Ανοικτή Εκπαίδευση: το περιοδικό για την Ανοικτή και εξ Αποστάσεως Εκπαίδευση και την Εκπαιδευτική Τεχνολογία

Τόμ. 8, Αρ. 1 (2012)

Ανοικτή Εκπαίδευση

Μια εισαγωγή στη θεωρία Ramsey

Άγγελος Ανανίας

doi: 10.12681/jode.9789

Βιβλιογραφική αναφορά:

Open Education - The Journal for Open and Distance Education and Educational Technology
Volume 8, Number 1, 2012 Section one. © Open Education ISSN: 1791-9312

Μια εισαγωγή στη θεωρία Ramsey

An Introduction to Ramsey Theory

Άγγελος Ανανίας
Msc Μαθηματικός
Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο
Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας

Περίληψη
Η παρούσα εργασία επιχειρεί μια εισαγωγή στη θεωρία Ramsey. Στόχος της είναι να εκθέσει σύντομα πώς η θεωρία των γραφημάτων συναντά τη συνδυαστική δίνοντας κομψά και χρήσιμα αποτελέσματα.

Μετά από μια όχι και τόσο σύντομη εισαγωγή, παρουσιάζεται το θεώρημα του Turan, το θεώρημα του Ramsey και οι αποδείξεις τους. Συνεχίζοντας συναντάμε εφαρμογές αλλά και ιδέες για μελλοντικές εργασίες.

Ο προσανατολισμός της συγγραφής είναι περισσότερο εκπαιδευτικός παρά ερευνητικός. Επιχειρείται να κεντριστεί το ενδιαφέρον του αναγνώστη και να δοθεί ένα θεωρητικό υπόβαθρο χρήσιμο σε όποιον επιθυμεί να φτάσει σε υψηλότερο από αυτό το επίπεδο.

Abstract
This paper attempts an introduction to Ramsey Theory. Its purpose is to explain briefly, how the Graph Theory meets Compinatorics giving elegant and useful results.

After a not so brief introduction, the theorem of Turan and Ramsey's theorem with their proofs are presented. We also give some applications and ideas for future work.

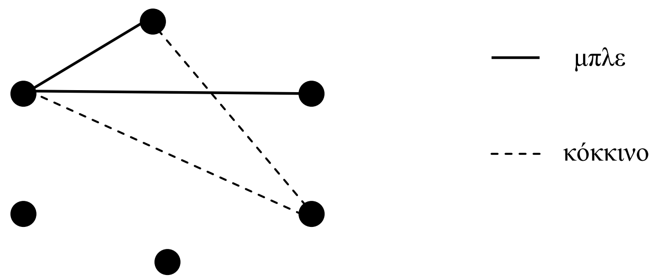
The orientation of the writing is rather educational. It focuses to stimulate the interest of the reader and give a theoretical background useful for further study.

Keywords
Graph Theory, Ramsey Theory, Combinatorics

Εισαγωγή – Το πρόβλημα του party

Το πρόβλημα που κίνησε τη δική μου περιέργεια όσον αφορά τη θεωρία γραφημάτων, διατυπώθηκε από τον καθηγητή μου στο πρώτο έτος του μεταπτυχιακού μου: «Μπορείτε να αποδείξετε ότι αν σε μία συγκέντρωση ατόμων, επιλέξουμε τυχαία έξι, τότε ανάμεσα σε αυτά θα υπάρχουν οπωσδήποτε είτε τρία άτομα που γνωρίζονται μεταξύ τους είτε τρία άτομα που κανένα δε γνωρίζει τα άλλα δύο;» Ιδιαίτερα το σχόλιό του: «… βέβαια αν γνωρίζεται θεωρία γραφημάτων αυτό δεν είναι κάτι δύσκολο να αποδειχθεί, αν όμως το καταφέρετε χωρίς να τη γνωρίζετε τότε… μπράβο σας» ήταν αρκετό να ωθήσει στην προσπάθεια οποιονδήποτε μαθηματικό.

Η λύση που είχα δώσει έμοιαζε κάπως έτσι:

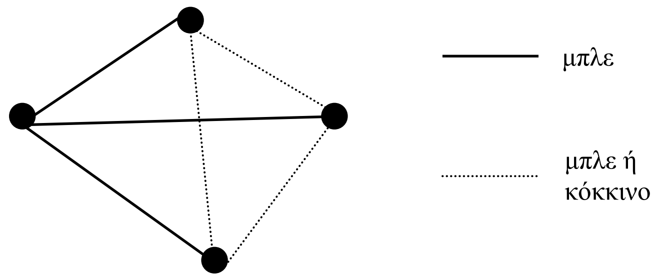


Σχήμα 1

απεικόνισα κάθε άτομο με ένα σημείο και ένωνα με μια μπλε γραμμή δύο άτομα που γνωρίζονταν μεταξύ τους και με μια κόκκινη γραμμή δύο άτομα που δε γνωρίζονταν μεταξύ τους. Έμενε να αποδείξω ότι σχηματιζόταν τουλάχιστον ένα μπλε ή ένα κόκκινο τρίγωνο.

