# Ανοικτή Εκπαίδευση: το περιοδικό για την Ανοικτή και εξ Αποστάσεως Εκπαίδευση και την Εκπαιδευτική Τεχνολογία

Τόμ. 8, Αρ. 1 (2012)

Ανοικτή Εκπαίδευση


**Συνολικό Τεύχος**

*Συνολικό Τεύχος*

doi: [10.12681/jode.9850](https://doi.org/10.12681/jode.9850)

**Volume 8**
**Number 1**
**2012**
ISSN 1791-9312

# Open Education

The Journal for Open and Distance Education and Educational Technology

Αφιέρωμα:
Μαθηματικά και ανοικτή & εξ αποστάσεως εκπαίδευση

A periodical electronic publication of the Scientific Association: Hellenic Network of Open and Distance Education

**A periodical electronic publication of the Scientific Association: Hellenic Network of Open and Distance Education**

## Editorial Communication

*Antonis Lionarakis*
*Acssociate Professor*
*Hellenic Open Universirty &*
*Hellenic Network of Open & Distance Education*
*Sahtouri 23, 26222 Patra*
*Greece*
*E-mail :* alionar@eap.gr
*Web site :* http://www.opennet.gr/

*Gelly Manousou & Antonia Maria Xartofylaka*

**Books for review should be addressed to the above postal address**
**Hellenic Network of Open and Distance Education**


*The responsibility of the editing of the articles lies with the authors*

*Περιεχόμενα*

# Editorial

Σε περιόδους κρίσης, όπως αυτή που ζούμε τώρα, όπου η «κρίση», εκδηλώνεται έχοντας ως αφορμή οικονομικούς λόγους, αλλά επεκτείνεται και επηρεάζει κάθε τομέα της ανθρώπινης υπόστασης και δραστηριότητας, αναδεικνύεται εντονότερα η βαθύτερη κρίση του αξιακού μας συστήματος. Σε αυτό το ιδιαίτερα δυσμενές πλαίσιο, η ανάγκη ανάδειξης αναλλοίωτων και διαχρονικών αξιών οι οποίες θα αποτελέσουν τα δομικά στοιχεία ενός συστήματος αντίληψης, ερμηνείας και ανάπτυξης, είναι ζωτικής σημασίας. Μια τέτοια αξία, έχει αποδειχθεί ιστορικά, ότι είναι η «γνώση». Η επένδυση στη γνώση αποτελεί ουσιαστικό διέξοδο και μοχλό προόδου και ανάπτυξης τόσο σε ατομικό όσο και σε κοινωνικό επίπεδο.

Εκείνη η συνιστώσα της γνώσης που επάγεται από το γνωστό εννοιολογικό σχήμα: γνώση-αποκτώ γνώση = μαθαίνω -μανθάνω -μάθημα- μαθηματικά (=αυτό που μαθαίνεται), παρουσιάζεται στο τεύχος αυτό. Τα μαθηματικά , ως επιστήμη των δομών και της λογικής, ως σύστημα σκέψης, ως φιλοσοφία, ως πολιτιστικό συστατικό, ως τέχνη. Τα μαθηματικά ως γλώσσα των επιστημών και εργαλείο αντίληψης του κόσμου, «βασίλισσα» και «υπηρέτης» των επιστημών. Τα μαθηματικά ως εκπαιδευτικό αντικείμενο αλλά και ως μέσο υλοποίησης της μαθηματικής εκπαίδευσης. Είναι απολύτως προφανής η διαπίστωση ότι τα μαθηματικά αποτελούν το υπόβαθρο και το μέσο ανάπτυξης τόσο των θετικών επιστημών όσο και της τεχνολογίας. Όμως, παρόλο που η απόλαυση του ήλιου μπορεί να μην είναι μεγαλύτερη για όσους ασχολούνται με τις εξισώσεις του Maxwell , ούτε τα κύματα της θάλασσας να φαίνονται ωραιότερα σε όσους γνωρίζουν τον τελεστή του D' Alembert, δεν μπορεί να αποφύγει κανείς να φανταστεί, για παράδειγμα, το πώς θα ήταν η επιστήμη των υπολογιστών και η πληροφορική χωρίς την κατηγορική λογική. Τη θεωρία της σχετικότητας χωρίς την ανακάλυψη της μη ευκλείδειας γεωμετρίας, τη διαγνωστική ιατρική χωρίς τον αξονικό τομογράφο. Καινοτόμες μαθηματικές ιδέες που ανακαλύφθηκαν/ συνελήφθησαν στο παρελθόν, χωρίς κατ΄ ανάγκη να πηγάζουν από κάποιο πραγματικό πρόβλημα, αξιοποιούνται και εφαρμόζονται σε άλλες επιστημονικές περιοχές και σε διαφορετικές τεχνολογικές εφαρμογές. Η μελέτη τους στη συνέχεια, αποτελεί συχνά και το έναυσμα για νέα ερευνητική προσπάθεια που μπορεί με τη σειρά της να οδηγήσει σε νέες ανακαλύψεις, στην ανάπτυξη νέων μαθηματικών οντοτήτων, δομών, μεθόδων και εργαλείων. Η σύγχρονη δε, τάση για διεπιστημονική προσέγγιση των προβλημάτων, καθιστά τα μαθηματικά ως το κοινό μέσο έκφρασης και επικοινωνίας επιστημών και επιστημόνων.

