

## Ανοικτή Εκπαίδευση: το περιοδικό για την Ανοικτή και εξ Αποστάσεως Εκπαίδευση και την Εκπαιδευτική Τεχνολογία

Τόμ. 8, Αρ. 1 (2012)

Ανοικτή Εκπαίδευση



Ανάπτυξη Μαθηματικών Θεμάτων στα πλαίσια της ΑεξΕκπ.

Μιχαήλ Ανούσης

doi: [10.12681/jode.9788](https://doi.org/10.12681/jode.9788)

Βιβλιογραφική αναφορά:

**Ανάπτυξη Μαθηματικών Θεμάτων στα πλαίσια της ΑεξΕκπ.**

**Mathematical Master Theses on Pure Mathematics, in the frame of Open  
Distance education**

**Μιχαήλ Ανούσης**  
Πανεπιστήμιο Αιγαίου  
Τμήμα Μαθηματικών  
Καθηγητής  
[mano@aegean.gr](mailto:mano@aegean.gr)

**Περίληψη**

Παρουσιάζουμε συνοπτικά διπλωματικές εργασίες που έχουν εκπονηθεί στο πρόγραμμα Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά του ΕΑΠ στην περιοχή των θεωρητικών μαθηματικών.

**Abstract**

We briefly present master's theses submitted in the program Graduate Studies in Mathematics of the Hellenic Open University which are in the area of pure mathematics.

**Λέξεις κλειδιά**

*thesis, pure mathematics*

**1. Η κατεύθυνση των θεωρητικών μαθηματικών**

Συχνά όταν μιλάμε ή γράφουμε για τα μαθηματικά αναφερόμαστε στα θεωρητικά μαθηματικά και στα εφαρμοσμένα μαθηματικά. Εν τούτοις η διάκριση μεταξύ τους δεν είναι σαφής. Περιοχές που θεωρούνται ότι ανήκουν στα εφαρμοσμένα μαθηματικά έχουν ισχυρό θεωρητικό υπόβαθρο (για παράδειγμα η Αριθμητική Ανάλυση ή τα Χρηματοοικονομικά) και περιοχές των θεωρητικών μαθηματικών έχουν συχνά σημαντική εφαρμοσμένη διάσταση (για παράδειγμα η Θεωρία Αριθμών και η Θεωρία Αλγεβρικών Καμπυλών χρησιμοποιούνται ουσιαστικά στην κρυπτογραφία). Πολλές φορές αυτό που διαφοροποιεί τους μαθηματικούς είναι η οπτική με την οποία προσεγγίζουν το αντικείμενο τους καθώς και τα εργαλεία που χρησιμοποιούν.

Με την επεξεργασία μαθηματικών θεμάτων είτε στα πλαίσια των Θεματικών Ενοτήτων είτε στα πλαίσια της εκπόνησης μιας διπλωματικής εργασίας, οι φοιτητές του Προγράμματος ΜΣΜ του ΕΑΠ εξοικειώνονται με την μαθηματική αυστηρότητα, καλλιεργούν την δυνατότητα της αφηρημένης προσέγγισης και βοηθούνται στο να κατανοήσουν πως αναπτύσσεται και δομείται μια θεωρία.

Τα θεωρητικά μαθηματικά χρειάζονται σαν υπόβαθρο για την παρακολούθηση των Θεματικών Ενοτήτων του προγράμματος, αλλά αποτελούν και αντικείμενο μελέτης αυτά καθαυτά από τους φοιτητές του προγράμματος. Αυτό γίνεται κυρίως μέσα από την εκπόνηση διπλωματικών εργασιών. Οι διπλωματικές εργασίες που πολλοί φοιτητές του προγράμματος επιλέγουν να εκπονήσουν στα θεωρητικά μαθηματικά, είναι κατά κανόνα συνθετικές. Δηλαδή οι φοιτητές καλούνται να παρουσιάσουν έναν κλάδο ή ένα μέρος του ή να παρουσιάσουν κάποιο γνωστό σημαντικό πρόβλημα.

Επίσης πολλές διπλωματικές εργασίες έχουν υβριδικό χαρακτήρα, δηλαδή μπορεί να είναι πάνω σε θέματα θεωρητικών και εφαρμοσμένων μαθηματικών, ή σε θέματα θεωρητικών μαθηματικών και ιστορίας των μαθηματικών ή επιστημολογίας.

## **2. Η κατεύθυνση των θεωρητικών μαθηματικών στο πρόγραμμα**

Τα θεωρητικά μαθηματικά είναι παρόντα σε όλα τα προγράμματα σπουδών μαθηματικών είτε σε αυτόνομη μορφή, είτε στα πλαίσια άλλων μαθημάτων.