Επιλέγοντας τυχαία ένα άτομο από τα έξι, υπάρχουν δύο περιπτώσεις:
α) γνωρίζει τουλάχιστον τρεις από τους υπόλοιπους πέντε
β) γνωρίζει το πολύ δύο από τους υπόλοιπους πέντε.

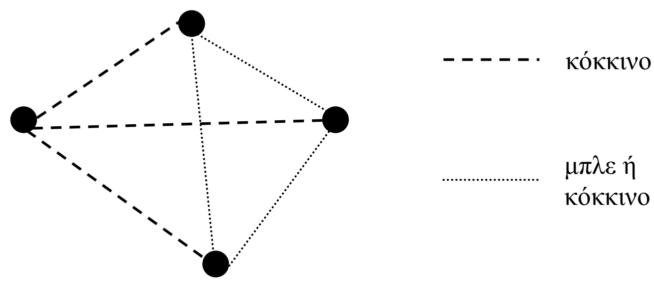
α) Αν γνωρίζει τουλάχιστον τρεις, τότε αν οποιοιδήποτε δύο από αυτούς τους τρεις γνωρίζονται μεταξύ τους, έχουμε ένα μπλε τρίγωνο: σχήμα 2.



Σχήμα 2

Αν κανείς από τους τρεις δε γνωρίζει τους άλλους δύο, έχουμε ένα κόκκινο τρίγωνο.

β) Αν γνωρίζει το πολύ δύο, τότε υπάρχουν τρεις που δε γνωρίζει. Αν οποιοιδήποτε δύο από αυτούς τους τρεις δε γνωρίζονται τότε έχουμε ένα κόκκινο τρίγωνο όπως φαίνεται στο σχήμα 3.



Σχήμα 3

Αν και οι τρεις γνωρίζονται έχουμε ένα μπλε τρίγωνο.

Στην πραγματικότητα το παραπάνω πρόβλημα δεν αποτελεί παρά μία μικρή ειδική περίπτωση σε ένα μεγάλο τμήμα της θεωρίας των γραφημάτων που είναι γνωστό ως θεωρία Ramsey. Γενικά η θεωρία Ramsey μελετά σχέσεις που αναπόφευκτα εμφανίζονται σε προβλήματα συνδυαστικής. Έτσι θα δούμε στη συνέχεια αν, όταν έχουμε ένα δεδομένο γράφημα, είναι δυνατόν να γνωρίζουμε από πριν ότι υπάρχουν p κορυφές που έχουν μια συγκεκριμένη ιδιότητα και q κορυφές που δεν την έχουν. Θα αναζητήσουμε, για την ακρίβεια, το ελάχιστο πλήθος των κορυφών του γραφήματος ώστε να είμαστε σίγουροι ότι αυτό συμβαίνει.

Βασικές έννοιες

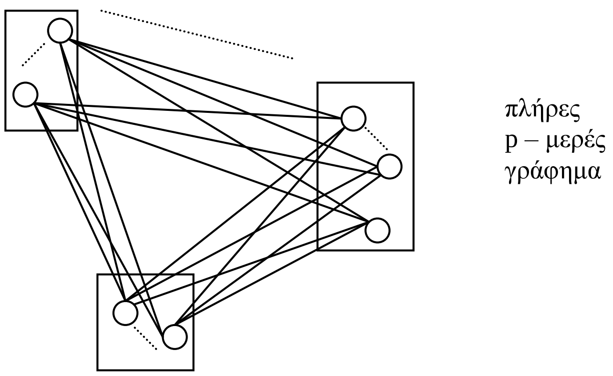
Για να αποσαφηνιστούν οι εκφράσεις και οι συμβολισμοί που χρησιμοποιούνται στη συνέχεια, διευκρινίζουμε εδώ ότι

- με K_p συμβολίζουμε το πλήρες γράφημα που έχει p κορυφές. Δηλαδή ένα γράφημα που έχει p κορυφές οι οποίες συνδέονται ανά δύο με ακριβώς μία ακμή.
- Με E_G συμβολίζουμε το σύνολο των ακμών, ενώ με ε_G το πλήθος των ακμών ενός γραφήματος G.
- Επαγόμενο υπογράφημα ενός γραφήματος G, ονομάζουμε ένα γράφημα του οποίου το σύνολο των κορυφών, είναι υποσύνολο του συνόλου των κορυφών του G και οι ακμές του είναι όλες οι ακμές του G που προσπίπτουν στις κορυφές αυτές.

