λογικών συμπερασμάτων οι ακόλουθοι τέσσερεις κύριοι συμπερασματικοί κανόνες:

Modus ponens: $(\alpha \wedge (\alpha \Rightarrow b)) \Rightarrow b$, Modus tollens: $(\bar{b} \wedge (\alpha \Rightarrow b)) \Rightarrow \bar{\alpha}$

Syllogism: $\alpha \Rightarrow b \wedge b \Rightarrow \gamma \Rightarrow \alpha \Rightarrow \gamma$, Contraposition: $\alpha \Rightarrow b \Rightarrow \bar{b} \Rightarrow \bar{a}$

Με την βοήθεια των πράξεων των ασαφών λογικών προτάσεων όπως τις ορίσαμε παραπάνω μπορούμε να μεταφέρουμε τους κλασικούς λογικούς συμπερασματικούς κανόνες στον προσεγγιστικό συλλογισμό. Με την σκέψη μας σε ότι έχει αναφερθεί παραπάνω μπορούμε τώρα να ορίσουμε τον γενικευμένο ασαφή **AN-TOTE** κανόνα ως εξής:

"**AN** α_1 είναι A_1 **KAI** …**KAI** α_n είναι A_n **TOTE** b είναι B"

Ο οποίος υπολογίζεται με την βοήθεια των συναρτήσεων συμμετοχής από τον τύπο:

$$\mu_{A_1}\ a_1\ \wedge \ldots \wedge \mu_{A_n}\ a_n\ \Rightarrow \mu_B\ b$$

Τελικά κάθε πεπερασμένη ασαφούς λογικής συνεπαγωγή μπορεί να περιγραφεί από ένα σύνολο γενικευμένων AN-TOTE κανόνων που να περιέχουν μόνο την πράξη της σύζευξης υπό την μορφή:

(1) **AN** a_{11} είναι A_{12} **KAI** …**KAI** a_{1n} είναι A_{1n} **TOTE** b_1 είναι B_1

(2) **AN** a_{21} είναι A_{21} **KAI** …**KAI** a_{2n} είναι A_{2n} **TOTE** b_2 είναι B_2

$\vdots$

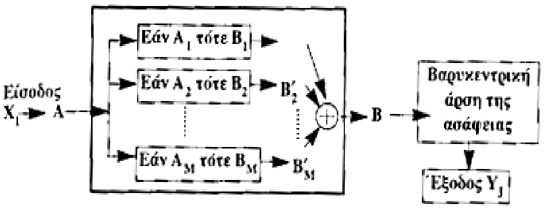
(m) **AN** a_{m1} είναι A_{m1} **KAI** …**KAI** a_{mn} είναι A_{mn} **TOTE** b_m είναι B_m

Ένα ασαφές μοντέλο ή σύστημα είναι μια μεγάλη ομάδα από ασαφείς λογικούς κανόνες του τύπου AN-TOTE. Ένα ασαφές σύστημα κατασκευάζεται σε τρία στάδια:

1ο Στάδιο: Η επιλογή των κατάλληλων λεκτικών μεταβλητών εισόδου και εξόδου του συστήματος

2ο Στάδιο: Επιλογή των ασαφών συνόλων και υποσυνόλων για τις λεκτικές μεταβλητές εισόδου και εξόδου.

3ο Στάδιο: Η επιλογή των κανόνων. Στο στάδιο αυτό συσχετίζουμε τα ασαφή σύνολα των μεταβλητών εισόδου μ' αυτά των μεταβλητών εξόδου.



Ένα fuzzy σύστημα λαμβάνει τιμές για τις μεταβλητές εισόδου, συγκρίνει τις τιμές αυτές με όλα τα ασαφή σύνολα εισόδου, δίνει σύνολα εξόδου και με μια διαδικασία που ονομάζεται αποασαφοποίηση (defuzzification) μετατρέπει τα ασαφή σύνολα εξόδου σε έναν αριθμό εξόδου.

