Ανοικτή Εκπαίδευση: το περιοδικό για την Ανοικτή και εξ Αποστάσεως Εκπαίδευση και την Εκπαιδευτική Τεχνολογία

Τόμ. 8, Αρ. 1 (2012)

Ανοικτή Εκπαίδευση

Έρπουσα ροή σε αξονοσυμμετρικά συστήματα συντεταγμένων

Ελευθέριος Πρωτοπαπάς

doi: [10.12681/jode.9791](https://doi.org/10.12681/jode.9791)

Έρπουσα ροή σε αξονοσυμμετρικά συστήματα συντεταγμένων

Creeping flow in axisymmetric coordinate systems

Ελευθέριος Πρωτοπαπάς
Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο,
Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας.
lprotopapas@eap.gr

Περίληψη

Η παρούσα εργασία αναφέρεται στην επίλυση της έρπουσας ροής (ροή Stokes) σε αξονοσυμμετρικά συστήματα συντεταγμένων με έμφαση στο σφαιρικό και τα σφαιροειδή συστήματα συντεταγμένων. Αποδεικνύουμε την βασική εξίσωσή της ροής Stokes ($E^4\psi = 0$) και τη γενική λύση στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων (όπου ο τελεστής E^4 χωρίζει μεταβλητές) με τη μορφή σειρών. Στο επίμηκες σφαιροειδές σύστημα ο τελεστής E^4 δεν χωρίζει μεταβλητές, ενώ ο E^2 χωρίζει μεταβλητές. Για την επίλυση της έρπουσας ροής στο επίμηκες σφαιροειδές σύστημα εισάγεται η μέθοδος της ημιδιαχωρισιμότητας του τελεστή E^4, με την οποία παράγεται η γενική λύση στα σφαιροειδή συστήματα συντεταγμένων. Αυτό πραγματοποιείται με τη χρήση της γενικευμένης θεωρίας των ιδιοσυναρτήσεων, εκφράζοντας την λύση σαν άθροισμα δύο συναρτήσεων. Η μία εκφράζεται ως ανάπτυγμα σε ιδιοσυναρτήσεις του $\mathrm{Ker}E^2$ και η δεύτερη ως ανάπτυγμα γενικευμένων ιδιοσυναρτήσεων του $\mathrm{Ker}E^2$. Οι γενικευμένες ιδιοσυναρτήσεις εκφράζονται ως άθροισμα συγκεκριμένων γινομένων συναρτήσεων Gegenbauer διαφορετικής τάξης. Στη συνέχεια επαληθεύεται η μέθοδος του ημιδιαχωρισμού των μεταβλητών, αποδεικνύοντας ότι στα σφαιροειδή συστήματα η λύση ανάγεται στην γνωστή λύση του σφαιρικού συστήματος, όταν η ημιεστιακή απόσταση του σφαιροειδούς τείνει στο μηδέν. Τέλος, παρατίθενται τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την μελέτη και συγκρίνονται οι λύσεις ανάμεσα στο σφαιρικό και στα σφαιροειδή συστήματα συντεταγμένων.

Λέξεις κλειδιά

Έρπουσα ροή, ημιδιαχωρισμός, αξονοσυμμετρική ροή

Abstract

In the present work we present methods used for solving Stokes flow (creeping flow) in axisymmetric coordinate systems, mainly in the spherical and the spheroidal ones. We derive the governing equation for Stokes flow ($E^4\psi = 0$) and we obtain the general solution as a series expansion. We consider E^4 to be $E^2 o E^2$. In spherical coordinates both the operators E^2 and E^4 separate variables, while in spheroidal coordinates although the operator E^2 separates variables, the operator E^4 does not. Introducing the concept of semiseparation, we obtain the general solution of the equation $E^4\psi = 0$ by using the theory of the generalized eigenfunctions, and expressing the solution as the sum of two functions. The first one is expressed as a series of eigenfunctions of $\mathrm{Ker}E^2$ and the second one as a series of generalized

eigenfunctions of $KerE^2$. The generalized eigenfunctions are given through finite sums of specific products of Gegenbauer functions. Next we verify the semiseparation results, by showing that the solution in spheroidal coordinate system becomes the equivalent solution in spherical coordinate system as the semifocal length tends to zero. Finally, some concluding remarks of this work are presented and comparisons of the solution in the spherical and in the spheroidal coordinate systems are made.