Η επένδυση επομένως στη μαθηματική γνώση, είναι επένδυση σε μια διαχρονική, άφθαρτη, αξία που αποφέρει καρπούς. Μένει να τους αξιοποιήσετε προς την κατεύθυνση της προσωπικής, οικογενειακής αλλά και κοινωνικής προόδου και ανάπτυξης. Σε καιρούς θύελλας, όπου οι άνεμοι πνέουν ισχυροί, κάποιοι φτιάχνουν υπόγεια καταφύγια για να κρυφτούν. Εσείς επενδύστε στη μαθηματική γνώση για να κατασκευάσετε τη δική σας ανεμογεννήτρια!

Στο πνεύμα αυτό, το παρόν ειδικό τεύχος της περιοδικής έκδοσης "Open education. The Journal for open distance education and educational technology", φιλοξενεί εργασίες που παρουσιάστηκαν στην ημερίδα που διοργανώθηκε για τα μαθηματικά και την εξ αποστάσεως εκπαίδευση, κατά τις εργασίες του συνεδρίου 6th ICODL11 και εκπονήθηκαν στα πλαίσια της λειτουργίας του Προγράμματος Σπουδών του ΕΑΠ: «Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά» και στη συνέχισή του σε διδακτορική έρευνα.

*Μαρία Χατζηνικολάου*

# Α΄ΜΕΡΟΣ

*Open Education - The Journal for Open and Distance Education and Educational Technology*
*Volume 8, Number 1, 2012 Section one. © Open Education ISSN: 1791-9312*

# Μαθηματικά και εξ αποστάσεως εκπαίδευση στο Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

# Mathematics and Distance education at Hellenic Open University

**Μαρία Χατζηνικολάου**
Αν. καθηγήτρια, Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο
hadjinicolaou@eap.gr

**Περίληψη**

Ο σκοπός, η φιλοσοφία, οι αρχές, το περιεχόμενο, τα μέσα και οι μέθοδοι διδασκαλίας των Μαθηματικών, στο πλαίσιο της Ανοικτής και εξ Αποστάσεως Εκπαίδευσης (ΑεξΑΕ) παρουσιάζονται και αναλύονται στην περίπτωση του Προγράμματος Σπουδών «Μεταπτυχιακές σπουδές στα Μαθηματικά» ΜΣΜ. Από τα πρώτα οργανωμένα μεταπτυχιακά προγράμματα σπουδών Ελληνικών Πανεπιστημίων για τα μαθηματικά, προσφέρεται από το 2006 από το ΕΑΠ, με στόχο την κάλυψη των αναγκών της μαθηματικής κοινότητας για αναβάθμιση των γνώσεων και συνέχιση των σπουδών σε μεταπτυχιακό επίπεδο. Το πρόγραμμα ΜΣΜ, υπηρετεί το σκοπό αυτό προσφέροντες δύο κατευθύνσεις. Η μία οδηγεί σε ειδίκευση με έμφαση στην ιστορική εξέλιξη και διδακτική των μαθηματικών, ενώ η δεύτερη σε ειδίκευση με έμφαση στη μαθηματική προτυποποίηση και τις εφαρμογές των Μαθηματικών στις επιστήμες και την τεχνολογία.

