Ανοικτή Εκπαίδευση: το περιοδικό για την Ανοικτή και εξ Αποστάσεως Εκπαίδευση και την Εκπαιδευτική Τεχνολογία

Τόμ. 8, Αρ. 1 (2012)

Ανοικτή Εκπαίδευση

Μαθηματική Προτυποποίηση μέσω Προβλημάτων Ελεύθερου Συνόρου

Αλκιβιάδης Τζελέπης

doi: 10.12681/jode.9796

Open Education - The Journal for Open and Distance Education and Educational Technology
Volume 8, Number 1, 2012 Section one. © Open Education ISSN: 1791-9312

Μαθηματική Προτυποποίηση μέσω Προβλημάτων Ελεύθερου Συνόρου

Mathematical Modeling through Free Boundary

Αλκιβιάδης Τζελέπης,
MSc Μαθηματικός,
Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο,
Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας
Υπ. Δ. ΕΑΠ, alktzelepis@yahoo.co.uk

Περίληψη

Τα προβλήματα ελεύθερου συνόρου αποτελούν ένα μαθηματικό πεδίο έρευνας που χαρακτηρίζεται από την εμφάνιση συνόρων, των οποίων η θέση είναι άγνωστη εκ των προτέρων. Τα ελεύθερα σύνορα χωρίζουν χωρικές-χρονικές περιοχές με διαφορετικές ιδιότητες. Κλασικό παράδειγμα αποτελεί η στερεοποίηση του νερού, όπου η θέση του συνόρου μεταξύ νερού και πάγου δεν είναι καθορισμένη, αλλά αλλάζει κατά τη διάρκεια της διαδικασίας. Ελεύθερα σύνορα προκύπτουν φυσικά κατά τη μαθηματική προτυποποίηση μιας μεγάλης ποικιλίας επιστημονικών και τεχνολογικών διεργασιών, όπως για παράδειγμα στον τομέα της μεταποίησης υλικών (χύτευση χάλυβα, κρυσταλλική και δενδρική ανάπτυξη), στη βιολογία (δυναμική των πληθυσμών, ανάπτυξη βακτηριδίων), στη θεωρία της καύσης, σε προβλήματα αντίδρασης-διάχυσης, στην ηλεκτροχημεία ή στη ροή ρευστών διαμέσου πορωδών μέσων.

Κλασικά προβλήματα ελεύθερου συνόρου είναι το πρόβλημα του Stefan, η ροή διαμέσου μιας μεμβράνης (thin-film flow), τα κρουστικά κύματα (shock waves), το πρόβλημα επαφής (contact problem) και η εξίσωση του πορώδους μέσου (porous-medium equation). Όλα τα προβλήματα έχουν το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό, ότι η γεωμετρία του ελεύθερου συνόρου πρέπει να ληφθεί υπόψη και να υπολογισθεί ταυτόχρονα με την επίλυση των εξισώσεων του πεδίου. Το γεγονός αυτό μπορούμε να το υιοθετήσουμε ως ορισμό εργασίας των προβλημάτων ελεύθερου συνόρου, τα οποία επιπλέον είναι μη γραμμικά, διότι οι λύσεις των μερικών διαφορικών εξισώσεων σχεδόν ποτέ δεν εξαρτώνται γραμμικά από τη γεωμετρία των συνόρων μέσα στα οποία πρέπει να επιλυθούν.

Abstract

Free boundary problems constitute a mathematical research topic characterized by the occurrence of frontiers whose location is a priori unknown. Free boundaries separate space–time regions with different properties. Free boundaries occur naturally in the mathematical formulation of a great variety of scientific and technological processes, e.g. in material processing (steel casting, crystal and dendritic growth, etc.), in biology (population dynamics, growth of bacteria), in combustion theory, in reaction-diffusion problems, in electrochemistry or in fluid flow-through porous media.

The free boundary geometry must be calculated and the field equations must be solved simultaneously. They are inevitably nonlinear, because the solutions of partial differential equations almost never depend linearly on the geometry of the boundaries within which they are to be solved.

The most famous free boundary problem for parabolic equations is the Stefan problem, in which we consider the solidification of water where the location of the

Open Education - The Journal for Open and Distance Education and Educational Technology
Volume 8, Number 1, 2012 Section one. © Open Education ISSN: 1791-9312

boundary between water and ice is not fixed and changes during the process. There are free boundary problems in diffusion, such as the diffusion flames model, problems from fluid dynamics, from solid mechanics such as the obstacle problem.