Keywords
Creeping flow, semiseparation, axisymmetric flow

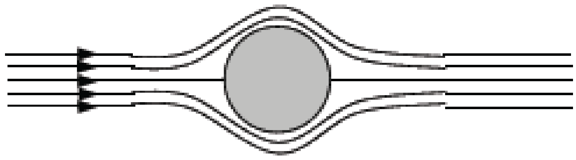
Εισαγωγή

Ο τρόπος με τον οποίο κινείται ένα ρευστό ως προς ένα ή περισσότερα σωματίδια έχει ιδιαίτερη σημασία σε διάφορους τομείς της επιστήμης και της τεχνολογίας. Η ροή ενός ρευστού κατηγοριοποιείται ανάλογα με το ιξώδες, την πυκνότητα, την ταχύτητα. Στην εργασία αυτή θεωρούμε έρπουσα αξονοσυμμετρική ροή (Stokes, 1945, Stokes 1851, Happel, Brenner, 1991) στην οποία οι δυνάμεις αδρανείας είναι πολύ μικρότερες από τις ιξώδεις. Η παραδοχή αυτή γίνεται γιατί σε πολλά σωματιδιακά συστήματα οι κινήσεις είναι αρκετά αργές. Για να χαρακτηρίσουμε μια ροή ως έρπουσα χρησιμοποιούμε τον αριθμό Reynolds, ο οποίος είναι αδιάστατος και εξαρτάται από τη γεωμετρία του προβλήματος και ισούται με το λόγο των αδρανειακών δυνάμεων προς τις ιξώδεις.

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση Navier – Stokes και με τις παραδοχές της έρπουσας ροής βρίσκουμε την εξίσωση για τον υπολογισμό της συνάρτησης ροής στην έρπουσα ροή. Η εξίσωση αυτή είναι μια ΜΔΕ τέταρτης τάξης ελλειπτικού τύπου. Στην συνέχεια δίνουμε τη γενική λύση στο σφαιρικό (Happel, Brenner, 1991) και τα σφαιροειδή συστήματα συντεταγμένων (Dassios, Hadjinicolaou, Payatakes, 1994). Η γενική λύση στα σφαιροειδή συστήματα συντεταγμένων προκύπτει με τη μέθοδο της ημιδιαχωρισιμότητας (Dassios, Hadjinicolaou, Payatakes, 1994). Η ορθότητα του αποτελέσματος στα σφαιροειδή συστήματα συντεταγμένων ελέγχεται χρησιμοποιώντας την ιδιότητα του σφαιροειδούς να γίνεται σφαίρα όταν η ημιεστιακή απόσταση τείνει στο μηδέν. Τέλος παραθέτουμε συγκριτικά συμπεράσματα για τη γενική λύση στο σφαιρικό και τα σφαιροειδή συστήματα συντεταγμένων.

Εξίσωση έρπουσας ροής

Ροή Stokes ή έρπουσα ροή (Stokes, 1851, Stokes 1945, Happel, Brenner, 1991) λέγεται ο τύπος της ροής που οι δυνάμεις αδράνειας είναι πολύ μικρότερες συγκρινόμενες με τις ιξώδεις, το οποίο έχει ως αποτέλεσμα ο αριθμός Reynolds, που χαρακτηρίζει το είδος της ροής, να είναι πολύ μικρότερος της μονάδας ($N_{Re} << 1$).



Ροή Stokes γύρω από σφαίρα ($N_{Re} << 1$)

Γνωρίζουμε ότι (Happel, Brenner, 1991) η εξίσωση Navier – Stokes που περιγράφει τη ροή ασυμπίεστου ρευστού, με σταθερό ιξώδες, εκφράζεται από τη σχέση

$$\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt}=\mathbf{F}\rho-\nabla p+\mu\nabla^2\mathbf{v} \tag{1}$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού, $\frac{D}{Dt}$ είναι η υλική παράγωγος και ισούται με $\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla$, $\mathbf{v}$ είναι η ταχύτητα του ρευστού, $\mathbf{F}$ είναι η συνισταμένη των ιξωδών δυνάμεων, p η υδροστατική πίεση και μ είναι το ιξώδες.

Η εξίσωση αυτή προκύπτει από την αρχή διατήρησης της ορμής και εκφράζει τη θεώρηση ότι ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι ανάλογος της συνισταμένης των δυνάμεων που ασκούνται στο ρευστό.

Αν $\mathbf{F}=-\nabla g$, όπου $g=|\mathbf{g}|$ το μέτρο του διανύσματος της επιτάχυνσης της βαρύτητας και $P=p+g\cdot\rho$ είναι η ολική πίεση, η σχέση (1) γίνεται

$$\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt}=-\nabla P+\mu\nabla^2\mathbf{v} \tag{2}$$

Αν θεωρήσουμε τη ροή σταθερή (ανεξάρτητη του χρόνου) ισχύει $\frac{D\mathbf{v}}{Dt}=\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}$ και από την (2) προκύπτει

$$\rho\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}=-\nabla P+\mu\nabla^2\mathbf{v} \tag{3}$$