Αναφέρουμε ότι στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Μαθηματικών του Ανοικτού Πανεπιστημίου της Μεγάλης Βρετανίας (The open university (uk)) προσφέρονται τα ακόλουθα μεταπτυχιακά μαθήματα:

Αναλυτική Θεωρία Αριθμών I και II, Γεωμετρία των Fractals, Συναρτησιακή Ανάλυση, Λογισμός Μεταβολών και Προχωρημένος Λογισμός.

Η κατεύθυνση των θεωρητικών μαθηματικών στο πρόγραμμα θεραπεύεται κυρίως στην Θεματική Ενότητα ΜΣΜ 50.

Σκοπός της Θεματικής Ενότητας είναι η εμπέδωση βασικών μαθηματικών γνώσεων και τεχνικών από την Ανάλυση, την Γραμμική Άλγεβρα, τη Θεωρία Πιθανοτήτων και την Στατιστική ούτως ώστε οι φοιτητές να αποκτήσουν το αναγκαίο υπόβαθρο για την παρακολούθηση των μαθημάτων του δευτέρου έτους σπουδών.

Δίνεται έμφαση στην εμβάθυνση σε θεμελιώδεις μαθηματικές έννοιες, καθώς και στην εξοικείωση με τους υπολογισμούς.

Η Θ.Ε. περιλαμβάνει τις ακόλουθες υποενότητες

1. Προχωρημένη Ανάλυση
2. Γραμμική Άλγεβρα
3. Στοιχεία Στοχαστικών Μαθηματικών
4. Αναλυτική & Διαφορική Γεωμετρία

Τα θεωρητικά μαθηματικά υπάρχουν σε σημαντικό βαθμό και στις άλλες ΘΕ:

Στην Θεματική ενότητα ΜΣΜ 60 για την μελέτη των Διαφορικών και Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χρησιμοποιούνται τεχνικές από την Κλασική Ανάλυση, την Ανάλυση Fourier, την θεωρία Τελεστών, την Συναρτησιακή Ανάλυση.

Στην Θεματική ενότητα ΜΣΜ 51 γίνεται συζήτηση για τα θεμέλια των μαθηματικών.

Στην ΜΣΜ 62 υπάρχουν ειδικά θέματα Εφαρμοσμένης Άλγεβρας, Ανάλυσης και Γεωμετρίας.

## **3. Τα θεωρητικά μαθηματικά στις διπλωματικές εργασίες.**

Οι τομείς που οι φοιτητές του προγράμματος εκπονούν διπλωματικές εργασίες είναι πολλοί. Αναφέρουμε: Κλασική Ανάλυση, Συναρτησιακή Ανάλυση, Τοπολογία, Κρυπτογραφία, Διαφορική Γεωμετρία, Άλγεβρική Γεωμετρία, Ασαφή Σύνολα κα.

Στην συνέχεια παρουσιάζουμε θέματα που έχουν διαπραγματευτεί οι φοιτητές μας σε κάποιες διπλωματικές εργασίες.

Τις τελευταίες δεκαετίες έχει αναπτυχθεί μεγάλο ενδιαφέρον για την θεωρία των Fractals. Τα fractals είναι σύνολα που έχουν πολύπλοκη δομή και η γεωμετρία τους δεν μπορεί να περιγραφεί με κλασικούς όρους. Δεν υπάρχει απλός ορισμός των fractals. Ένα χαρακτηριστικό τους είναι η αυτομοιότητα: πολλές φορές ένα fractal μπορεί να γραφεί σαν ένωση υποσυνόλων του που το καθένα από αυτά είναι ένα αντίτυπο του αρχικού συνόλου σε μικρότερη κλίμακα. Ένα άλλο χαρακτηριστικό τους είναι ότι αν προσπαθήσουμε να τους αποδώσουμε διάσταση με εύλογο τρόπο, τότε πολύ συχνά η διάσταση τους δεν είναι ακέραιος αριθμός. Το πρωτότυπο των fractals μπορεί να θεωρηθεί το σύνολο του Cantor, ενώ ένα πολύ γνωστό fractal είναι

το σύνολο του Mandelbrot.

Στην εργασία της κας Μαγδαληνής Κοκκαλιάρη με θέμα «Fractals: Μαθηματική ανάλυση-Μελέτη-Εφαρμογές», 2009

παρουσιάζονται βασικά παραδείγματα fractals, με ιδιαίτερη αναφορά στο σύνολο Cantor, καθώς και οι χαρακτηριστικές τους ιδιότητες.