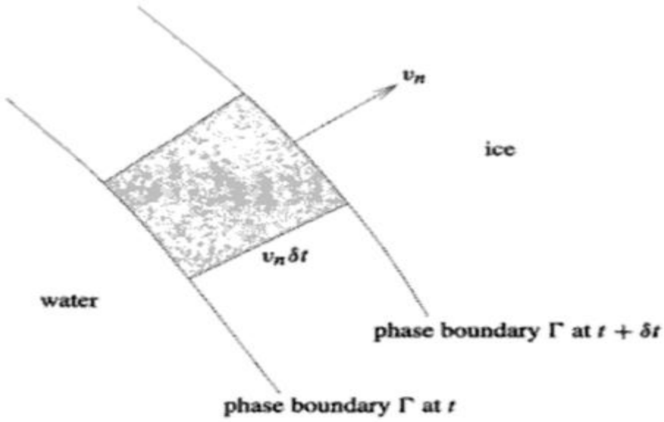
The nonlinearity of free boundary problems makes them less susceptible to mathematical analysis than the linear equations, so the discussion about stability and well-posedness is very interesting, because there is just about as much likelihood of ill-posedness as of well-posedness.

In our effort to deal with the free boundary problems we use classical solutions, weak and variational methods and sometimes explicit solutions.

Keywords
Free boundary problems, Stefan problem

1. Κλασικά Προβλήματα Ελεύθερου Συνόρου

Το πρόβλημα του Stefan είναι ένα πρόβλημα μεταφοράς θερμότητας στο οποίο όμως επιτρέπεται στο μέσο να αλλάζει φάση (να λειώνει, να παγώνει, να εξατμίζεται, ή να συμπυκνώνεται).



Σχήμα 1.1. Η συνθήκη Stefan

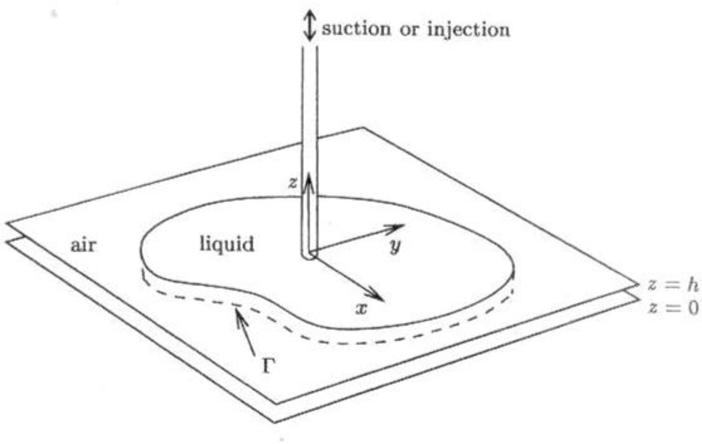
Η εξίσωση της θερμότητας u: — ,

όπου η πυκνότητα μάζας ρ, η ειδική θερμότητα c και ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας k του αγώγιμου μέσου είναι όλα θετικές σταθερές.
Οι συνθήκες ελεύθερου συνόρου είναι:

και ,

όπου είναι η ταχύτητα του ελεύθερου συνόρου και L η λανθάνουσα θερμότητα ανά μονάδα μάζας η οποία απαιτείται να προσφερθεί στον πάγο θερμοκρασίας ώστε να μετατραπεί σε νερό θερμοκρασίας .

Στο πρόβλημα Hele – Shaw, ιξώδες ρευστό εξαναγκάζεται είτε με άντληση είτε με απομύζηση να περάσει διαμέσου ενός στενώματος μεταξύ δύο παράλληλων πλακών $z = 0$ και $z = h$.