Στη ροή Stokes οι όροι αδρανείας $\rho\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}$ είναι πολύ μικρότεροι συγκρινόμενοι με τους ιξώδεις όρους $\mu\nabla^2\mathbf{v}$, οπότε μπορούν να παραλειφθούν και η εξίσωση (3) παίρνει τη μορφή

$$\nabla^2\mathbf{v}=\frac{1}{\mu}\nabla P \tag{4}$$

Αν θεωρήσουμε το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (ϖ,z,ϕ), βρίσκουμε ότι η ταχύτητα δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{v}=-\nabla\times(\psi\nabla\phi) \tag{5}$$

ενώ υπολογίζοντας το $\zeta=\nabla\times\mathbf{v}$ βρίσκουμε ότι

$$\zeta=\frac{E^2\psi}{\varpi}\mathbf{i}_\varphi \tag{6}$$

όπου $\mathbf{i}_\varphi$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στη ϕ διεύθυνση και E^2 είναι ο τελεστής Stokes με

$$E^2=\varpi\frac{\partial}{\partial\varpi}\left(\frac{1}{\varpi}\frac{\partial}{\partial\varpi}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{7}$$

Επιπλέον αφού χρησιμοποιούμε αξονοσυμμετρικό σύστημα συντεταγμένων, ισχύει

$$\nabla\times(\nabla\times\zeta)=-\frac{E^4\psi}{\varpi}\mathbf{i}_\varphi \tag{8}$$

όπου E^4 είναι η σύνθεση του τελεστή Stokes με τον εαυτό του, ενώ

$$\mathbf{v}\times\zeta=\frac{E^2\psi}{\varpi^2}\nabla\psi \tag{9}$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω βρίσκουμε ότι

$$-\frac{\partial\left(E^2\psi\right)}{\partial t}-\varpi\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\varpi}-\frac{\partial\psi}{\partial\varpi}\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{E^2\psi}{\varpi^2}+\nu E^4\psi=0 \qquad (10)$$

όπου ν είναι το κινηματικό ιξώδες.

Στην (10) παραλείπουμε τους όρους αδρανείας (είναι πολύ μικρότεροι από τους ιξώδεις στην έρπουσα ροή) και αφού θέλουμε γραμμική ροή, έχουμε ότι η εξίσωση για τη συνάρτηση ροής στη γραμμική έρπουσα ροή δίνεται από την σχέση

$$E^4\psi=0 \qquad (11)$$

η οποία είναι μια ΜΔΕ 4ης τάξης ελλειπτικού τύπου.

Γενική λύση στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων

Στο σφαιρικό σύστημα (Moon, Spencer, 1961) συντεταγμένων (r,θ,ϕ) ο τελεστής Stokes (Happel, Brenner, 1991) παίρνει τη μορφή

$$E^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \qquad (12)$$

με $r\in[0,+\infty)$, $\theta\in[0,\pi]$, $\phi\in[0,2\pi)$ ή ισοδύναμα

$$E^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1-\zeta^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} \qquad (13)$$

αν $\zeta=\cos\theta$.

Θεωρούμε λύσεις της (11) με μορφή:

$$\psi=\psi^{(1)}+\psi^{(2)} \qquad (14)$$

όπου

$$E^2\psi^{(1)}=0 \qquad (15)$$

και

$$E^2\psi^{(2)}=W \qquad (16)$$

με

$$E^2W=0 \qquad (17)$$

Έστω

$$\psi^{(1)}=R(r)Z(\zeta) \qquad (18)$$

οπότε η (15) χρησιμοποιώντας την (13) γίνεται:

$$\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2}=-\frac{1-\zeta^2}{Z}\frac{d^2Z}{d\zeta^2} \qquad (19)$$

άρα

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}-\lambda R=0 \qquad (20)$$

και

$$(1-\zeta^2)\frac{d^2Z}{d\zeta^2}+\lambda Z=0 \qquad (21)$$

Η εξίσωση (20) είναι διαφορική εξίσωση Euler, οπότε δέχεται λύση της μορφής $R(r)=r^n$, $n\in\mathbb{N}^*$. Τότε προκύπτει ότι:

$$\lambda=n(n-1) \qquad (22)$$

και η λύση της (20) είναι:

$$R(r)=a_nr^n+b_nr^{-n+1} \qquad (23)$$

όπου οι a_n, b_n είναι σταθερές.

Επιπλέον η (21) λόγω της (22) γράφεται:

$$(1-\zeta^2)\frac{d^2Z}{d\zeta^2}+n(n-1)Z=0 \tag{24}$$

η οποία είναι η διαφορική εξίσωση του Gegenbauer (Lebedev, 1972) για m = –1 με βαθμό –½ και λύσεις τις συναρτήσεις Gegenbauer πρώτου και δεύτερου είδους, $G_n(x)$ και $H_n(x)$ αντίστοιχα. Επομένως η λύση της (24) είναι:

$$Z(\zeta)=v_nG_n(\zeta)+\delta_nH_n(\zeta) \tag{25}$$

όπου οι v_n,δ_n είναι σταθερές.