2. Αξιολόγηση

Η λήψη αποφάσεων είναι ένα θέμα που αντιμετωπίζει κανείς καθημερινά. Και για την λήψη των ορθών αποφάσεων είναι απαραίτητη η κατάλληλη πληροφόρηση. Ο ρόλος της αξιολόγησης είναι να δώσει σχετικές και ακριβείς πληροφορίες ώστε να ληφθεί η καλύτερη δυνατή απόφαση. Έτσι και στον τομέα της εκπαίδευσης, οι εκπαιδευτικοί λαμβάνουν καθημερινά αποφάσεις για το περιεχόμενο και τις μεθόδους διδασκαλίας, την προσαρμογή της διδασκαλίας στο επίπεδο και τις ανάγκες των μαθητών τους, την μορφή της διδακτικής πράξης με σκοπό την επιτυχή διδασκαλία και την βελτίωση της παρεχόμενης εκπαίδευσης. Η σύγχρονη παιδαγωγική διακρίνει τρεις τύπους αξιολόγησης του μαθητή: την διαγνωστική αξιολόγηση, την διαμορφωτική αξιολόγηση και την αθροιστική αξιολόγηση. Η διαγνωστική αξιολόγηση πραγματοποιείται συνήθως στην αρχή του σχολικού έτους ή πριν από την διδασκαλία μιας σημαντικής έννοιας ή ενότητας και βασικός στόχος της είναι να προσδιοριστεί το γνωστικό επίπεδο των μαθητών, ώστε να προσαρμοστεί ανάλογα η διδασκαλία. Σκοπός της διαγνωστικής αξιολόγησης είναι να δώσει στον εκπαιδευτικό πληροφορίες για το επίπεδο των μαθητών της τάξης του, τα γνωστικά κενά , το γνωστικό χάσμα που μπορεί να υπάρχει μεταξύ των μαθητών και το επίπεδο γενικά της απόκτησης και αφομοίωσης των γνώσεων μέχρι την στιγμή αυτή. Το διαγνωστικό τεστ αξιολόγησης συνηθίζεται να εφαρμόζεται στην αρχή της σχολικής χρονιάς γιατί οι πληροφορίες που θα δώσει στον εκπαιδευτικό θα καθορίσουν και θα βοηθήσουν εν γένει στον σχεδιασμό της διδασκαλίας και στην προσαρμογή της διδακτικής πρακτικής στις ανάγκες και τις ιδιαιτερότητες της τάξης του. Ο προγραμματισμός στην διδακτική είναι ιδιαίτερα σημαντικός κα για να είναι επιτυχημένος θα πρέπει να βασίζεται σε πραγματικές μετρήσιμες παρατηρήσεις του γνωστικού επιπέδου των μαθητών στους οποίους θα εφαρμοστεί. Έτσι η διαγνωστική αξιολόγηση αποτελεί σημαντικό βοήθημα για τον εκπαιδευτικό στην προσπάθειά του να διαμορφώσει ένα ουσιαστικό, επιτεύξιμο και επιτυχές διδακτικό πρόγραμμα τόσο σε επίπεδο μακρόχρονου προγραμματισμού, αλλά και σε εβδομαδιαίου ακόμα και ημερήσιου Στο συγκεκριμένο σύστημα διαγνωστικής αξιολόγησης με την χρήση ασαφούς συμπερασματικού μοντέλου που θα παρουσιαστεί στην επόμενη παράγραφο έχει επιλεγεί να γίνει εφαρμογή στους μαθητές που ξεκινούν την πρώτη Λυκείου. Θα πρέπει να σημειωθεί όμως, πως με την κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών μπορεί να εφαρμοστεί τόσο σε διαφορετικές βαθμίδες εκπαίδευσης όσο και σε διαφορετικές μορφές αξιολόγησης ακόμα και πέρα από τα στενά εκπαιδευτικά πλαίσια.