Το πρώτο μέρος είναι αφιερωμένο στη μαθηματική ανάλυση των fractals. Ορίζεται η διάσταση Hausdorff και η διάσταση box counting ενός συνόλου. Υπολογίζονται αυτές οι διαστάσεις σε παραδείγματα. Κατόπιν, παρουσιάζονται τεχνικές υπολογισμού της διάστασης Hausdorff. Παρουσιάζονται και μελετώνται τα γενικευμένα σύνολα Cantor καθώς και διάφορα άλλα παραδείγματα fractals.

Η Θεωρία Γραφημάτων είναι η μελέτη των γραφημάτων, δομών που χρησιμοποιούνται για να μοντελοποιήσουν διμερείς σχέσεις μεταξύ αντικειμένων από μια συλλογή. Ένα γράφημα είναι μια συλλογή κορυφών και μια συλλογή από πλευρές που συνδέουν ζεύγη κορυφών. Ένα γράφημα μπορεί να είναι κατευθυνόμενο ή όχι. Δηλαδή οι πλευρές να ξεκινούν από μια κορυφή και να καταλήγουν σε μια άλλη, η να μην γίνεται διάκριση μεταξύ αρχής και τέλους της πλευράς. Τα γραφήματα είναι βασικό αντικείμενο του κλάδου των διακριτών μαθηματικών.

Η θεωρία γραφημάτων έχει εφαρμογές στην Κοινωνιολογία, στην Βιολογία, στην Συγκοινωνιολογία κα

Επίσης έχει εφαρμογές στην Γεωμετρία, στην Τοπολογία, στην Θεωρία Κόμβων και στην Θεωρία Ομάδων.

Ο Άγγελος Ανανίας εκπόνησε διπλωματική εργασία με τίτλο «Θεωρία Γραφημάτων: Επίπεδα Γραφήματα-Χρωματισμοί-Θεωρία Ramsey», 2010.

Στην εργασία αυτή αφού δοθούν οι βασικοί ορισμοί, παρουσιάζονται διάσημα προβλήματα που συνέβαλαν στην εξέλιξη της Θεωρίας των Γραφημάτων. Οι γέφυρες του Königsberg, τα κυκλώματα Hamilton και το Πρόβλημα του Πλανόδιου Πωλητή είναι μερικά από αυτά.

Παρουσιάζονται και μελετώνται τα επίπεδα γραφήματα και ο χρωματισμός γραφημάτων και γίνεται παρουσίαση των θεωρημάτων των τεσσάρων και πέντε χρωμάτων.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται μια εισαγωγή στη θεωρία Ramsey, μια θεωρία δύσκολη με πολλά ανοικτά προβλήματα.

Τα ασαφή σύνολα εισήχθησαν από τον Zadeh την δεκαετία του 1960. Στα κλασικά σύνολα ένα στοιχείο ανήκει ή δεν ανήκει στο σύνολο. Στην θεωρία των ασαφών συνόλων υπάρχουν διάφοροι βαθμοί ανήκειν. Αυτό γίνεται με την βοήθεια της συνάρτησης συμμετοχής που παίρνει τιμές στο διάστημα από μηδέν έως ένα. Αν η συνάρτηση παίρνει τιμές μόνον μηδέν ή ένα, έχουμε ένα κλασικό σύνολο. Οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις των κλασικών συνόλων είναι ειδική περίπτωση συναρτήσεων συμμετοχής.

Παράλληλα με την θεωρία των ασαφών συνόλων αναπτύσσεται και η θεωρία της ασαφούς λογικής. Πρόκειται για μια πλειότιμη λογική όπου οι μεταβλητές παίρνουν τιμές από μηδέν έως και ένα. Έτσι μια πρόταση μπορεί να έχει μια τιμή αλήθειας που είναι ένας αριθμός από μηδέν έως και ένα, ενώ στην κλασική λογική μπορεί να έχει μόνο μηδέν ή ένα. Η θεωρία αυτή έχει πολλές εφαρμογές ειδικά σε περιοχές όπου η πληροφορία δεν είναι πλήρης η ακριβής. Έχει επίσης εφαρμογές στην Θεωρία Ελέγχου, στην Τεχνητή Νοημοσύνη και στην Θεωρία Αποφάσεων.

Η Ζαφειρία Καταβόλου εκπόνησε διπλωματική εργασία με τίτλο «Ασαφής Θεωρία Αποφάσεων», 2011.