Συνεπώς από την (15) και τις (23) και (25) βρίσκουμε:

$$\psi^{(1)}(r,\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_nr^n+B_nr^{-n+1}\right)_{H_n}^{G_n}(\zeta) \tag{26}$$

όπου οι A_n,B_n είναι σταθερές.

Αφού οι εξισώσεις (15) και (17) είναι πρακτικά οι ίδιες, τότε και η συνάρτηση W θα έχει τη μορφή της (26), οπότε:

$$W(r,\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(c_nr^n+d_nr^{-n+1}\right)_{H_n}^{G_n}(\zeta) \tag{27}$$

όπου οι c_n,d_n είναι σταθερές.

Η εξίσωση (16) είναι η μη ομογενής μορφή των (15) και (17), οπότε λύνεται και αυτή με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών και με τη βοήθεια της αντικατάστασης

$$\psi^{(2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\pi_n(r)_{H_n}^{G_n}(\zeta) \tag{28}$$

Αντικαθιστώντας στην (16) την (28) και εκμεταλλευόμενοι ότι οι $G_n(x)$, $H_n(x)$ επαληθεύουν την εξίσωση Gegenbauer, βρίσκουμε:

$$E^2\psi^{(2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{d^2\pi_n(r)}{dr^2}-\frac{1}{r^2}n(n-1)\pi_n(r)\right]_{H_n}^{G_n}(\zeta) \tag{29}$$

οπότε λόγω της (27) βρίσκουμε

$$\frac{d^2\pi_n}{dr^2}-n(n-1)\frac{\pi_n}{r^2}=c_nr^n+d_nr^{-n+1} \tag{30}$$

η οποία έχει ειδική λύση

$$\pi_n(r)=\frac{c_nr^{n+2}}{2(2n+1)}-\frac{d_nr^{-n+3}}{2(2n-3)} \tag{31}$$

Επομένως από την (28) βρίσκουμε ότι:

$$\psi^{(2)}(r,\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(C_nr^{n+2}+D_nr^{-n+3}\right)_{H_n}^{G_n}(\zeta) \tag{32}$$

Η γενική λύση της (11) στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων είναι

$$\begin{aligned}\psi(r,\zeta)&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_nr^n+B_nr^{-n+1}+C_nr^{n+2}+D_nr^{-n+3}\right)G_n(\zeta)\\&+\sum_{n=2}^{\infty}\left(A_n^{'}r^n+B_n^{'}r^{-n+1}+C_n^{'}r^{n+2}+D_n^{'}r^{-n+3}\right)H_n(\zeta)\end{aligned} \tag{33}$$

Γενική λύση στα σφαιροειδή συστήματα συντεταγμένων

Στο επίμηκες σφαιροειδές (Dassios, Hadjinicolaou, Payatakes, 1994) σύστημα συντεταγμένων (τ,ζ,ϕ) ο τελεστής Stokes παίρνει τη μορφή

$$E^2 = \frac{1}{c^2\left(\tau^2-\zeta^2\right)}\left[(\tau^2-1)\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+(1-\zeta^2)\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right] \qquad (34)$$

με $\tau\in[1,+\infty)$, $\zeta\in[-1,1]$, $\phi\in[0,2\pi)$.
Έστω

$$\psi(\tau,\zeta) = T(\tau)Z(\zeta) \qquad (35)$$

οπότε από την (34) και για επαλήθευση της $E^2\psi = 0$ προκύπτει ότι:

$$\frac{T''}{T}(\tau^2-1) = -(1-\zeta^2)\frac{Z''}{Z} \qquad (36)$$

Συνεπώς:

$$(1-\tau^2)T''+\lambda T = 0 \qquad (37)$$

και

$$(1-\zeta^2)Z''+\lambda Z = 0 \qquad (38)$$

Δοκιμάζοντας λύσεις με τη μορφή σειράς και χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Frobenious επιλέγουμε

$$\lambda = n(n-1) \qquad (39)$$

με $n\in\mathbb{N}^*$, οπότε οι (37), (38) γίνονται:

$$(1-\tau^2)T''+n(n-1)T = 0 \qquad (40)$$

και

$$(1-\zeta^2)Z''+n(n-1)Z = 0 \qquad (41)$$

οι οποίες είναι διαφορικές εξισώσεις Gegenbauer (Lebedev, 1972) για m = –1 με βαθμό –½ και με λύσεις τις αντίστοιχες συναρτήσεις πρώτου είδους $G_n(x)$ και δευτέρου είδους $H_n(x)$.