3.1 Το ασαφές συμπερασματικό μοντέλο

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιαστεί το ασαφές συμπερασματικό σύστημα για την διαγνωστική αξιολόγηση των μαθητών στο μάθημα των μαθηματικών. Θα περιγραφεί η θεμελίωση και κατασκευή του συστήματος βήμα προς βήμα και στο τέλος θα τρέξουμε το πρόγραμμα για να μελετήσουμε τα αποτελέσματα και να αξιολογήσουμε την επιτυχία του συστήματος. Για να λυθεί το πρόβλημα της μοντελοποίησης ενός συστήματος θα πρέπει να προσδιοριστούν τα παρακάτω στοιχεία:

(i) Οι μεταβλητές εισόδου $x_1,...,x_n$

(ii) Τα διαστήματα $X_1,...,X_n$ στα οποία ανήκουν οι μεταβλητές $x_1,...,x_n$ αντίστοιχα και ορίζουν τα ασαφή υποσύνολα

(iii) Τις συναρτήσεις συμμετοχής $\mu_{X_1},...,\mu_{X_n}$ των μεταβλητών εισόδου και εξόδου

(iv) Τις σχέσεις $R^i, i=1,...,n$ που χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν την συμπεριφορά των δεδομένων εισόδου και εξόδου του συστήματος.

3.2 Οι μεταβλητές Εισόδου- Εξόδου

Η επιλογή των κατάλληλων μεταβλητών εισόδου και εξόδου του συστήματος αποτελεί σημαντικό παράγοντα για την επιτυχία του. Το ασαφές συμπερασματικό μοντέλο που κατασκευάζεται εδώ, εφαρμόζεται στην διαγνωστική αξιολόγηση των μαθητών της Α’ Τάξης του Ενιαίου Λυκείου για το μάθημα των μαθηματικών. Η επιλογή των μεταβλητών εξαρτάται από τους γενικούς και ειδικούς στόχους του μαθήματος όπως αυτοί ορίζονται από το Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών (Ε. Π .Π. Σ. Μ.) και τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (Α. Π. Σ.) και έχουν περιγραφεί αναλυτικά στην προηγούμενη παράγραφο.

Ο καθηγητής των μαθηματικών με την βοήθεια ενός τεστ αξιολόγησης επιχειρεί να ελέγξει:

1. Τις γνώσεις που απέκτησε ο μαθητής της Α' Λυκείου και τον βαθμό κατάκτησης των γνώσεων αυτών, στην άλγεβρα, την γεωμετρία και την τριγωνομετρία.
2. Την αναλυτική και συνθετική του σκέψη και την αποδεικτική του ικανότητα.
3. Την ικανότητα του μαθητή να μπορεί να εκφράζεται με την βοήθεια της γλώσσας των μαθηματικών, αλλά και να εκφράζει την γλώσσα των μαθηματικών στην γλώσσα ομιλίας και γραφής.
4. Την ικανότητά του να κατανοήσει προβλήματα, να τα μεταφράσει σε μαθηματικές σχέσεις και να τα λύσει.

Με βάση λοιπόν όλα τα παραπάνω και έχοντας κατά νου το Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών και τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών ορίζουμε τις μεταβλητές εισόδου:

gm (general mathematics Knowledge): περιλαμβάνει τις μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες, την αποδεικτική ικανότητα και την ικανότητα σύνθεσης και ανάλυσης του μαθητή.

ps (problem solving): περιλαμβάνει την ικανότητα λύσης μαθηματικών προβλημάτων, κατανόηση εφαρμογών των μαθηματικών και εφαρμοσμένη σκέψη και μεθοδολογία.

lc (language capability): η ικανότητα χρήσης και κατανόησης της μαθηματικής γλώσσας.

Οι παραπάνω μεταβλητές κατασκευάστηκαν με την σκέψη ότι πρέπει να ομαδοποιηθούν οι γενικοί και ειδικοί στόχοι του μαθήματος των μαθηματικών. Αν ορίζαμε μία μεταβλητή για κάθε στόχο θα είχαμε ένα δύσχρηστο από άποψη κατασκευής αλλά και εφαρμογής σύστημα

Η γλωσσική μεταβλητή lc συμμετέχει κατά 20% στο συνολικό αποτέλεσμα, Η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων ps κατά 30% και η γενική μαθηματική γνώση κατά 50% στο συνολικό αποτέλεσμα.