Θεώρημα του TURAN

Αρχικά θα αναλογιστούμε το πρόβλημα της εύρεσης μιας συνθήκης ώστε το K_p να εμφανίζεται σε ένα γράφημα. Είναι φανερό ότι κάθε γράφημα περιέχει το K_1 και ότι οποιοδήποτε μη διακριτό γράφημα περιέχει το K_2.

Ορισμός 1: Ένα *πλήρες p – μερές γράφημα* αποτελείται από p διακριτά επαγόμενα υπογραφήματα $G_1, G_2, ..., G_p \subseteq G$ όπου $uv \in E_G$ αν και μόνο αν οι u και v ανήκουν σε διαφορετικά μέρη G_i και G_j με $i \neq j$.



Σχήμα 4

Ένα πλήρες p – μερές γράφημα είναι επαρκώς ορισμένο από τα διακριτά του μέρη G_i με $i \in \{1, 2, ..., p\}$.

Έστω $p \geq 3$ και $H = H_{n,p}$ το πλήρες (p – 1) – μερές γράφημα τάξης n = t(p – 1) + r όπου $r \in \{0, 1, 2, ..., p-2\}$ και $t \geq 0$ έτσι ώστε να υπάρχουν r μέρη $H_1, H_2, \ldots, H_r$ τάξης t + 1 (κανένα αν r = 0) και p – 1 – r μέρη $H_{r+1}, \ldots, H_{p-1}$ τάξης t. Προφανώς εδώ το r είναι το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του n με το p – 1 συνεπώς καθορίζεται από το n και το p.

Από τον ορισμό του H προκύπτει ότι $K_p \not\subseteq H$. Επίσης εύκολα μπορεί κάποιος να υπολογίσει ότι το πλήθος των ακμών του H είναι ίσο με:

$$T(n,p)=\frac{p-2}{2(p-1)}\cdot n^2-\frac{r}{2}\cdot\left(1-\frac{r}{p-1}\right) \qquad (1)$$

Το επόμενο αποτέλεσμα δείχνει ότι το παραπάνω όριο T(n , p) είναι βέλτιστο.

<u>Θεώρημα 1</u>: (Θεώρημα του TURAN)
Αν ένα γράφημα **G** τάξης **n** έχει $\boldsymbol{\varepsilon_G}$ > **T(n , p)** ακμές τότε το G περιέχει ένα πλήρες υπογράφημα $\mathbf{K_p}$ με $p\geq 3$.

<u>Απόδειξη</u>: Αρκεί να αποδείξουμε ότι αν έχουμε ένα γράφημα G, με τον μέγιστο αριθμό ακμών ώστε αυτό να μην περιέχει το K_p, τότε ισχύει

$$\varepsilon_G \leq T(n,p) \qquad (2)$$

Είναι n = (p – 1)t + r με $t\in\mathbb{N}$ και r = 0, 1, …, p – 2. (3)
Τα t και r στην (3) ορίζονται με μοναδικό τρόπο από τα n και p ως πηλίκο και υπόλοιπο αντίστοιχα της *ευκλείδειας διαίρεσης* του n με το p – 1. Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε *επαγωγή* στο t.

Αν t = 0, είναι $n = r\neq 0$ και $n\leq p-2$. Το γράφημα G δεν περιέχει το K_p και έχει πλήθος ακμών

$$\varepsilon_G \leq \binom{n}{2}=\frac{n\cdot(n-1)}{2} \qquad (4)$$

Τότε όμως: $$T(n,p)=\frac{p-2}{2(p-1)}\cdot n^2-\frac{n}{2}\cdot\left(1-\frac{n}{p-1}\right)=\frac{n\cdot(n-1)}{2} \qquad (5)$$

Από (4) , (5) είναι $\varepsilon_G \leq T(n,p)$.

Υποθέτοντας ότι η (2) ισχύει για το t – 1, *θα δείξουμε ότι ισχύει και για το* $t\in\mathbb{N}^*$ ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη. Όπως έχουμε αναφέρει, το γράφημα G έχει τον μέγιστο αριθμό ακμών ώστε να μην περιέχει το K_p. Αυτό συνεπάγεται ότι το G περιέχει ένα πλήρες υπογράφημα K_{p-1}, που το ονομάζουμε A, γιατί αν δεν περιείχε θα μπορούσαμε να προσθέσουμε ακμές μέχρι να προκύψει ένα.