Ορίζουμε τις ιδιοσυναρτήσεις $\Theta_n(\tau,\zeta)$, i είδους (i = 1, 2, 3, 4) ως:

$$\Theta_n^{(1)}(\tau,\zeta) = G_n(\tau)G_n(\zeta) \qquad (42)$$

$$\Theta_n^{(2)}(\tau,\zeta) = G_n(\tau)H_n(\zeta) \qquad (43)$$

$$\Theta_n^{(3)}(\tau,\zeta) = H_n(\tau)G_n(\zeta) \qquad (44)$$

$$\Theta_n^{(4)}(\tau,\zeta) = H_n(\tau)H_n(\zeta) \qquad (45)$$

Κάθε μία από τις ιδιοσυναρτήσεις $\Theta_n(\tau,\zeta)$, i είδους επαληθεύει την εξίσωση $E^2\psi = 0$. Επομένως μια πλήρης αναπαράσταση του πυρήνα του E^2 δίνεται από την συνάρτηση

$$\psi(\tau,\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{4} A_n^i\Theta_n^{(i)}(\tau,\zeta) \qquad (46)$$

όπου οι A_n^i είναι σταθερές.

Κάθε μία από τις συναρτήσεις της μορφής (46) είναι λύση της εξίσωσης $E^4\psi = 0$, αλλά αυτές δεν αποτελούν το πλήρες σύνολο των λύσεών της. Αναζητούμε λοιπόν συνάρτηση $\tilde{\psi}(\tau,\zeta)$ που να ανήκει στον πυρήνα του E^4, αλλά όχι στον πυρήνα του E^2, δηλαδή

$$E^2\tilde{\psi}(\tau,\zeta)\in \mathrm{Ker}E^2 \qquad (47)$$

και λόγω της (46) θα ισχύει ότι:

$$E^2\tilde{\psi}(\tau,\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{4} B_n^i\Theta_n^{(i)}(\tau,\zeta) \qquad (48)$$

Θεωρούμε $\Omega_n^{(i)}(\tau,\zeta)$ την προεικόνα της ιδιοσυνάρτησης $\Theta_n^{(i)}(\tau,\zeta)$ για τον τελεστή E^2, δηλαδή, ισχύει:

$$c^2E^2\Omega_n^{(i)}(\tau,\zeta)=\Theta_n^{(i)}(\tau,\zeta) \tag{49}$$

Οι συναρτήσεις $\Omega_n^{(i)}(\tau,\zeta)$ είναι οι γενικευμένες ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή E^2 για τις μηδενικές ιδιοτιμές. Αντικαθιστώντας την (49) στην (48) βρίσκουμε ότι:

$$\tilde{\psi}(\tau,\zeta)=c^2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{4}B_n^i\Omega_n^{(i)}(\tau,\zeta)+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{4}A_n^i\Theta_n^{(i)}(\tau,\zeta) \tag{50}$$

Όμως αφού $\tilde{\psi}(\tau,\zeta)\in \mathrm{Ker}E^4$ και το δεύτερο μέλος της σχέσης (50) είναι άθροισμα δύο συναρτήσεων μιας που ανήκει στον ιδιόχωρο του E^2, η άλλη συνάρτηση ανήκει στον γενικευμένο ιδιόχωρο του E^2. Επομένως η σχέση (50) δίνει τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή, που είναι μια βάση του $\mathrm{Ker}E^4$, δηλαδή, δίνει μια πλήρη φασματική αποσύνθεση του συνόλου των λύσεων του $\mathrm{Ker}E^4$, αν οι γενικευμένες ιδιοσυναρτήσεις $\Omega_n^{(i)}(\tau,\zeta)$ του τελεστή E^2 είναι γνωστές.

Επίσης από την (49) βρίσκουμε:

$$\frac{\partial^2\Omega_n^{(i)}}{\partial\tau^2}(\tau^2-1)+(1-\zeta^2)\frac{\partial^2\Omega_n^{(i)}}{\partial\zeta^2}=\left(\tau^2-\zeta^2\right)\Theta_n^{(i)}(\tau,\zeta) \tag{51}$$

της οποίας η επίλυση είναι εφικτή αν γνωρίζουμε μια ειδική λύση της εξίσωσης

$$\left[(\tau^2-1)\partial_{\tau\tau}+(1-\zeta^2)\partial_{\zeta\zeta}\right]\psi(\tau,\zeta)=f_n(\tau)g_m(\zeta) \tag{52}$$

όπου f_n, g_n είναι συναρτήσεις Gegenbauer $1^{ου}$ ή $2^{ου}$ είδους. Μια ειδική λύση της (52) είναι

$$\psi_{nm}(\tau,\zeta)=\frac{f_n(\tau)g_m(\zeta)}{(n-m)(n+m-1)} \tag{53}$$

για $n\neq m$, $n+m\neq 1$, $n\in\mathbb{N}^*$, $m\in\mathbb{N}^*$.