Ως μεταβλητή εξόδου χρησιμοποιούμε την:

cl (cognitive level) : που παριστάνει το γνωστικό επίπεδο του μαθητή στα μαθηματικά.

Όλες οι λεκτικές μεταβλητές εισόδου παίρνουν τιμές από το 0 έως το 100, όπως δηλαδή συνηθίζουμε να βαθμολογούμε τα τεστ αξιολόγησης των μαθητών.

3.3 Ασαφή υποσύνολα και συναρτήσεις συμμετοχής

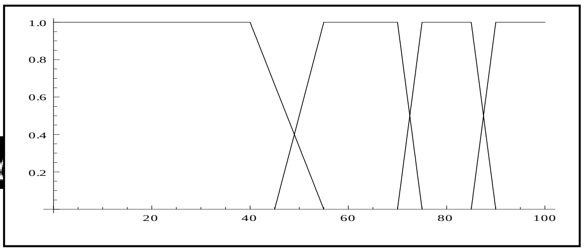
Επιλέγουμε τώρα τα ασαφή σύνολα. Ορίζουμε για τις μεταβλητές εισόδου gm, ps και cl τα παρακάτω υποσύνολα:

$$\text{κακός} = \begin{cases} 1, & \text{για } 0 \le x \le 40 \\ -\frac{x}{15} + \frac{55}{15}, & \text{για } 40 < x < 55 \end{cases}$$

$$\text{μέτριος} = \begin{cases} \frac{x}{10} - \frac{45}{10}, & \text{για } 45 \le x < 55 \\ 1, & \text{για } 55 \le x \le 70 \\ -\frac{x}{5} + 15, & \text{για } 70 < x < 75 \end{cases}$$

$$\text{καλός} = \begin{cases} \frac{x}{5} - 14, & \text{για } 70 < x < 75 \\ 1, & \text{για } 75 \le x \le 85 \\ -\frac{x}{5} + 18, & \text{για } 85 < x < 90 \end{cases}$$

$$\text{άριστος} = \begin{cases} \frac{x}{5} - 17, & \text{για } 85 \le x \le 90 \\ 1, & \text{για } 90 \le \mathrm{x} \le 100 \end{cases}$$



όπου x, ο βαθμός που παίρνει ο μαθητής σε κάθε μία από τις παραπάνω μεταβλητές εισόδου. Η

Open Education - The Journal for Open and Distance Education and Educational Technology
Volume 8, Number 1, 2012 Section one. © Open Education ISSN: 1791-9312

επιλογή των ασαφών υποσυνόλων των μεταβλητών εισόδου και εξόδου έγινε με βάση την εμπειρία και την συνήθη εκπαιδευτική θεώρηση. Αντίστοιχες εφαρμογές και ορισμοί των ασαφών υποσυνόλων έχουν γίνει και στα [14] και [15] της βιβλιογραφίας.

3.4 Εφαρμογη στο Matlab

Το υπολογιστικό εργαλείο στο οποίο θα εφαρμοστεί το ασαφές συμπερασματικό σύστημα διαγνωστικής αξιολόγησης που είναι το MatLab.Το MatLab περιέχει ένα «κέλυφος» κατασκευής τέτοιων συστημάτων, το Fuzzy Logic Toolbox. Το Fuzzy Logic Toolbox είναι μια συλλογή συναρτήσεων κατασκευασμένων στο αριθμητικό υπολογιστικό περιβάλλον του MatLab. Αν και το MatLab δίνει την δυνατότητα στο κατασκευαστή του συστήματος να δουλέψει αποκλειστικά από την γραμμή εντολών είναι γενικά ευκολότερο να δουλέψει κανείς το σύστημα γραφικά[1]. Θα παραθέσουμε στην παρούσα εργασία κάποια βασικά χαρακτηριστικά του συστήματος, ενώ περισσότερες λεπτομέρειες υπάρχουν στο [21].