Στα μεταπτυχιακά προγράμματα, η διδακτική των μαθηματικών εστιάζει στις θεωρίες μάθησης της γνωστικής ψυχολογίας. Το πρόγραμμα αυτό, συμπληρώνει τη διάσταση αυτή με τη συνιστώσα της ιστορικής εξέλιξης των μαθηματικών εννοιών και της φιλοσοφίας των μαθηματικών, διευρύνοντας έτσι το θεωρητικό υπόβαθρο των μεταπτυχιακών φοιτητών στα αντίστοιχα επιστημονικά πεδία, συνεισφέροντας στη βαθύτερη κατανόηση της σύλληψης, της κατασκευής, και λειτουργίας των μαθηματικών εννοιών και οντοτήτων.

Η δεύτερη κατεύθυνση του προγράμματος, ακολουθεί μια διαφορετική προσέγγιση, που απορρέει από τις σύγχρονες τάσεις και απόψεις, οι οποίες θεωρούν σημαντική την ενσωμάτωση της μαθηματικής μοντελοποίησης στη μαθηματική εκπαίδευση. Η μαθηματική μοντελοποίηση περιγράφεται ως η διαδικασία μέσω της οποίας ένα φυσικό φαινόμενο περιγράφεται με «μαθηματική γλώσσα» και διατυπώνεται ως μαθηματικό πρόβλημα. Στη συνέχεια εφαρμόζονται μαθηματικές θεωρίες, μέθοδοι και τεχνικές για να μελετηθεί και επιλυθεί αναλυτικά ή αριθμητικά. Η ενσωμάτωση αυτής της προσέγγισης στο πρόγραμμα, συνεισφέρει στην καλλιέργεια της μαθηματικής σκέψης, και της ερευνητικής αναζήτησης, αναβαθμίζει τις μαθηματικές γνώσεις των μεταπτυχιακών φοιτητών, και τους εφοδιάζει με μεθοδολογικά εργαλεία και δεξιότητες αξιοποιήσιμες εκπαιδευτικά αλλά και ερευνητικά, μέσω εκπόνησης εργασιών και διδακτορικών διατριβών.

Η μεθοδολογία και οι αρχές της Ανοικτής και εξ Αποστάσεως εκπαίδευσης εξυπηρετούν τους σκοπούς του προγράμματος, παρέχοντας το κατάλληλο πλαίσιο.

**Abstract**

The aim, the philosophical base, the context and the methodology of mathematics education within the framework of Open and Distance Learning for the Graduate Course «Studies in Mathematics», are presented and discussed.
The structure of this programme in modules, along with its learning objectives will also be described.

This Course is, in fact, one of the firstly organised graduate courses in Mathematics, offered by the Hellenic Open University since 2006, aspiring to meet the needs of the Greek mathematical community for continuum education and lifelong learning.

In general, Mathematics education focuses in the learning theories and the results of the cognitive psychology. The HOU Programme complements this approach with the prospective of the historical development and the philosophy of Mathematics. In addition, it also gives a different perspective that employs the mathematical modeling in mathematics education. The mathematical modelling is a process, through which a physical phenomenon is described in the mathematical language and formulated as a mathematical model. Then, mathematical methods and techniques are employed to study and solve analytically or numerically the problem. Finally, the evaluation of the model provides the acceptance or the improvement of the model.

Both of these perspectives integrate into a Graduate Programme on Mathematics that is addressed to Mathematicians involved in higher education, but also to those that they will be engaged in the field of Applied Mathematics and Mathematical research.

Taking into account the quantitative and qualitative indices of the programme, we will present a review of its major components within the frame of distance education.