Σχήμα 1.2. Ένα κελί Hele-Shaw

Η εξίσωση Laplace για την πίεση p:
Οι συνθήκες ελεύθερου συνόρου είναι:

και —

Τα προβλήματα ελεύθερου συνόρου σε διάχυση αφορούν σε προβλήματα καύσης, συνήθως στα αέρια, στα οποία οι σημαντικές χημικές αντιδράσεις συμβαίνουν μόνο στο πέτασμα της φλόγας.
Οι εξισώσεις και οι συνθήκες ελεύθερου συνόρου είναι:

και

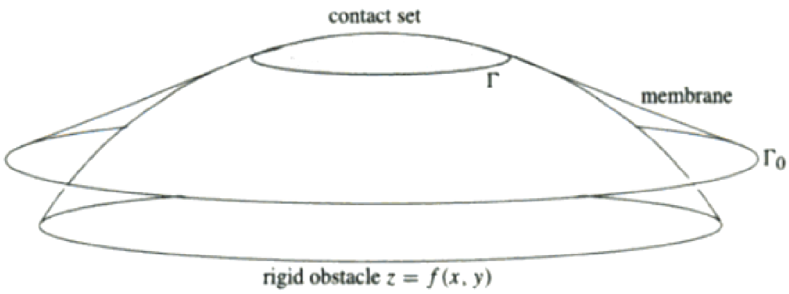
όπου T η θερμοκρασία, c η συγκέντρωση των αντιδρώντων, ο χωρίς διάσταση ρυθμός της αντίδρασης είναι της μορφής , όπου A είναι σταθερά και η αδιάστατη ενέργεια ενεργοποίησης (activation energy) E, το είναι μεγαλύτερη τιμή της θερμοκρασίας και το είναι μία σταθερά ανάλογη με το A.

Προβλήματα από τη μηχανική, όπως:
α) τη δυναμική των ρευστών (fluid dynamics)
Οι εξισώσεις του πεδίου του δυναμικού της ταχύτητας είναι:

Η εξίσωση Laplace , με τις συνοριακές συνθήκες:

όπου είναι το δυναμικό της ταχύτητας (velocity potential) και η επιφάνεια του νερού περιγράφεται από τη .

β) τη μηχανική των στερεών (solid mechanics) και το πρόβλημα εμποδίου για μία μεμβράνη



Σχήμα 1.3. Πρόβλημα εμποδίου για μία μεμβράνη

Η εξίσωση και οι συνθήκες ελεύθερου συνόρου είναι:

και ,

όπου η εγκάρσια μετατόπιση u(x,ψ) ικανοποιεί την εξίσωση Laplace και το στερεό εμπόδιο περιγράφεται από τη συνάρτηση z = f (x,ψ).

2. Ευστάθεια και Καλή Τοποθέτηση των Προβλημάτων

Η ανάλυση της ευστάθειας και ως εκ τούτου της καλής τοποθέτησης των προβλημάτων ελεύθερου συνόρου γίνεται με τη μέθοδο των διαταραχών για τη θεωρία των προσεγγιστικών λύσεων.

Στα προβλήματα ελεύθερου συνόρου υπάρχει τόση ακριβώς πιθανότητα ασθενούς τοποθέτησης, όσο και καλής τοποθέτησης. Πολλά προβλήματα απλά αλλάζουν τα χαρακτηριστικά ευστάθειας τους σύμφωνα με την κατεύθυνση διάδοσης του ελεύθερου συνόρου ή με το πρόσημο του μηχανισμού οδήγησης.

Τα προβλήματα Stefan εμφανίζονται να είναι καλά τοποθετημένα όταν δεν επέρχεται ούτε υπερβολική ψύξη, ούτε υπερβολική θέρμανση.

Τα ελεύθερα σύνορα πορώδους μέσου είναι καλά τοποθετημένα όταν η κορεσμένη περιοχή βρίσκεται κάτω από το ελεύθερο σύνορο και ασθενώς τοποθετημένα διαφορετικά.

Από την ανάλυση της ευστάθειας του δυναμικού ταχύτητας προκύπτει ότι έχουμε φυσικά αποδεκτές ιδιολύσεις του γραμμικοποιημένου προβλήματος κυματισμού του νερού, μόνο αν η ιδιοτιμή λ είναι πραγματική. Αυτό αντιστοιχεί με ένα ‘wave train’ επάνω στο ελεύθερο σύνορο, έτσι ώστε η ταχύτητα του κύματος να είναι λ/k προφανώς θετική και μόνο αν το k είναι πραγματικός αριθμός.

Από τον έλεγχο της ευστάθεια της ροής Hele-Shaw προκύπτει ότι η σχέση διασποράς είναι . Είναι εμφανές ότι υπάρχει μια δραματική αλλαγή από φαινομενικά καλή τοποθέτηση σε ασθενή τοποθέτηση, όσο προχωράμε από ένα πρόβλημα ‘εμφύσησης’ όταν το V > 0 , σε ένα πρόβλημα ‘αναρρόφησης’ όταν το V < 0.