Μέσω του FIS editor χειριζόμαστε τα υψηλής σημασίας χαρακτηριστικά του συστήματος. Στην μέθοδο αποασαφοποίησης επιλέξαμε να είναι βαρυκεντρικού τύπου. Δηλαδή:

$$y=\frac{\sum_{i=1}^{m}\mu_{Y_1}\;\; y_1^0\;\;\cdot y_1^0}{\sum_{i=1}^{m}\mu_{Y_1}\;\; y_1^0}$$

Σε ότι αφορά την Ένωση και την Τομή του συστήματός μας επιλέξαμε να χρησιμοποιήσουμε τις:

$$\mathrm{A}\cup\mathrm{B}=\mathrm{Max}\;\;\mathrm{A}(x),\mathrm{B}(x)\quad \text{και}\quad \mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\mathrm{Min}\;\;\mathrm{A}(x),\mathrm{B}(x)$$

αντίστοιχα. Και για τη συνεπαγωγή το MatLab χρησιμοποιεί την:

$$\mu_{A\Rightarrow B}\;\; a,b\;\;=\min\;\;\mu_A\;\; a\;\;,\mu_B\;\; B$$

Αυτή έχει επιλεγεί και στην κατασκευή του συστήματός μας. Οι κανόνες βασίζονται στην εμπειρία του κατασκευαστή. Ως εμπειρία του κατασκευαστή θεωρείται το σύνολο των πληροφοριών που έχει στα χέρια του ο κατασκευαστής του συστήματος από πειράματα, έρευνα ή καθημερινή πρακτική.

Ο κάθε ένας από τους παραπάνω κανόνες έχει συντελεστή βαρύτητας 1. Μπορεί κάποιος αν θέλει βέβαια να δώσει βάρος σε έναν ή περισσότερους κανόνες και ο Rule Editor του MatLab υποστηρίζει αυτή τη δυνατότητα.

3.5 Αξιολόγηση του συστήματος

Για να αξιολογήσουμε την αξιοπιστία και την εγκυρότητα του συστήματος θα πρέπει να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που μας δίνει το μοντέλο που κατασκευάστηκε με ένα πρότυπο μέτρο. Αρχικά θεωρήσαμε τη γλωσσική μεταβλητή lc να συμμετέχει κατά 20% στο συνολικό αποτέλεσμα, την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων ps κατά 30% και τη γενική μαθηματική γνώση κατά 50% στο συνολικό αποτέλεσμα. Άρα θα μπορούσαμε να αναμένουμε τιμή για την μεταβλητή εξόδου που δίδεται από τον τύπο:

$$\mathrm{cl}=0.5\mathrm{gm}+0.3\mathrm{ps}+0.2\mathrm{lc}\quad(3.51)$$

[1] Πληροφορίες και εκτιμήσεις από J.S. Roger Jang, Ned Gulley, “Matlab Fuzzy Logic Toolbox”

Οι παραπάνω τιμές επιλέχτηκαν τυχαία, από όλο το φάσμα των τιμών των μεταβλητών εισόδου του συστήματος. Η στήλη με τις αναμενόμενες τιμές κατασκευάστηκε αντικαθιστώντας τις τιμές εισόδου στον παραπάνω τύπο (3.51)

Το σύστημα που κατασκευάστηκε βασίζεται σε κανόνες που συνδέουν τις τιμές των μεταβλητών εισόδου και εξάγουν ένα συμπέρασμα για το γνωστικό επίπεδο του μαθητή. Η σχέση αυτή δεν είναι γραμμική και η συμπερασματολογία δεν θα μπορούσε να εξαχθεί από έναν γραμμικό τύπο.