**Keywords**

*Distance learning, mathematics education, graduate course in Mathematics, mathematical modelling.*

## Το Πρόγραμμα Σπουδών : Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά.

### 1. Θεωρητικό υπόβαθρο.

Τα τελευταία χρόνια, το θέμα της μοντελοποίησης και η χρήση παραδειγμάτων του πραγματικού κόσμου, στη μαθηματική εκπαίδευση, απασχολεί ολοένα και περισσότερο τη διεθνή μαθηματική κοινότητα αναδεικνύοντας τη μεγάλη σημασία τους. Επιστήμονες όπως οι W. Blum et al. (Blum et.al., 2002) G. Kaiser & Schwartz (Kaiser, G & Schwartz, B. 2006), θεωρούν ότι ο πραγματικός κόσμος ως πλαίσιο και η μοντελοποίηση, συνθέτουν μια απαραίτητη συνιστώσα της σε βάθος και έκτασης κατανόησης των μαθηματικών εννοιών. Η προσέγγιση αυτή διαφοροποιείται σημαντικά από την επικρατούσα σε μεγάλο βαθμό άποψη, η οποία εστιάζει αποκλειστικά στη διαδικασία της διδασκαλίας και της μάθησης. Σύμφωνα με αυτή, η εκπαίδευση βασίζεται στο «διδακτικό τρίγωνο» του μαθητή – δασκάλου - αντικειμένου μάθησης, εν προκειμένω μαθηματικά, (αλλά και οτιδήποτε άλλο), αναλύει, ως κυρίαρχο, τον ανθρώπινο παράγοντα στη διαδικασία της μάθησης, εντάσσοντας τη διδακτική των μαθηματικών στις ανθρωπιστικές επιστήμες. (Chevallard 1985/1991). Στο πρόγραμμα Μεταπτυχιακές σπουδές στα Μαθηματικά, η κλασική αυτή θεώρηση, συμπληρώνεται με την μελέτη της ιστορικής εξέλιξης των μαθηματικών εννοιών και τη φιλοσοφία των μαθηματικών.

Από την άλλη μεριά, η ένταξη της «μαθηματικής μοντελοποίησης» στη διδασκαλία των μαθηματικών, δεν θα πρέπει να εκφυλιστεί σε απλή παράθεση παραδειγμάτων από τον πραγματικό κόσμο, αλλά να αναγνωριστεί ως διαδικασία συμφυής με αυτά.

Τα μαθηματικά βασίζονται σε αντικειμενικές αρχές (αξιώματα) και, μέσω της λογικής και των αποδείξεων, ερμηνεύουν τις ιδιότητες του περιβάλλοντος φυσικού κόσμου, και επομένως είναι σε θέση να τις ανακαλύπτουν και να τις εκφράζουν. Μαθηματική μοντελοποίηση, είναι η διαδικασία της κατασκευής μιας μαθηματικής αναπαράστασης κάποιου «φυσικού» φαινομένου, με πρωταρχικό σκοπό τη σε βάθος κατανόησή του. Ξεκινά με την περιγραφή, σε μαθηματική γλώσσα, των φυσικών μηχανισμών και νόμων, που διέπουν το φαινόμενο, και έχει ως αποτέλεσμα τη διατύπωση του ως μαθηματικό πρόβλημα. Στη συνέχεια χρησιμοποιεί μαθηματικές θεωρίες, μεθόδους και τεχνικές με σκοπό τη μελέτη, την ανάλυση και την ακριβή ή προσεγγιστική επίλυση του. Τέλος, ακολουθεί ο έλεγχος της αξιοπιστίας του μοντέλου και η αποδοχή ή η βελτίωση του.