Συνεχίζουμε εκτιμώντας το πλήθος των ακμών του G. <u>Οι ακμές του υπογραφήματος A</u>, είναι

$$\varepsilon_A=\binom{p-1}{2}=\frac{(p-1)\cdot(p-2)}{2} \qquad (6)$$

Κάθε κορυφή **v** που δεν ανήκει στο A, πρόσκειται το πολύ σε p – 2 κορυφές του A αφού διαφορετικά $A\cup\{v\}=K_p$. Έτσι <u>οι ακμές που συνδέουν τις κορυφές του A και τις *n – p + 1* κορυφές που δεν ανήκουν στο A</u>, είναι

$$\varepsilon'\leq(n-p+1)\cdot(p-2) \qquad (7)$$

Αυτές οι *n – p + 1* κορυφές του G που δεν ανήκουν στο A, αποτελούν ένα επαγόμενο υπογράφημα του G. Είναι n – p + 1 = (t – 1)(p – 1) + r οπότε γι' αυτές μπορούμε να εφαρμόσουμε την υπόθεση της επαγωγής. Έτσι το πλήθος των ακμών στο υπογράφημα B, είναι:

$$\varepsilon_B \le T(n-p+1, p) \qquad (8)$$

Από τις (6), (7), (8), προκύπτει ότι:

$$\varepsilon_G = \varepsilon_A + \varepsilon' + \varepsilon_B \le \frac{(p-1)\cdot(p-2)}{2} + (n-p+1)\cdot(p-2) + T(n-p+1, p) = T(n, p).$$

Όπως έπρεπε να δείξουμε.

Συνέπεια του θεωρήματος του Turan είναι και το παρακάτω.

Πόρισμα 1: Αν ένα γράφημα G έχει πλήθος ακμών $\varepsilon_G > \frac{1}{4}v_G^2$ τότε περιέχει τουλάχιστον ένα τρίγωνο K_3.

Θεωρία Ramsey

Τι γίνεται αν η συνθήκη που θέλουμε να ελέγξουμε είναι λίγο πιο πολύπλοκη; Πως μπορούμε να είμαστε σίγουροι αν οι κορυφές ενός γραφήματος έχουν ή δεν έχουν μια συγκεκριμένη ιδιότητα; Το θεώρημα του Ramsey, σε μία απλή του έκφραση θα μπορούσε να διατυπωθεί ως εξής:

Θεώρημα 2: Για κάθε $p \in \mathbb{N}$, υπάρχει ένας ελάχιστος $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε κάθε γράφημα τάξης n να περιέχει είτε το πλήρες K_p είτε το συμπληρωματικό του $\overline{K_p}$ ως επαγόμενο υπογράφημα.

Μια γενικότερη έκφραση του θεωρήματος, θα δούμε παρακάτω. Πρώτα όμως:

Ορισμός 2: Έστω *α* ένας χρωματισμός ακμών ενός γραφήματος G. Ένα υπογράφημα $H \subseteq G$ καλείται **i – μονοχρωματικό**, αν όλες οι ακμές του έχουν το ίδιο χρώμα **i**.

Φτάνουμε λοιπόν σε αυτό που θεωρείται ως ένα από τα κοσμήματα της συνδυαστικής.

Θεώρημα 3 (Ramsey 1930): Αν $p, q \ge 2$ οποιοιδήποτε ακέραιοι, τότε υπάρχει ***ένας ελάχιστος ακέραιος R(p , q)*** τέτοιος ώστε για κάθε $n \ge R(p,q)$ οποιοσδήποτε 2 – χρωματισμός ακμών του $K_n \to \{1, 2\}$ περιέχει τουλάχιστον ένα *1 – μονοχρωματικό* K_p ή ένα *2 – μονοχρωματικό* K_q.

Ή ισοδύναμα:

Θεώρημα 4: Αν $p, q \ge 2$ οποιοιδήποτε ακέραιοι, τότε υπάρχει ένας ***ελάχιστος ακέραιος R(p , q)*** τέτοιος ώστε για κάθε $n \ge R(p,q)$ οποιοδήποτε γράφημα τάξης n περιέχει ένα *πλήρες υπογράφημα τάξης p* ή ένα *διακριτό υπογράφημα τάξης q*.

Ο αριθμός **R(p , q)** είναι γνωστός ως **αριθμός Ramsey** για τους p και q. Προφανώς ισχύει R(p , 2) = p και R(2 , q) = q. Τα προηγούμενα θεωρήματα προκύπτουν από το επόμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 5 (Erdös και Szekeres 1935): Ο αριθμός Ramsey υπάρχει για κάθε $p, q \geq 2$ και μάλιστα

$$R(p,q) \leq R(p,q-1) + R(p-1,q)$$

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο p + q.