General Mathematics Knowledge	Problem Solving	Language Capability	Cognitive Level	Αναμενόμενη Τιμή	Απόλυτο σφάλμα
15	27	42	24.1	24	**0.1**
18	87	82	60.7	59.7	**1**
20	25	50	25.4	27.5	**3.5**
24	21	65	23.7	31.3	**7.6**
30	50	70	40.1	44	**3.9**
34	20	10	23.7	25	**1.3**
40	52	58	47.5	47.2	**0.3**
42	10	0	24.1	24	**0.1**
48	80	65	60.5	61	**0.5**
50	80	60	60.6	61	**0.4**
54	28	90	56.1	53.4	**2.7**
59	60	78	61.1	63.1	**2**
62	20	50	40.1	47	**6.9**
67	44	88	60.7	64.3	**3.6**
69	89	77	74	76.6	**2.6**
70	60	50	60.6	63	**2.4**
74	91	64	74	76.5	**2.5**
76	42	21	61	54.8	**6.2**
84	71	75	80	78.3	**1.7**
94	**92**	**91**	**93.9**	**92.8**	**1.1**

Οι αναμενόμενες τιμές παρέχονται εδώ για να μελετηθεί η προσαρμογή του συστήματος σε ένα πρότυπο μέτρο. Όπως φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα ενδεικτικών τιμών τα εξαγόμενα από το σύστημα αποτελέσματα έχουν απόλυτα σφάλματα που στις περισσότερες περιπτώσεις δεν υπερβαίνουν τις 3 μονάδες με μέγιστο το 100. Στις περισσότερες περιπτώσεις έχουμε λοιπόν απόκλιση από την αναμενόμενη τιμή που δεν υπερβαίνει το 3%.

Η πρώτη εκτίμηση είναι λοιπόν ότι το σύστημα προσαρμόζεται καλά στο πρότυπο μέτρο. Ακόμα και σε περιπτώσεις που τα σφάλματα που προκύπτουν και μπορεί να είναι μεγαλύτερα, ειδικά όταν έχουμε ακραίες περιπτώσεις τιμών δεν μπορούν να αποδοθούν σε ανεπάρκεια του συστήματος αλλά αντιθέτως στην σωστή λειτουργία του συστήματος. Ένας από τους σκοπός της εφαρμογής ενός ασαφούς συμπερασματικού συστήματος στην διαγνωστική αξιολόγηση των μαθητών είναι η εξαγωγή συμπερασμάτων σε περιβάλλον όπου οι πληροφορίες είναι ασαφείς, συγκεχυμένες, αβέβαιες ή και ανακριβείς. Τα σφάλματα αυτά είναι θεμιτά και φανερώνουν την ανάγκη κατασκευής ενός τέτοιου συστήματος ώστε να μπορούμε να προβλέψουμε και να εξάγουμε εκτιμήσεις σε καταστάσεις ακραίων, ανακριβών και ασαφών γενικά περιπτώσεων.

4. Γιατί fuzzy;

Καινοτομίες του ασαφούς συμπερασματικού μοντέλου διαγνωστικής αξιολόγησης

Ένα ερώτημα που θα πρέπει να απαντηθεί με την ολοκλήρωση της παρουσίασης του ασαφούς συμπερασματικού συστήματος είναι γιατί πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τα ασαφή συστήματα για την κατασκευή ενός τέτοιου μοντέλου. Τι καινούριο εισάγει η θεωρία των ασαφών συμπερασματικών συστημάτων στην μοντελοποίηση και εν προκειμένω ποια είναι η καινοτομία του συστήματος της διαγνωστικής αξιολόγησης των μαθητών που εισήχθη στις προηγούμενες παραγράφους.