Στα προβλήματα του πραγματικού κόσμου πολλές φορές οι αποφάσεις

λαμβάνονται σε συνθήκες αβεβαιότητας, δηλαδή έλλειψης ακριβούς πληροφορίας. Πηγές αβεβαιότητας αποτελούν τα ελλιπή δεδομένα καθώς και αντικειμενικοί περιορισμοί (οικονομικοί, χρονικοί). Η διαδικασία λήψης απόφασης πραγματοποιείται σε ένα ασαφές περιβάλλον και η Ασαφής Λογική αποτελεί το κύριο εργαλείο επίλυσης προβλημάτων απόφασης στα πλαίσια της Ασαφούς Θεωρίας Αποφάσεων.

Στην εργασία παρουσιάζονται οι βασικές αρχές της Ασαφούς Λογικής, η βασική μεθοδολογία μοντελοποίησης και επίλυσης προβλημάτων απόφασης και συγκεκριμένα μοντέλα επίλυσης προβλημάτων απόφασης.

Η Αντιγόνη Μασιαλά εκπόνησε διπλωματική εργασία με τίτλο «Ασαφείς εκτιμητές παραμέτρων συναρτήσεων πιθανότητας», 2009.

Στην εργασία αυτή συνδέεται η εκτιμητική από τη στατιστική με την εκτιμητική των ασαφών αριθμών έτσι ώστε να επιτευχθεί ακριβέστερη εκτίμηση για τις παραμέτρους των συναρτήσεων πιθανότητας. Περιγράφεται η κατασκευή ασαφών εκτιμητών και παρουσιάζεται ο έλεγχος ασαφών στατιστικών υποθέσεων.

Ο Δημήτριος Κόλκας εκπόνησε διπλωματική εργασία με τίτλο «Οι έννοιες του ασαφούς εγκλεισμού και της ασαφούς εντροπίας στην Ασαφή Θεωρία Συνόλων», 2010.

Στην εργασία παρουσιάζονται τρόποι παραγωγής μέτρων ασαφούς εγκλεισμού και ασαφούς εντροπίας από ασαφείς συνεπαγωγές.

Στα πρώτα δύο κεφάλαια παρουσιάζονται βασικές έννοιες της Κλασικής Θεωρίας Συνόλων και της Ασαφούς Θεωρίας Συνόλων. Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι έννοιες του ασαφούς εγκλεισμού και της ασαφούς εντροπίας και πως συνδέονται μεταξύ τους. Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τρόποι παραγωγής μέτρων ασαφούς εγκλεισμού και ασαφούς εντροπίας από ασαφείς συνεπαγωγές.

Η Αλγεβρική Γεωμετρία είναι ο κλάδος των μαθηματικών ο οποίος συνδυάζει τεχνικές από την Άλγεβρα με την γλώσσα και τα προβλήματα της Γεωμετρίας. Έχει κεντρικό ρόλο στα σύγχρονα μαθηματικά και συνδέεται με την Μιγαδική Ανάλυση, την Τοπολογία και την Θεωρία Αριθμών. Κεντρικό αντικείμενο μελέτης της Αλγεβρικής Γεωμετρίας είναι οι αλγεβρικές πολλαπλότητες. Δηλαδή σύνολα λύσεων συστημάτων πολυωνυμικών εξισώσεων. Παραδείγματα πολλαπλοτήτων είναι οι καμπύλες δευτέρου βαθμού στο επίπεδο και οι επιφάνειες δευτέρου βαθμού στον χώρο. Αυτό που ενδιαφέρει είναι οι ιδιότητες του συνόλου των λύσεων (δηλαδή της πολλαπλότητας) και όχι η εύρεση κάποιων λύσεων. Η ιδέα του Descartes για την χρήση συντεταγμένων για την περιγραφή γεωμετρικών αντικειμένων στο επίπεδο είναι κεντρική στην Αλγεβρική Γεωμετρία.

Η Αλγεβρική Γεωμετρία είναι μια περιοχή των μαθηματικών με μεγάλη ερευνητική δραστηριότητα και τεχνική δυσκολία. Αξίζει να αναφέρουμε ότι ο A. Wiles στην απόδειξη του τελευταίου θεωρήματος του Fermat χρησιμοποιεί τεχνικές από την Αλγεβρική Γεωμετρία.

Η κα Ελένη Ταξίδου εκπόνησε διπλωματική εργασία με τίτλο «Εισαγωγή στην Αλγεβρική Γεωμετρία», 2010.

Στην εργασία μελετώνται το πρόβλημα της απαλοιφής της παραμέτρου (implicitization), το πρόβλημα του «ανήκειν» σε κάποιο ιδεώδες (ideal membership), και το πρόβλημα της παρεμβολής. Εισάγονται και μελετώνται οι βάσεις Groebner. Στο τρίτο κεφάλαιο αναπτύσσονται κριτήρια για το πότε ένα σύστημα εξισώσεων έχει λύση.