Επομένως η (51) μπορεί να λυθεί, άρα οι γενικευμένες ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή E^2 υπολογίζονται (Dassios, Hadjinicolaou, Payatakes, 1994) και η λύση της εξίσωσης $E^4\psi=0$, είναι:

$$\psi(\tau,\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{4}\left[A_n^i\Theta_n^{(i)}(\tau,\zeta)+B_n^i\Omega_n^{(i)}(\tau,\zeta)\right] \tag{54}$$

όπου $\Omega_n^{(i)}(\tau,\zeta)$ είναι αθροίσματα γινομένων συναρτήσεων Gegenbauer (Dassios, Hadjinicolaou, Payatakes, 1994).

Από την (54) με αναδιάταξη και ομαδοποίηση όρων, βρίσκουμε μια μορφή της συνάρτησης ροής που είναι κατάλληλη για προβλήματα συνοριακών τιμών, την

$$\begin{aligned}\psi(\tau,\zeta)&=g_0(\tau)G_0(\zeta)+g_1(\tau)G_1(\zeta)\\&+\sum_{n=2}^{\infty}\left[g_n(\tau)G_n(\zeta)+h_n(\tau)H_n(\zeta)\right]\end{aligned} \tag{55}$$

όπου $g_n(\tau)$, $h_n(\tau)$ είναι αθροίσματα συναρτήσεων Gegenbauer παραπάνω (Dassios, Hadjinicolaou, Payatakes, 1994).

Επίσης δεδομένων των (54), (55) μπορούμε να βρούμε και τη γενική λύση στο πεπλατυσμένο σφαιροειδές (λ,ζ,ϕ), αφού προκύπτει από το επίμηκες σφαιροειδές (τ,ζ,ϕ) από τον μετασχηματισμό

$$\begin{aligned}&\tau\to i\lambda \text{ και } c\to -ic\\&c>0,\ \tau>1,\ \lambda>0\end{aligned} \tag{56}$$

Γεωμετρικός εκφυλισμός

Ένας τρόπος για να επιβεβαιωθούν τα παραπάνω (Dassios, Hadjinicolaou, Payatakes, 1994) είναι να θεωρήσουμε την οριακή κατάσταση στην οποία το σφαιροειδές γίνεται σφαίρα, δηλαδή, όταν η ημιεστιακή απόσταση τείνει στο 0 ($c \to 0^+$).

Ισχύει

$$r = c\sqrt{\tau^2 + \zeta^2 - 1} \tag{57}$$

οπότε

$$\lim_{c \to 0^+} (c\tau) = r \tag{58}$$

και ο τελεστής E^2 γίνεται:

$$E^2 = \frac{1}{(c\tau)^2 - c^2\zeta^2}\left[[(c\tau)^2 - c^2]\frac{\partial^2}{\partial (c\tau)^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\cos\eta}{\sin\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\right] \tag{59}$$

άρα παίρνοντας το όριο όταν $c \to 0^+$, προκύπτει:

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\cos\eta}{\sin\eta}\frac{\partial}{\partial \eta} \tag{60}$$

που εκφράζει τον τελεστή E^2 στις σφαιρικές συντεταγμένες (34).

Χρησιμοποιώντας τις

$$c^n G_n(\tau) \to k_n r^n \tag{61}$$

$$\frac{1}{c^{n-1}} H_n(\tau) \to \frac{w_{n-1}}{r^{n-1}} \tag{62}$$

με $n \in \mathbb{N}^*$, k_n, w_n σταθερές και με βάθμωση των συντελεστών A_n^i, B_n^i, οι συναρτήσεις g, h της (55) όταν $c \to 0^+$ γίνονται:

$$g_n(\tau) \to \Gamma_n^1 r^n + \Gamma_n^2 \frac{1}{r^{n-1}} + \Gamma_n^3 r^{n+2} + \Gamma_n^4 \frac{1}{r^{n-3}},\ n \ge 0 \tag{63}$$

και

$$h_n(\tau) \to \Delta_n^1 r^n + \Delta_n^2 \frac{1}{r^{n-1}} + \Delta_n^3 r^{n+2} + \Delta_n^4 \frac{1}{r^{n-3}},\ n \ge 2 \tag{64}$$

όπου Γ_n^i, Δ_n^i (i = 1, 2, 3, 4) είναι σταθερές.

Αντικαθιστώντας τις $g_n(\tau)$, $h_n(\tau)$ στην (55) προκύπτει η αναπαράσταση της συνάρτησης ροής στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων (33).

Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία παρουσιάστηκε μια μελέτη της ροής Stokes (έρπουσα ροή) σε αξονοσυμμετρικά συστήματα συντεταγμένων και ειδικά στο σφαιρικό και στα σφαιροειδή συστήματα συντεταγμένων. Η διαφορική εξίσωση ελλειπτικού τύπου που λύνουμε για να υπολογίσουμε τη συνάρτηση ροής ψ είναι η $E^4\psi = 0$. Η ελλειπτικότητα του τελεστή E^4 αντανακλάται στο γεγονός ότι η ροή είναι μόνιμη, δηλαδή, η μορφή της δεν εξελίσσεται χρονικά.

Στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων είδαμε ότι ο τελεστής E^4 χωρίζει μεταβλητές. Στα σφαιροειδή συστήματα συντεταγμένων ο τελεστής E^4 δεν χωρίζει μεταβλητές, παρόλο που ο τελεστής E^2 χωρίζει μεταβλητές. Για να επιτευχθεί η πλήρης αναπαράσταση του πυρήνα του E^4, υπολογίζουμε τις λύσεις της εξίσωσης $E^4\psi = 0$, οι οποίες δεν ανήκουν στον πυρήνα του E^2. Αυτό πραγματοποιείται με τη χρήση της γενικευμένης θεωρίας των ιδιοσυναρτήσεων, εκφράζοντας την λύση σαν άθροισμα δύο συναρτήσεων. Η μία εκφράζεται ως ανάπτυγμα με ιδιοσυναρτήσεις του

E^2 και η δεύτερη ως ανάπτυγμα γενικευμένων ιδιοσυναρτήσεων του E^2. Οι γενικευμένες ιδιοσυναρτήσεις εκφράζονται σαν όροι αθροίσματος γινομένων συναρτήσεων Gegenbauer.

Αρχικά η πλήρης αναπαράσταση του διανυσματικού χώρου των λύσεων της $E^2\psi = 0$ δίνεται με τη μορφή ιδιοσυναρτήσεων του E^2. Ακολούθως, η πλήρης αναπαράσταση του διανυσματικού χώρου των λύσεων της $E^4\psi = 0$ παριστάνεται με τη μορφή γενικευμένων ιδιοσυναρτήσεων του E^2. Παράγουμε έτσι ένα πλήρες σύνολο γενικευμένων ιδιοσυναρτήσεων, κάθε μία από τις οποίες δίνεται σε κλειστή μορφή με τη βοήθεια συναρτήσεων Gegenbauer πρώτου και δευτέρου είδους. Παριστάνουμε έτσι κάθε συνάρτηση ροής ως άθροισμα των σειρών των ιδιοσυναρτήσεων και των γενικευμένων ιδιοσυναρτήσεων του E^2.

Για $n < 4$ οι γενικευμένες ιδιοσυναρτήσεις (Dassios, Hadjinicolaou, Payatakes, 1994) δεν έχουν κάποιο συγκεκριμένο τρόπο εξάρτησης των δεικτών των συναρτήσεων Gegenbauer. Αντιθέτως, για $n \geq 4$ οι γενικευμένες ιδιοσυναρτήσεις αποτελούνται από συναρτήσεις Gegenbauer με αντίστοιχους δείκτες εξάρτησης $n - 2$, n, $n + 2$, όταν $n \geq 4$. Συνεπώς οι γενικευμένες ιδιοσυναρτήσεις προκύπτουν από τον εννιαδιάστατο υπόχωρο που δημιουργούν οι συναρτήσεις Gegenbauer πρώτου και δευτέρου είδους. Κοιτάζοντας πιο προσεκτικά τις γενικευμένες ιδιοσυναρτήσεις για $n \geq 4$ και ξεχωριστά για κάθε $i = 1, 2, 3, 4$ παρατηρούμε ότι χρησιμοποιούνται μόνο οι τέσσερις διαστάσεις από τις εννέα, αφού:

- ✓ οι $n - 2$ δείκτες της τ εξάρτησης συνδέονται με τους n δείκτες της εξάρτησης από το ζ,
- ✓ οι n δείκτες της τ εξάρτησης συνδέονται με τους $n - 2$ δείκτες της εξάρτησης από το ζ,
- ✓ οι $n + 2$ δείκτες της τ εξάρτησης συνδέονται με τους n δείκτες της εξάρτησης από το ζ,
- ✓ οι n δείκτες της τ εξάρτησης συνδέονται με τους $n + 2$ δείκτες της εξάρτησης από το ζ.

Επιπλέον μπορούμε να δούμε ότι καθώς το n αυξάνεται (ανά δύο) κάποιες ιδιοδιευθύνσεις δεν προκύπτουν για πρώτη φορά, αλλά δύο παραμένουν ίδιες και εισάγονται δύο νέες, δηλαδή εκτός από τη σύνδεση των ιδιολύσεων έχουμε και σύνδεση των ιδιοχώρων μεταξύ τους.

Επίσης παρατηρούμε ότι παρόλο που κάθε όρος της λύσης ψ(τ, ζ) δεν επαληθεύει την εξίσωση $E^4\psi = 0$, η εξάρτηση από το ζ δεν υπεισέρχεται από τις συναρτήσεις Gegenbauer μεικτής τάξης, αλλά κάθε όρος της περιλαμβάνει ένα πεπερασμένο πλήθος συναρτήσεων Gegenbauer μεικτής τάξης. Αυτό σημαίνει ότι ο τελεστής E^4, καταστρέφει τη διαχωρισιμότητα κυρίως λόγω της σύνθεσης και όχι λόγω της διαφορικής του δομής. Επιπλέον, ο μη χωρισμός των μεταβλητών οφείλεται κυρίως στον αλγεβρικό παράγοντα του γινομένου που ορίζει τον E^4 και όχι στον διαφορικό παράγοντα του τελεστή.