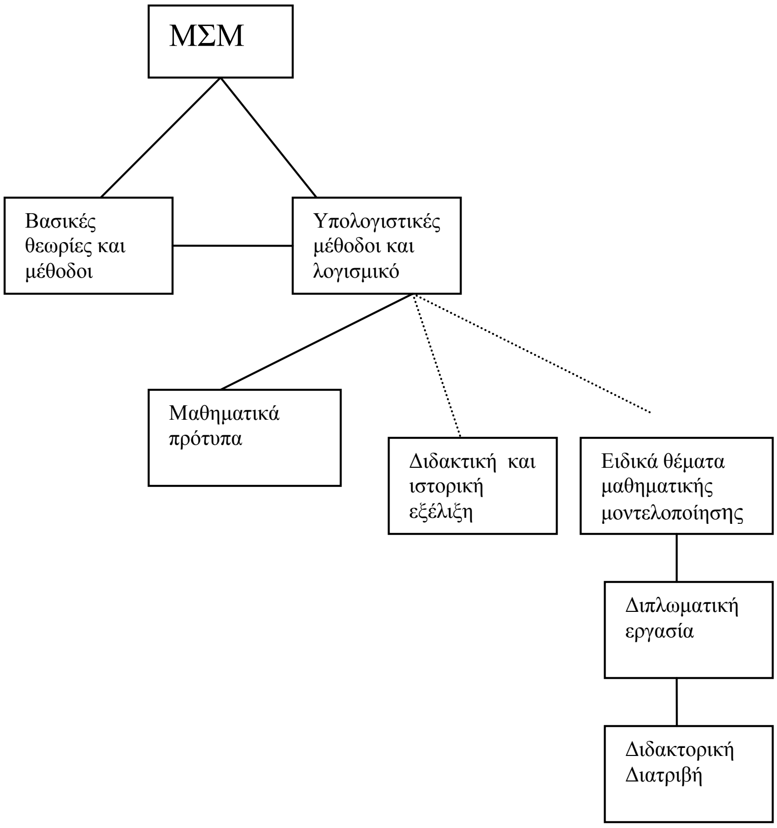
Για τις θετικές επιστήμες και την τεχνολογία είναι γνωστό ότι τα Μαθηματικά αποτελούν τη μοναδική και αναντικατάστατη γλώσσα διατύπωσης, επικοινωνίας και εφαρμογής νόμων, μεθόδων και αλγοριθμικών διαδικασιών. Εκείνο που είναι λιγότερο γνωστό, και που γίνεται συνεχώς όλο και πιο αποδεκτό, είναι ότι ακόμη και για επιστήμες που πιστεύαμε ότι δεν απαιτούν μαθηματικές γνώσεις, η μαθηματική σκέψη που καλλιεργείται, βοηθά στο να αντιμετωπιστούν τα προβλήματα σε ένα υψηλότερο και βαθύτερο επίπεδο κατανόησης μέσω της μοντελοποίησης.

Επιστήμες όπως η Φυσική, η Βιολογία, η Ιατρική, η Γεωλογία, η Χημεία, η Οικονομία, η Κοινωνιολογία, οι Πολιτικές Επιστήμες, η Γλωσσολογία, καθώς και τεχνολογικοί κλάδοι όπως η Πληροφορική, οι Τηλεπικοινωνίες, η επιστήμη των Υλικών, η Βιοτεχνολογία, ή οι τεχνολογικές εφαρμογές για την προστασία του περιβάλλοντος, αποτελούν μερικούς μόνο τομείς , πεδία εφαρμογής Μαθηματικής Μοντελοποίησης.

Και οι δυο προσεγγίσεις εξυπηρετούν τους σκοπούς του Προγράμματος Σπουδών του ΕΑΠ: «Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά». Ο σκοπός, η φιλοσοφία, οι αρχές, το περιεχόμενο και το πλαίσιο λειτουργίας του, παρουσιάζονται και αναλύονται στη συνέχεια.

## 2. Σκοπός και δομή

Σκοπός του Προγράμματος «Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά» είναι η εξειδίκευση πτυχιούχων μαθηματικών που ασχολούνται ή πρόκειται να ασχοληθούν με τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση αλλά και αυτών που θέλουν να ασχοληθούν με τις εφαρμογές των Μαθηματικών στις άλλες επιστήμες καθώς και με την μαθηματική έρευνα στις αντίστοιχες περιοχές. Για την εξυπηρέτηση του στόχου αυτού, το πρόγραμμα έχει σχεδιαστεί και διαρθρώνεται ως εξής.