- Γνωρίζουμε ότι ο $R(p,q)$ υπάρχει για p = 2 ή q = 2, συνεπώς υπάρχει για
$$p+q \leq 5.$$
- Δεχόμαστε ότι υπάρχει αριθμός Ramsey για άθροισμα p + q – 1.
- Θα δείξουμε ότι υπάρχει ο αριθμός Ramsey για άθροισμα p + q. Αρκεί να δείξουμε ότι, αν έχουμε ένα γράφημα G τάξης R(p , q – 1) + R(p – 1 ,q) τότε περιέχει είτε ένα πλήρες υπογράφημα τάξης p, είτε ένα διακριτό υπογράφημα τάξης q.

  Έστω $v \in G$ και $A = V_G \setminus (N_G(v) \cup \{v\})$ το σύνολο των κορυφών που δεν είναι γειτονικές στη v. Επειδή $|N_G(v)| + |A| + 1 = R(p,q-1) + R(p-1,q)$ είναι:
$$|N_G(v)| \geq R(p-1,q) \text{ ή } |A| \geq R(p,q-1).$$
  Έτσι:
  - Αν $|N_G(v)| \geq R(p-1,q)$, από τον ορισμό του αριθμού Ramsey, το $N_G(v)$ περιέχει ένα πλήρες υπογράφημα B τάξης p – 1 ή ένα διακριτό υπογράφημα τάξης q. Στην πρώτη περίπτωση το $B \cup \{v\}$ είναι ένα πλήρες K_p στο G, ενώ στη δεύτερη περίπτωση το διακριτό γράφημα τάξης q είναι ένα υπογράφημα του G.
  - Αν $|A| \geq R(p,q-1)$ τότε το A περιέχει ένα πλήρες υπογράφημα τάξης p ή ένα διακριτό υπογράφημα S τάξης q – 1. Στην πρώτη περίπτωση το πλήρες υπογράφημα βρίσκεται στο G και στη δεύτερη περίπτωση το $S \cup \{v\}$ είναι ένα διακριτό υπογράφημα του G τάξης q.

  Όπως έπρεπε να δείξουμε.

Γενικά ο προσδιορισμός του αριθμού Ramsey για δύο ακέραιους δε φαίνεται να είναι εύκολη υπόθεση. Το προηγούμενο θεώρημα αν και αποδεικνύει την ύπαρξή του δε δίνει μεγάλη βοήθεια στον προσδιορισμό του. Ένα περισσότερο ***συγκεκριμένο άνω φράγμα*** μας δίνει η επόμενη πρόταση.

Θεώρημα 6 (Erdös και Szekeres 1935): Για κάθε $p, q \geq 2$ έχουμε

$$R(p,q) \leq \binom{p+q-2}{p-1}$$

Απόδειξη: Για p = 2 ή q = 2 ο ισχυρισμός είναι προφανής. Χρησιμοποιούμε επαγωγή στο p + q για τη γενίκευση της πρότασης.

Έστω ότι $p, q \geq 3$. Από το θεώρημα 5.5 και την υπόθεση της επαγωγής, έχουμε:

$$R(p,q) \leq R(p,q-1) + R(p-1,q) \leq \binom{p+q-3}{p-1} + \binom{p+q-3}{p-2} = \binom{p+q-2}{p-1}$$

που είναι το ζητούμενο.

Στον πίνακα που ακολουθεί φαίνονται μερικές ***γνωστές τιμές και εκτιμήσεις*** των αριθμών Ramsey R(p , q):

Αριθμοί Ramsey

p \ q	3	4	5	6	7	8	9	10
3	**6**	**9**	**14**	**18**	**23**	**28**	**36**	**40-43**
4	**9**	**18**	**25**	**35-41**	**49-61**	**55-84**	**69-115**	**80-149**
5	**14**	**25**	**43-49**	**58-87**	**80-143**	**95-216**	**121-316**	**141-442**

Σχήμα 5

Όπως φαίνεται στον πίνακα του σχήματος 5, δεν έχουμε πολλές γνώσεις πάνω στους αριθμούς Ramsey. Ο πρώτος άγνωστος R(p , p) (με p = q) είναι για p = 5. Έχει διαπιστωθεί ότι:

$$43 \leq R(5,5) \leq 49$$

αλλά ο καθορισμός της ακριβούς τιμής του, παραμένει ανοικτό πρόβλημα.

Γενικεύσεις
Το θεώρημα του Ramsey μπορεί να γενικευθεί ως εξής:
Θεώρημα 7: Έστω $q_i \geq 2$ ακέραιοι με $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ και $k \geq 2$. Υπάρχει ακέραιος

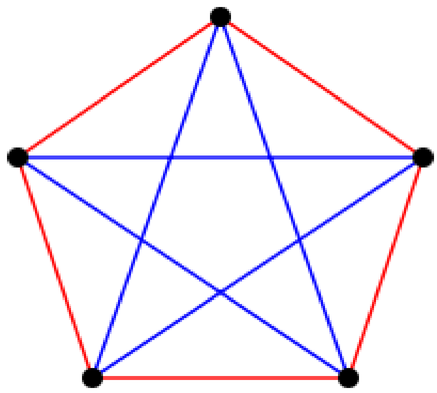
$$R = R(q_1, q_2, \ldots, q_k)$$

τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq R$ **οποιοσδήποτε k – χρωματισμός ακμών** του K_n **έχει τουλάχιστον ένα i – μονοχρωματικό** K_{q_i} για κάποιο i.
Από το θεώρημα 7 προκύπτει το παρακάτω.