Το πλεονέκτημά της μεθόδου της ημιδιαχωρισιμότητας είναι ότι επειδή η λύση είναι πλήρης και γενική, μπορούμε να την χρησιμοποιούμε σε εσωτερικά και εξωτερικά προβλήματα ροής, καθώς και σε προβλήματα σφαιροειδούς κυττάρου με ή χωρίς ιδιομορφίες στον άξονα συμμετρίας.

Παράλληλα, παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $g_n(\tau)$ πολλαπλασιάζονται με τις $G_n(\zeta)$, όπου οι συναρτήσεις $h_n(\tau)$ πολλαπλασιάζονται με τις $H_n(\zeta)$ και δεδομένου ότι οι συναρτήσεις $h_n(\tau)$ και $g_n(\tau)$ δεν συμπίπτουν, η εξίσωση $E^4\psi = 0$ δεν δέχεται γενικά χωρισμό λύσεων. Όμως φαίνεται ότι η λύση επιδέχεται κάποιο είδος διαχωρισμού, ο οποίος ονομάζεται ημιδιαχωρισμός.

Η ονομασία ημιδιαχωρισμός αιτιολογείται και με άλλον τρόπο. Ο τελεστής E^2 είναι το γινόμενο ενός αλγεβρικού και ενός διαφορικού παράγοντα. Τα στοιχεία του πυρήνα του E^2 δέχονται χωρισμένη μορφή, αφού ο αλγεβρικός παράγοντας απαλείφεται για να λυθεί η εξίσωση $E^2\psi = 0$, ενώ είναι ο ίδιος αλγεβρικός παράγοντας είναι αυτός που δεν επιτρέπει τη χωρισμένη μορφή της εξίσωσης $E^4\psi = 0$. Αυτό σημαίνει ότι ο μη διαχωρισμός του τελεστή E^4 δεν προκύπτει από «σοβαρή επιπλοκή», το οποίο είναι αληθές, αφού οι γενικευμένες λύσεις δεν κατασκευάζονται από νέες συναρτήσεις, αλλά παράγονται ακολουθώντας συγκεκριμένη διαδικασία και εμπλέκουν τις συναρτήσεις Gegenbauer που χρησιμοποιούμε για να πάρουμε χωρισμένες λύσεις.

Όλα τα παραπάνω χρησιμοποιούνται και εφαρμόζονται στην έρευνα προβλημάτων των φυσικών επιστημών και των βιοεπιστημών. Ένα τέτοιο παράδειγμα, αφορά στη μαθηματική μοντελοποίηση της ροής του πλάσματος του αίματος γύρω από το ερυθρό αιμοσφαίριο. Η ροή του πλάσματος του αίματος, εξαιτίας των φυσικών χαρακτηριστικών της, θεωρείται έρπουσα και ασυμπίεστη, οπότε μπορεί να θεωρηθεί της ως ροή Stokes. Το ερυθρό αιμοσφαίριο έχει σχήμα αμφίκοιλου δίσκου, οπότε μια ικανοποιητική περιγραφή του είναι εκείνη του αντίστροφου επιμήκους σφαιροειδούς, του οποίου ο άξονας συμμετρίας βρίσκεται παράλληλα στη ροή του πλάσματος του αίματος. Η έρευνα αυτή είναι σε εξέλιξη.

Ενδεικτική βιβλιογραφία

Stokes G. G. (1945). On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion and the Equilibrium and Motion of Elastic Solids, *Trans. Camp. Phil. Soc*, **8**, 287 – 319.

Stokes G. G. (1851). On the Effect of the Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums, *Trans. Camp. Phil. Soc*, **8**, 8 – 106.

Happel J., Brenner H. (1991) *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, Kluwer Academic Publishers.

Dassios G., Hadjinicolaou M., Payatakes A. C. (1994). Generalized Eigenfunctions and Complete Semiseparable Solutions for Stokes Flow in Spheroidal Coordinates, *Quarterly of Applied Mathematics*, Volume **LII**, Number I, (157 – 191) Brown University.

Moon P., Spencer D. E. (1961). *Field Theory Handbook*, Springer-Verlag.

Lebedev N. N. (1972) *Special Functions and Their Applications*, Dover Publications.

Σημείωση

Η παρούσα εργασία αποτελεί μέρος της διδακτορικής διατριβής του συγγραφέως, η οποία εκπονείται υπό την επίβλεψη της Δρ. Χατζηνικολάου Μαρίας, Αναπληρώτριας Καθηγήτριας του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου, Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας (hatzinik@eap.gr)