Τα ασαφή συμπερασματικά μοντέλα βασίζονται σε μεγάλο βαθμό στην αβεβαιότητα. Η αβεβαιότητα αυτή έχει να κάνει με τις πληροφορίες και κυρίως με την έλλειψη αυτών στην προσπάθειά μας να μοντελοποιήσουμε ένα πρόβλημα. Υπάρχουν πολλές περιπτώσεις έλλειψης πληροφορίας. Η πληροφορία μας μπορεί για παράδειγμα να είναι ατελής, ανακριβής, αποσπασματική, αναξιόπιστη, αόριστη ή αμφιλεγόμενη. Ο Biswas στο [13], υποστηρίζει πως η χρήση της ασαφούς λογικής στην αξιολόγηση κρίνεται απαραίτητη αφού κάθε εκπαιδευτικό βαθμολογικό σύστημα περιέχει ένα ποσό αβεβαιότητας. O Fournali sto [14], υποστηρίζει ότι ο λόγος για την υιοθέτηση της ασαφούς προσέγγισης είναι ότι σε ότι αφορά την εκπαιδευτική αξιολόγηση, διαφορετικοί εκτιμητές έχουν διαφορετικά μέτρα αξιολόγησης. O Law στο [15] αναφέρει τρεις σημαντικούς παράγοντες που προκρίνουν την ασαφή προσέγγιση στην αξιολόγηση. Πρώτα απ' όλα οι βαθμοί που δίνονται από τους εκπαιδευτικούς για την μαθητική επίδοση δεν είναι πάντα ακριβείς. Δεύτερον οι εξετάσεις αποτελούνται από αβέβαια-ασαφή δεδομένα, ενώ τέλος πολλοί εκπαιδευτικοί βαθμολογούν τους μαθητές με λεκτικούς όρους. Γίνεται λοιπόν σαφές ότι η ασαφή λογική και τα ασαφή συστήματα μπορούν να αντιμετωπίσουν τις παραπάνω περιπτώσεις ασάφειας και αβεβαιότητας που υπάρχουν στην διαδικασία της εκπαιδευτικής αξιολόγησης.

Ένα ασαφές συμπερασματικό μοντέλο χρησιμοποιεί την διαδικασία του προσεγγιστικού συλλογισμού η οποία μιμείται την ανθρώπινη συλλογιστική. Έτσι μπορεί και εκμεταλλεύεται την φυσική γλώσσα και η διαδικασία του προγραμματισμού και της κατασκευής του συστήματος καθίσταται εύκολη και πρακτική. Είναι φανερό λοιπόν, ότι ένα ασαφές συμπερασματικό σύστημα μπορεί να κατασκευαστεί γρήγορα, με ελάχιστο κόστος και έχει υψηλή χρηστική αξία.

Τα ασαφή συμπερασματικά συστήματα εκμεταλλεύονται με τον βέλτιστο τρόπο την εμπειρία και τα δεδομένα που προέρχονται από αυτή. Όπως είδαμε και στην κατασκευή του ασαφούς συστήματος διαγνωστικής αξιολόγησης που παρουσιάστηκε παραπάνω η θεμελίωση του βασίστηκε σε δεδομένα που προέρχονται από την ανθρώπινη εμπειρία. Χρησιμοποιήθηκε η εξειδικευμένη γνώση του κατασκευαστή σε κάθε βήμα της κατασκευής του συστήματος.

Το ασαφές συμπερασματικό σύστημα διαγνωστικής αξιολόγησης που κατασκευάσαμε προσφέρει μεγάλη ευελιξία στην διαχείριση και μεταβολή των δεδομένων και των αποτελεσμάτων . Το παραπάνω σύστημα μπορεί να αποτελέσει πρότυπο στην κατασκευή συστημάτων αξιολόγησης γενικότερα. Το σύστημα που κατασκευάσαμε βασίζεται στην γενική αρχή ότι η διαδικασία της αξιολόγησης βασίζεται στους στόχους που έχουμε εξ' αρχής θέσει. Από τους στόχους αυτούς λαμβάνονται οι μεταβλητές εισόδου του συστήματος και θέτονται οι γλωσσικοί κανόνες. Με μια αλλαγή λοιπόν των μεταβλητών και τον κανόνων, εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία το σύστημα μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλες εκπαιδευτικές, ιατρικές ή άλλου είδους αξιολογικές διαδικασίες.