3. Μέθοδοι Επίλυσης Προβλημάτων Ελεύθερου Συνόρου

Α. Κλασικές λύσεις

i. Μέθοδοι Σύγκρισης

Μερικές πληροφορίες σχετικά με τη θέση των ελεύθερων συνόρων και το εύρος των λύσεων μπορούν να αλιευθούν περιστασιακά από μεθόδους σύγκρισης.

ii. Ενεργειακές μέθοδοι και διατηρημένες ποσότητες

Παρόλη τη μη γραμμικότητα των προβλημάτων ελεύθερου συνόρου, είναι πιθανό να εξάγουμε κάποια πληροφορία από λίγο έως πολύ κατευθείαν ολοκλήρωση.

iii. Συναρτήσεις Green και ολοκληρωτικές εξισώσεις

Αν και οι συναρτήσεις Green δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν άμεσα για να λύσουν τα προβλήματα ελεύθερου συνόρου, μπορούμε μερικές φορές να μετακυλήσουμε την πληροφορία από το πεδίο εξισώσεων επάνω στο ελεύθερο σύνορο και έτσι να ανάγουμε το πρόβλημα σε μια μη γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση.

Β. Ασθενείς και μεταβολικές μέθοδοι

Επειδή τα κλασικά προβλήματα ελεύθερου συνόρου είναι πολύ δύσκολο να έχουν αυστηρή ανάλυση, είναι φυσικό να προσπαθήσουμε να καταστήσουμε χαλαρότερο το μαθηματικό στόχο, απαιτώντας ένα λιγότερο αυστηρό ορισμό της έννοιας της λύσης. Μία δυνατότητα που έχουμε είναι να ακολουθήσουμε τις ιδέες των ασθενών λύσεων (weak solutions). Να προσπαθήσουμε δηλαδή να ορίσουμε μία ασθενή λύση πολλαπλασιάζοντας το πεδίο των εξισώσεων με συναρτήσεις ελέγχου και ολοκληρώνοντας με τέτοιον τρόπο, ώστε το ελεύθερο σύνορο και οι συνθήκες που επιβλήθηκαν σε αυτό να είναι αυτόματα ενσωματωμένες στη διατύπωση του ολοκληρώματος. Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να προσπαθήσουμε να γενικεύσουμε τη μέθοδο της μεταβολικής προσέγγισης με τέτοιον τρόπο, που οι συνθήκες ελεύθερου συνόρου να ικανοποιούνται αυτόματα από τους ελαχιστοποιητές.

Και στις δύο περιπτώσεις η φιλοσοφία είναι η ίδια. Αναζητούμε μία τυποποίηση η οποία να έχει λογικό ειρμό, ακόμη και παρουσία οιονδήποτε ασυνεχειών οι οποίες εμπεριέχονται στις συνθήκες ελεύθερου συνόρου. Η δυνατότητα αυτή ικανοποιείται όταν καταγράφεται μία τυποποίηση η οποία έχει καλές ιδιότητες ύπαρξης και μοναδικότητας. Ακόμη και αν αυτή η διατύπωση είναι υπερβολικά δύσχρηστη ώστε να έχουμε την ελπίδα να βρούμε άμεσο τρόπο για γενικευμένες λύσεις, μπορούμε να ελπίζουμε ότι μπορούν να επινοηθούν αριθμητικές διακριτοποιήσεις, οι οποίες θα μπορούσαν να αποδειχθούν ότι τείνουν στην ασθενή ή μεταβολική λύση όταν το κατάλληλο μέγεθος του βήματος ελαττώνεται.

Γ. Αναλυτικές λύσεις

Από όλες τις τεχνικές που περιγράφονται στην επίλυση των κλασικών παραβολικών, ελλειπτικών και υπερβολικών προβλημάτων αρχικών και συνοριακών συνθηκών, δύο μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να βρούμε αναλυτικές λύσεις προβλημάτων ελεύθερου συνόρου. Αυτές είναι πρώτον, η χρησιμοποίηση της ομοιότητας μεταβλητών η οποία περιλαμβάνει τα ταξιδεύοντα κύματα και δεύτερον, η χρησιμοποίηση των μιγαδικών μεταβλητών αν το πεδίο των εξισώσεων τυχαίνει να είναι εξισώσεις Laplace ή ενδεχομένως, η διαρμονική εξίσωση