Πόρισμα 2:
Έστω $k \geq 2$ και H_1, H_2, …, H_k τυχαία γραφήματα. **Υπάρχει ένας ακέραιος R(H_1, H_2, …, H_k)** τέτοιος ώστε για κάθε γράφημα K_n με $n \geq R(H_1, H_2, \ldots, H_k)$ και για οποιονδήποτε k – χρωματισμό ακμών ***α*** του K_n, **το** K_n^{α} **να περιέχει τουλάχιστον ένα i – μονοχρωματικό υπογράφημα H_i** για κάποιο i.

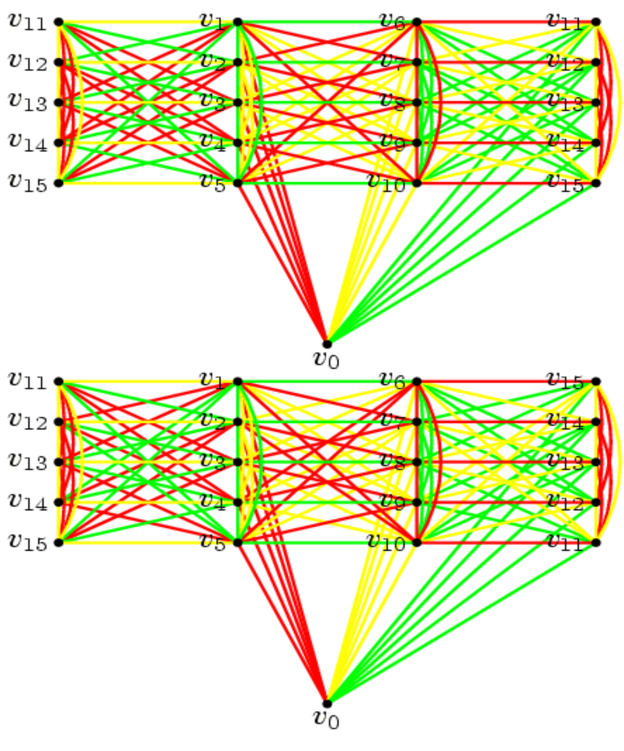
Με άλλα λόγια **ο προηγούμενος ακέραιος από τον αριθμό Ramsey** των ακεραίων $q_1, q_2, \ldots, q_k$ **είναι ο μέγιστος αριθμός κορυφών** που μπορούμε να έχουμε σε ένα πλήρες γράφημα, ώστε να υπάρχει ένας k – χρωματισμός ακμών του, **χωρίς i – μονοχρωματικό** K_{q_i} για κάποιο i.

Παράδειγμα 1
Όπως υποψιαζόμαστε από την εισαγωγή του κεφαλαίου με το «πρόβλημα του party», είναι R(3 , 3) = 6. Η απόδειξη ολοκληρώνεται από το σχήμα 6 όπου φαίνεται πως αν έχουμε πέντε κορυφές σε ένα πλήρες γράφημα, μπορούμε να χρωματίσουμε τις ακμές του χρησιμοποιώντας δύο χρώματα χωρίς να σχηματιστεί μονοχρωματικό τρίγωνο.



Σχήμα 6

Ο υπολογισμός των αριθμών Ramsey για περισσότερους από δύο ακέραιους είναι ακόμα δυσκολότερος. Από τους γνωστούς γενικευμένους αριθμούς Ramsey είναι ο $R(3,3,3)=17$. Στο σχήμα 7 γίνεται προσπάθεια να δειχθεί ότι αν έχουμε δεκαέξι κορυφές σε πλήρες γράφημα και έναν 3 – χρωματισμό του γραφήματος είναι δυνατόν να μην υπάρχει μονοχρωματικό τρίγωνο.



Σχήμα 7

Αυτοί είναι οι δύο γνωστοί 3 – χρωματισμοί των δεκαέξι κορυφών v_0, v_1, …,v_{15}. Για καλύτερη τελική εικόνα στο σχήμα 7 οι κορυφές v_{11}, …, v_{15} έχουν τοποθετηθεί δεξιά αλλά και αριστερά των υπόλοιπων.