5. Βιβλιογραφία

[1]G.J. Klir, B. Yuan (1995), 'Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, Theory and applications', Prentice-Hall,New Jersey,

[2] Y. Shi, et al.(2009), 'On dependencies and independencies of fuzzy implication axioms', Fuzzy Sets and Systems

[3] Y. Shi, D. Ruan, E. E. Kerre,(2007), 'On the characterizations of fuzzy implications satisfying $I \; x,y = I \; x, I \; x,y$ ', Information Sciences

[4] H. Bustince, P. Burillo, F. Soria (2003) , 'Automorphisms, negations and implication operators', Fuzzy Sets and Systems

[5] J. Dombi(1982), 'A General Class of Fuzzy Operators, the De Morgan Class of Fuzzy Operators and Fuzziness Measures Induced by Fuzzy Operators', Fuzzy Sets and Systems, p. 149-163
[6] B. De Baets, E.E. Kerre (1993), 'The generalized modus ponens and the triangular fuzzy data model', Fuzzy Sets and Systems 59, p. 305-317
[7] D. Dubois, H. Prade (1999), 'Fuzzy Sets In Approximate Reasoning, Part1: Inference with Possibility Distributions', Fuzzy Sets and Systems, p. 73-132
[8] Ana Pradera, et al (2007), 'On Fuzzy Set Theories, Fuzzy Logic A Spectrum of Theoretical and Pragnatic Issues', Springer
[9] George J. Klir (2006). 'Uncertainty and Information. Foundations of Generalized Information Theory. (John Wiley)
[10] Ronald R. Yager, Dimitar P. Filev (1994).Essentials of fuzzy modeling and Control. (John Wiley)
[11] Guanrong Chen, Trung Tat Pham (2001). Introduction to Fuzzy Sets, Fuzzy logic and Fuzzy Control Systems (CRC Press)
[12] Paul P. Wang, Da Ruan, Etienne E. Kerre, (Eds) (2007) Fuzzy Logic, A spectrum of Theoretical and Practical Issues. (Springer)
[13] R. Biswas (1995), "An application of fuzzy sets in students' evaluation," Fuzzy Sets and Systems, vol. 74, no. 2, pp. 187-194.
[14] Fourali (1994),"Fuzzy logic and the quality of assessment of portfolios", Fuzzy Sets and Systems 68:123–139"
[15] Law (1996) "Using fuzzy numbers in educational grading system. Fuzzy Sets Syst 83:311–323"
[16] Khairul A. Rasmani, Qiang Shen (2006). Data-driven fuzzy rule generation and its application for student academic performance evaluation.(Springer Science and Business Media, LLC)
[17] Fuzzy Logic Applications to Students' Evaluation in Intelligent Learning Systems, XVI Congreso Nacional y II Congreso Internacional de Informática y Computación
de la ANIEI. Zacatecas, 22-24 de octubre del 2003. Vol. I, pp. 161 – 166.
[18] Hui-Yu Wang and Shyi-Ming Chen. New Methods for Evaluating Students' Answerscripts Using Fuzzy Numbers Associated with Degrees of Confidence, 2006 IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Vancouver Canada
[19] J. S. Roger Jang, Ned Gulley (1995), "Matlab Fuzzy Logic Toolbox", The Mathworks Inc,
[20] William A. Mehrens, Irvin J. Lehmann. Measurement and Evaluation in Education and Psychology (Wadsworth)
[21] Δ. Ζουκης (2009), "Ασαφή συμπερασματικα μοντέλα και εφαρμογη στη διαγνωστική αξιολόγηση των μαθηματικών, Διπλωματική Εργασία, ΕΑΠ, Πατρα,
[22] Μ. Τουμάσης (2002), "Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών" Εκδόσεις Gutenberg
[23] ΥΠ.Ε.Π.Θ. (1998), Κέντρο εκπαιδευτικής έρευνας , "Η αξιολόγηση των μαθητών της Α' Λυκείου στα Μαθηματικά" Αθήνα
[24] ΥΠ.Ε.Π.Θ. (1998), Κέντρο εκπαιδευτικής έρευνας , "Η αξιολόγηση των μαθητών της Α' Λυκείου (Γενικές οδηγίες και στοιχεία μεθοδολογίας)", Αθήνα

Σημείωση

Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών «Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά» της Σχολής Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου και αποτελεί μέρος της διπλωματικής εργασίας του συγγραφέως, η οποία εκπονήθηκε υπό την επίβλεψη του Δρ. Παπαδόπουλου Βασιλείου, Καθηγητή Δημοκρίτειου Πανεπιστημίου Θράκης, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών (papadob@civil.duth.gr .)