i. Ταξιδεύοντα κύματα: μεταβλητή ομοιότητας $x - Vt$

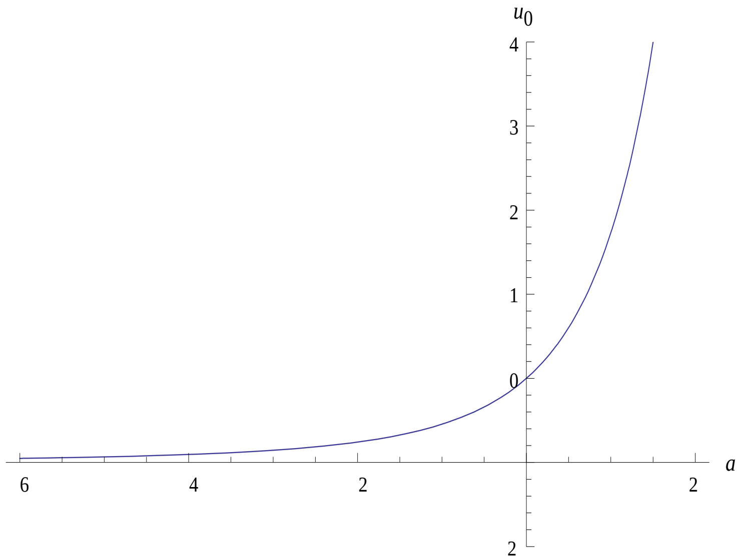
Στο πρόβλημα Stefan:

Θέτοντας $\xi = x - Vt$, η λύση είναι:

ii. Ο μετασχηματισμός του προβλήματος Stefan, θέτοντας:

δίνει ως λύση: –

Γραφική παράσταση της λύσης του προβλήματος Stefan:



Σχήμα 3.1. Η κρίσιμη τιμή της θερμοκρασίας στο πρόβλημα Stefan

Επομένως:
Υπάρχει μία μοναδική λύση όταν
Δεν υπάρχουν πραγματικές λύσεις όταν

4. Συμπεράσματα

- Η εύρεση των κατάλληλων συνθηκών στο ελεύθερο σύνορο είναι πρωταρχικής σημασίας
- Δεν υπάρχει μία μέθοδος συνολικής αντιμετώπισης των προβλημάτων ελεύθερου συνόρου
- Το ζήτημα της έλλειψης ευστάθειας δυσκολεύει τη μοντελοποίηση
- Η ομαλοποίηση συμβάλει στην προσπάθεια μοντελοποίησης των προβλημάτων
- Οι αριθμητικές λύσεις υπερέχουν πολύ των διαθέσιμων τεχνικών εύρεσης αναλυτικών λύσεων

Στη συνέχεια μελετάται η θεώρηση του ελεύθερου συνόρου στην προτυποποίηση ιατρικών προβλημάτων.

Βιβλιογραφία – Bibliography

Alonso M., Finn E. J., (1980), *Fundamental University Physics*, Addison Wesley Publishing Company.
Colli P., Verdi C., Visintin A., (2004), *Free Boundary Problems, Theory and Applications*, Birkhäuser.
Δάσιος Γ., Κυριάκη Κ., (1994), *Μερικές διαφορικές εξισώσεις*, Αθήνα.
Douglas J. Jr., Hornung U., (1993), *Flow in Porous Media*, Birkhäuser.

Gupta S.C., (2003), *The Classical Stefan Problem, Basic concepts, modeling and analysis*, Elsevier Science B.V..

Logan J. D., (1997), *Applied Mathematics, 2nd edition*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Ockendon John, Howison Sam, Lacey Andrew, Movchan Alexander, (2003), *Applied Partial Differential Equations (revised edition)*, Oxford University Press.

Τραχανάς Σ., (2001), *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις,* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Αρθρογραφία - Articles

Andreucci D., (2004), Lecture notes on the Stefan problem.

Donaldson R. D., (2001), Generalized Stefan problems.

Vuik C., (1993), Some historical notes about the Stefan problem, Delft university of Technology.

Σημείωση

Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών «Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά» της Σχολής Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου και αποτελεί μέρος της διπλωματικής εργασίας του συγγραφέως, η οποία εκπονήθηκε υπό την επίβλεψη του Δρ. Γκιντίδη Δρόσου, Επίκ. Καθηγητή, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, ΕΜΠ, dgindi@math.ntua.gr