Συνεχίζοντας την γενίκευση θα μπορούσαμε να δούμε αποτελέσματα της θεωρίας Ramsey στην θεωρία τυχαίων γραφημάτων, κάτι που θα το αποφύγουμε στην παρούσα εργασία.

Εφαρμογές

Το θεώρημα Ramsey και άλλα θεωρήματα του ίδιου τύπου (όπως το θεώρημα των Erdös και Szekeres), έχουν μεγάλο πλήθος εφαρμογών σε πολλούς κλάδους των Μαθηματικών όπως η Θεωρία Αριθμών, η Θεωρία Συνόλων και η Γεωμετρία. Ακόμα εφαρμογές τους συναντάμε στη Λογική, στη Θεωρητική Πληροφορική αλλά και στην Επιστήμη των Υπολογιστών. Επιλέγουμε εδώ δύο από τις πιο απλές, για να τις παρουσιάσουμε.

<u>Εφαρμογή 1 – Γεωμετρία</u>

Σαν συνέπεια του θεωρήματος *Erdös και Szekeres* προκύπτει ότι *αν έχουμε σημεία στο επίπεδο*, σε τυχαία θέση (όχι συνευθειακά ανά τρία), τότε *ο ελάχιστος αριθμός σημείων* που απαιτείται ώστε να είμαστε σίγουροι πως ανάμεσα σε αυτά υπάρχουν τουλάχιστον **n** *που ορίζουν ένα κυρτό n – γωνο*, μπορεί να εκτιμηθεί και συμβολίζεται **g(n)**. Αρχικά εικαζόταν ότι $g(n) = 2^{n-2} + 1$ κάτι που είναι αλήθεια για $n < 6$. Αποδείχθηκε όμως πως:

$$2^{n-2}+1 \le g(n) \le \binom{2n-4}{n-2}+1.$$

Το άνω φράγμα του g(n) δέχθηκε από τότε αρκετές βελτιώσεις (βλέπε: [5, 15, 24]). Το βέλτιστο άνω φράγμα που εμφανίζεται, είναι πλέον: $\binom{2n-5}{n-2}+2$.

<u>Εφαρμογή 2 – Λογική, Πληροφορική</u>

Στην Πληροφορική βρίσκουμε εφαρμογή του θεωρήματος Ramsey στην «Αυτοματοποιημένη Απόδειξη Θεωρήματος». Η ιδέα της αυτοματοποίησης της διαδικασίας απόδειξης ξεκινά ή τουλάχιστον διατυπώνεται με σαφήνεια από τον **Hilbert**. Είναι γνωστή η πεποίθησή του πως κάθε πρόταση στα Μαθηματικά μπορεί να αποδειχθεί και ο επιπλέον στόχος του να γίνει η απόδειξη μια διαδικασία τόσο τυποποιημένη, που θα μπορούσε να εκτελείται ακόμα και από μία μηχανή.

Η απόδειξη όλων των αληθών προτάσεων στα Μαθηματικά είναι κάτι που αποδείχθηκε ανέφικτο από τον **Gödel** με το *Θεώρημα της Μη Πληρότητας*. Σαν να μην έφτανε αυτό, ο **Turing** απέδειξε πως δεν υπάρχει γενικός αλγόριθμος που να αποφασίζει αν μία πρόταση αποδεικνύεται ή όχι. Το θεώρημα του Ramsey λοιπόν, ήταν στην πραγματικότητα ένα λήμμα [22] προς ένα θεώρημα που αποδείκνυε πως σε μία συγκεκριμένη κλάση *λογικής πρώτης τάξης*, όλες οι προτάσεις είναι αποκρίσιμες (μπορούμε δηλαδή να αποδείξουμε αν είναι αληθείς ή όχι).

Είναι ενδιαφέρον ότι χρησιμοποιώντας μια επέκταση στο θεώρημα του Ramsey [21], δόθηκε η πρώτη αναπόδεικτη πρόταση στην *πεπερασμένη Θεωρία Συνόλων* ή ισοδύναμα, στην *Αριθμητική του **Peano***. Αποδείξεις για αυτή την πρόταση μπορούμε να δούμε και στα [11, 14, 18, 19, 20].

Η «*Αυτοματοποιημένη Απόδειξης Θεωρήματος*» είναι ένα αναπτυσσόμενο πεδίο στην Πληροφορική και με τη βοήθειά της έχει επιτευχθεί μια βελτίωση της απόδειξης του *Θεωρήματος των τεσσάρων χρωμάτων* το 2005 (web: wikipedia – the free encyclopedia). Επίσης έχει μεγάλη επιτυχία στη συμβολική ολοκλήρωση *ορισμένου ολοκληρώματος* [1].