Στο πρώτο έτος, κατακτώνται ενιαία οι απαραίτητες μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες που εξασφαλίζουν την απρόσκοπτη συνέχιση της μαθηματικής ενασχόλησης των μεταπτυχιακών φοιτητών. Αυτές αφορούν μαθηματικές θεωρίες, μεθόδους ανάλυσης, γραμμικής Άλγεβρας και στοχαστικών διαδικασιών, καθώς επίσης υπολογιστικές μεθόδους και μαθηματικό λογισμικό το οποίο πρόκειται να αξιοποιηθεί από τους φοιτητές είτε για την ανάπτυξη εκπαιδευτικών εφαρμογών, είτε για την επίλυση, διερεύνηση αξιολόγηση και οπτικοποίηση λύσεων των μαθηματικών προτύπων.

Στο δεύτερο έτος, οι φοιτητές εισάγονται στη μαθηματική μοντελοποίηση μέσω διαφορικών και ολοκληρωτικών τελεστών, φυσικών φαινομένων και προβλημάτων, όπως η ροή θερμότητας ή μάζας, το δυναμικό, η κυματική διάδοση. Χρησιμοποιούν θεωρήματα και μεθόδους συναρτησιακής ανάλυσης για να ελέγξουν την καλή τοποθέτηση του προβλήματος, την ύπαρξη, και ευστάθεια των λύσεων.

Ακολουθούν οι Θεματικές Ενότητες (ΘΕ) επιλογής, οι οποίες αφορούν: η μία στην περεταίρω ενασχόληση με θέματα μαθηματικής φυσικής, μηχανικής του συνεχούς μέσου, καθώς και θέματα βιοϊατρικών επιστημών, ενώ η άλλη τις θεωρίες και τα ερευνητικά αποτελέσματα της γνωσιακής επιστήμης που αφορούν στη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών. Η κατεύθυνση της ανάλυσης μαθηματικών προτύπων επιτυγχάνεται με την επιλογή της πρώτης ΘΕ από τις δυο προσφερόμενες , ενώ η κατεύθυνση της διδακτικής μέσω της δεύτερης.

Στο επόμενο έτος οι φοιτητές εκπονούν τη Διπλωματική τους εργασία σε περιοχές που άπτονται των ενδιαφερόντων τους και αποτελούν συνέχεια της θεματικής επιλογής τους. Οι διπλωματικές εκπονούνται στα πλαίσια του ειδικού εσωτερικού κανονισμού εκπόνησης διπλωματικών εργασιών του προγράμματος. Ο χαρακτήρας τους μπορεί να είναι είτε συνθετικής, κριτικής παρουσίασης είτε αμιγώς ερευνητικός.

Στους αποφοίτους του μεταπτυχιακού προγράμματος ΜΣΜ, δίνεται η δυνατότητα εκπόνησης διδακτορικής διατριβής σε θέματα μαθηματικών προτύπων, περιοχή ερευνητικής δραστηριότητας των δύο μαθηματικών μελών ΔΕΠ του ΕΑΠ.

Αναλυτικότερα , η διάρθρωση του προγράμματος έχει ως εξής. Στο Α΄ έτος, προσφέρονται οι Θεματικές Ενότητες:

1. ΒΑΣΙΚΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, ΜΣΜ50

Το περιεχόμενό της ΘΕ αφορά σε ανάλυση των θεμελιωδών εννοιών των βασικών αποδεικτικών μεθόδων καθώς και την συσχέτιση των κεντρικών θεωριών στην Μαθηματική Επιστήμη. Επίσης εισάγονται βασικές μαθηματικές τεχνικές με τις οποίες αναλύονται τα διάφορα μαθηματικά πρότυπα. Αυτό αφορά σε τεχνικές επίλυσης διαφορικών εξισώσεων, σε στοιχειώδη ασυμπτωτική ανάλυση, σε στατιστική ανάλυση δεδομένων και σε τεχνικές που απορρέουν από την θεωρία της Γραμμικής Άλγεβρας. Με την ολοκλήρωση αυτής της ΘΕ, ΜΣΜ50 ο φοιτητής θα είναι σε θέση να γνωρίζει και να κατανοεί τα βασικά θεωρήματα της Ανάλυσης και της Γραμμικής Άλγεβρας, να χρησιμοποιεί τα εργαλεία της Γραμμικής Άλγεβρας στην μοντελοποίηση φυσικών προβλημάτων, στην επίλυση γραμμικών συστημάτων διαφορικών εξισώσεων, στη μελέτη αλυσίδων Markov, στον γραμμικό προγραμματισμό, κα. Τέλος, θα είναι σε θέση να γνωρίζει βασικές έννοιες της Θεωρίας Πιθανοτήτων, να κάνει υπολογισμούς και να εφαρμόζει την Θεωρία στην μοντελοποίηση προβλημάτων. Συνοψίζοντας, η επιτυχής ολοκλήρωση της Θεματικής ενότητας ΜΣΜ50 παρέχει στο φοιτητή τη δυνατότητα να αποκτήσει γνώση και κατανόηση βασικών μαθηματικών θεωριών και να εφοδιαστεί με τις μαθηματικές γνώσεις που είναι απαραίτητες για να παρακολουθήσει τις άλλες θεματικές ενότητες του προγράμματος,

2. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΚΑΙ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ ΣΤΑ ΜΑΘΗΑΜΤΙΚΑ ΜΣΜ61

Στην ενότητα αυτή, γίνεται εισαγωγή στην κωδικοποιημένη μαθηματική γνώση και τη χρήση μαθηματικών υπολογιστικών πακέτων και τεχνολογιών πληροφόρησης για παραγωγή υλικού που εξυπηρετεί τόσο στην μαθηματική προτυποποίηση όσο και στην παραγωγή εκπαιδευτικών εφαρμογών για χρήση και υποβοήθηση της διδασκαλίας. Τα μαθησιακά αποτελέσματα αφορούν στην κατανόηση, γνώση των αρχών δημιουργίας εκπαιδευτικού λογισμικού την ανάπτυξη δεξιοτήτων στη χρήση του λογισμικού πακέτου Mathematica και στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων που προκύπτουν από τη μαθηματική μοντελοποίηση. Η επιτυχής ολοκλήρωση της ΘΕ ΜΣΜ61 επιτρέπει στο φοιτητή να χρησιμοποιεί αναλυτικές και αριθμητικές μεθόδους επίλυσης συνήθων και μερικών διαφορικών εξισώσεων. Επίσης, θα μπορεί να χρησιμοποιεί μεθόδους της διαστατικής ανάλυσης και της θεωρίας διαταραχών για τη μελέτη προβλημάτων, που είναι αδύνατη με άλλες μεθόδους. Θα μπορεί επίσης να αξιοποιεί μεθόδους της θεωρίας των μεταβολών με επίλυση προβλημάτων ακρότατων για συναρτησιακά. Συνοψίζοντας θα μπορεί να μελετάει και να επιλύει προβλήματα των φυσικών επιστημών με ποικίλες μεθόδους των εφαρμοσμένων μαθηματικών, να αξιοποιεί τα υπολογιστικά πακέτα στη διδασκαλία αλλά και στην έρευνα., να οργανώνει και να χρησιμοποιεί τη γνώση που αποκτά στην επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων αλλά και στην εκπαιδευτική διαδικασία και διδασκαλία.

Στο Β΄ έτος προσφέρεται η υποχρεωτική ενότητα:

3. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΤΥΠΑ ΣΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ. ΜΣΜ60.

Το περιεχόμενο της ΘΕ αυτής εντάσσεται στο χώρο των μαθηματικών προτύπων και δίνει έμφαση στην ανάλυση και μεθοδολογική αντιμετώπιση προτύπων από τις φυσικές επιστήμες, όπως το δυναμικό σε κατάσταση ισορροπίας, η διάχυση μιας ουσίας, η κυματική διάδοση κ.λπ. Στη μαθηματική τους διατύπωση, οι νόμοι και οι φυσικές διαδικασίες περιγράφονται με διαφορικούς η ολοκληρωτικούς τελεστές. Η επίλυση σχετικών προβλημάτων χρησιμοποιεί μεθόδους όπως ο Χωρισμός των μεταβλητών, η εύρεση της θεμελιώδους λύσης του διαφορικού τελεστή κα. Εφαρμόζονται θεωρήματα συναρτησιακής ανάλυσης για να μελετηθούν τα χαρακτηριστικά και οι ιδιότητες των τελεστών, η καλή τοποθέτηση του προβλήματος, η ύπαρξη, μοναδικότητα, και ευστάθεια της λύσης. Ο φοιτητής αποκτά δεξιότητες στη μαθηματική διατύπωση ενός φυσικού προβλήματος, στην επιλογή της κατάλληλης μεθόδου επίλυσής του και στην αξιολόγηση των αποτελεσμάτων. Συνοψίζοντας, η επιτυχής ολοκλήρωση της Θεματικής ενότητας ΜΣΜ60 παρέχει στο φοιτητή τη δυνατότητα να αντιλαμβάνεται να συνδέει και να ποσοτικοποιεί ένα φυσικό πρόβλημα με τις μαθηματικές οντότητες, όπως οι τελεστές, να οργανώνει και να χρησιμοποιεί τη γνώση που αποκτά στην επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων. Να χρησιμοποίει τις γνώσεις του και τις δεξιότητες του για περεταίρω μελέτη και έρευνα.