Στα σύγχρονα μαθηματικά πέρα από την μελέτη συναρτήσεων, δίνεται έμφαση στην μελέτη κλάσεων συναρτήσεων. Οι συναρτήσεις θεωρούνται σαν στοιχεία ενός

συνόλου το οποίο πολύ συχνά έχει κάποια δομή. Για παράδειγμα είναι γραμμικός ή τοπολογικός χώρος. Η αλληλεπίδραση αυτών το δομών χαρακτηρίζει την Συναρτησιακή Ανάλυση.

Ο Νικόλαος Κοκαρίδας εκπόνησε διπλωματική εργασία με τίτλο «Τοπολογίες σε χώρους συναρτήσεων», 2011.

Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται τοπολογίες σε χώρους συναρτήσεων. Η προσέγγιση στηρίζεται στην θεωρία κατηγοριών και στην θεωρία συνεχών δικτυωτών. Μελετώνται οι point-open, set-open compact-open τοπολογίες στο χώρο των συνεχών συναρτήσεων από έναν τοπολογικό χώρο σε έναν άλλον. Επίσης μελετώνται οι splitting και οι jointly continuous τοπολογίες.

Το πέμπτο αίτημα του Ευκλείδη είναι ότι από σημείο εκτός ευθείας φέρεται μια ακριβώς ευθεία παράλληλη προς την δοθείσα ευθεία. Το πέμπτο αίτημα είναι η αιτία για μια συζήτηση που κράτησε είκοσι αιώνες και συνέβαλε στην ανακάλυψη της Υπερβολικής Γεωμετρίας. Στην υπερβολική γεωμετρία μπορούμε από σημείο εκτός ευθείας να φέρουμε περισσότερες από μία ευθείες παράλληλες προς την δοθείσα ευθεία.

Η Παγόνα Πανκίδου εκπόνησε διπλωματική εργασία με θέμα «Το πέμπτο αίτημα του Ευκλείδη και η ανακάλυψη της Υπερβολικής Γεωμετρίας», 2010.

Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται οι σημαντικότεροι πρόδρομοι της Υπερβολικής Γεωμετρίας (Saccheri, Lambert, Legendre) και αναλύεται το έργο τους. Στην συνέχεια παρουσιάζονται οι θεμελιωτές της Υπερβολικής Γεωμετρίας (Gauss, Bolyai, Lobachevski) και οι βασικές αρχές της.

Η κρυπτογραφία είναι ένας κλάδος ο οποίος χρησιμοποιείται στις επικοινωνίες και χρησιμοποιεί ισχυρά μαθηματικά εργαλεία από την Θεωρία Αριθμών και την Θεωρία Αλγεβρικών Καμπυλών.

Ο Δημήτρης Παγουρτζής εκπόνησε διπλωματική εργασία με τίτλο «Βασικές Αρχές Κρυπτογραφίας», 2011.

Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται το μαθηματικό υπόβαθρο της θεωρίας, το κόστος υπολογισμού βασικών πράξεων, η θεωρία των κρυπτοσυστημάτων. Μελετώνται οι παράμετροι κρυπτοσυστημάτων δημόσιου κλειδιού και τα κρυπτοσυστήματα δημόσιου κλειδιού RSA και El Gamal.

Ο Γιώργος Μπούκης εκπόνησε διπλωματική εργασία με τίτλο «Η Γνωσιακή Επιστήμη των Ενσώματων Μαθηματικών», 2011.

Στο πρώτο μέρος της εργασίας γίνεται μια συνοπτική παρουσίαση του πλαισίου ιδεών της Γνωσιακής Επιστήμης των Ενσώματων Μαθηματικών. Το δεύτερο μέρος είναι αφιερωμένο στην πραγματεία του Αρχιμήδη περί Τετραγωνισμού της Παραβολής, όπου επιχειρείται να ανιχνευτούν οι ενσώματες όψεις της ευρετικής προσέγγισης του προβλήματος.

Συμπερασματικά μπορούμε να αναφέρουμε ότι υπάρχει αξιοσημείωτη ζήτηση από τους φοιτητές για εκπόνηση διπλωματικών εργασιών στα θεωρητικά μαθηματικά και μεγάλη ποικιλία στα θέματα.

Η εκτίμηση μας είναι ότι τα θέματα των διπλωματικών είναι απαιτητικά, η εκπόνηση τους απαιτεί μεγάλη ενέργεια και διάθεση από τους φοιτητές και το επίπεδο των διπλωματικών εργασιών είναι υψηλό.