Γενικά οι εφαρμογές και τα παραδείγματα που μπορούν να αναφερθούν έχουν τόσο μεγάλο εύρος που όλα όσα γράφονται σε αυτή την εργασία μπορούν να θεωρηθούν μόνο ως διαφημιστικά μηνύματα για τη Θεωρία των Γραφημάτων και τη Θεωρία Ramsey.

Διεθνής βιβλιογραφία

1. Adams, A. A., Gottliebsen, H., Linton, S.A., And Martin, U., "A verifiable symbolic definite integral table look-up". In *Automated Deduction* – CADE – 16. Proceedings. Berlin: Springler. H. (Gandinger ed.), Lecture Notes Comput. Sci. vol. 1632, pp 112 – 126, 1999.
2. Appel Keneth; Haken Wolfgang; Koch John, "Every Planar Graph is Four Colorable", Illinois Journal of Mathematics 21, 439 – 567, 1997.
3. Bondy, J. A. and U. S. R. Morty, "Graph Theory with Applications", American Elsevier Publishing Company, New York, 1976.
4. Boolos, G.; Burgess, J. P.; Jeffrey, R., "Computability and Logic (5th ed.)", Cambridge: Cambridge University Press, ISBN 9780521877527, 2007.
5. Chunk, F. R. K., and Graham, R. L., "Forced convex n – gons in the plane", Discrete Comput. Geom. 19, 3, Special Issue 367 – 371, 1998.
6. Diestel, R., "Graph Theory", Electronic Edition, Springer – Verlag Heidelberg, New York, 2005.
7. Dijkstra, E. W., "A Note on Two Problems in Connexion with Graphs", *Numerische Mathematic*, 1, 269 – 271, 1959.
8. Erdös & Szekeres, "A Combinatorial Problem in Geometry", *Compotio Math.* 2, 463 – 470, 1935.
9. Euler Archive (The), commentary on publication and original text in Latin.
10. Fields, G. E., "Introduction to Graph Theory", Southern Connecticut State University, 2001.
11. Graham, R. L., Rothschild, B. L., and Spencer, J. H., "Ramsey Theory" second edition, Wiley – *Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization.* John Wiley & Sons Inc. New York, 1990.
12. Harary, F., "Graph Theory", Addison – Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1969.
13. Harju, Tero, "Lecture Notes on Graph Theory", University of Turku – Finland, 2007.
14. Ketonen J. and Solovay R., "Rapidly growing Ramsey functions", *Ann. of Math. (2)*, 113, 267 – 314, 1981.
15. Kleitman, D., and Pachter, L., "Finding convex sets among points in the plane". *Discrete Comput. Geom.* 19, 3, Special Issue, 405 – 410, 1998.
16. Kuratowski, Kazimierz, « Sur le problème des courbes gauches en topologie », Fund. Math. 15, 271 – 283, 1930.
17. Landman, B. M. & Robertson, A., "Ramsey Theory on the Integers", Student Mathematical Library, 24, Providence, RI: AMS ISBN 0821831992.
18. Loebl, M., "Unprovable combinatorial statements", *Discrete Math. 108*, 1 – 3, 333 – 342, 1992.
19. Loebl, M., and Nesetril, J., "An unprovable – type Ramsey theorem", *Proc. Amer. Soc. 116*, 3, 819 – 824, 1992.
20. Nesetril, J., "Ramsey theory", *Handbook of Compinatorics*, Vol. 1, 2, (Graham R. L. et al., eds) pp. 1331 – 1403, Elsevier, Amsterdam, 1995.
21. Paris, J., and Harrington, L., "A mathematical incompleteness in Peano Arithmetic", North – Holland Publishing Co, Amsterdam, 1977.
22. Ramsey, F. P., "On a problem of formal logic", *Proc. London Math. Soc*., 264 – 286, 1930.
23. Rosta Vera, "Ramsey Theory Applications" Dept. of Mathematics and Statistics, McGill University, Montreal, 2004.
24. Toth, G., and Valtr, P. "Note on the Erdös and Szekeres theorem", *Discrete Comput. Geom. 19*, 3, Special Issue, 457 – 459, 1998.
25. Wilson, Robin, "Four Color Suffice" Penguin Books, London, 2002.

Βιβλιογραφία στα ελληνικά

1. Liu, C.L., «Στοιχεία Διακριτών Μαθηματικών», Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2004.
2. Μαυρονικόλας, Μ., «Θεωρία Γράφων», Ε. Α. Π., Πάτρα 2002.

Σημείωση

Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών «Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά» της Σχολής Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου και αποτελεί μέρος της διπλωματικής εργασίας του συγγραφέως, η οποία εκπονήθηκε υπό την επίβλεψη του Δρ. Ανούση Μιχάλη, Καθηγητή Πανεπιστημίου Αιγαίου, Τμήμα Μαθηματικών (mano@aegean.gr).