Η κατεύθυνση των μαθηματικών προτύπων ολοκληρώνεται με την επιλογή της ΘΕ:

4. ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΣΜ62

Το περιεχόμενο αυτής της ΘΕ αφορά σημαντικές εφαρμογές μοντελοποίησης σε ς προβλήματα μαθηματικής φυσικής, βιοϊατρικών επιστημών και μηχανικής του συνεχούς μέσου και αποτελεί το επιστέγασμα της κατεύθυνσης των μαθηματικών προτύπων. Περιγράφονται μαθηματικά οι κυρίαρχοι μηχανισμοί φυσικών και βιολογικών φαινομένων, όπως η ροή ρευστών σε πορώδη, η μη, μέσα, διαδικασίες μεταφοράς θερμότητας και μάζας, η σκέδαση ακουστικών, ελαστικών ηλεκτρομαγνητικών κ.α κυμάτων, η ροή αίματος, οι ηλεκτροχημικοί παλμοί των νεύρων, η ανάπτυξη καρκινικών όγκων.. Η μαθηματική προτυποποίηση των «φαινομένων αυτών» χρησιμοποιεί τανυστικές ποσότητες για τη διατύπωση των αντίστοιχων προβλημάτων. Στη συνέχεια εφαρμόζονται αναλυτικές μέθοδοι της που μελετήθηκαν στην ΜΣΜ60 (π.χ. χωρισμό μεταβλητών , τεχνικές επίλυσης ολοκληρωτικών εξισώσεων αλλά και νέες, μέθοδοι διαταραχών, λογισμός μεταβολών κα.) για την αντίστοιχων μαθηματικών προβλημάτων. Από την παραμετρική μελέτη εξάγονται χρήσιμα συμπεράσματα για την ευστάθεια και ακρίβεια του μοντέλου. Με τη χρήση μαθηματικών υπολογιστικών πακέτων (π.χ. Mathematica, MAtlab, κα.) επιβεβαιώνονται τα παραγόμενα αποτελέσματα, γίνονται προβλέψεις και αναπτύσσεται ή βελτιώνεται το μαθηματικό πρότυπο. Η επιλογή αυτής της Θεματικής Ενότητας παρέχει στο φοιτητή δεξιότητες για εφαρμογή μαθηματικών μεθόδων στην προτυποποίηση διεργασιών διαφόρων επιστημονικών πεδίων και προσφέρει κίνητρα για εκπόνηση έρευνας στα πεδία αυτά. Επίσης του δίνει δυνατότητα να παρουσιάζει μια επιστημονική εργασία η αποτέλεσμα σε επιστημονικό κοινό η σε λιγότερο εξειδικευμένο κοινό, δεξιότητα να επικοινωνεί με επιστήμονες και μηχανικούς διάφορων ειδικοτήτων . η εμπλοκή του στη διαδικασία της μοντελοποίησης του προσφέρει μια διαφορετική οπτική και προσέγγιση της πραγματικού κόσμου και των δυνατοτήτων του.

Εναλλακτικά στην προηγούμενη επιλογή, η κατεύθυνση της διδακτικής υπηρετείται από την επιλογή της παρακάτω ΘΕ:

5. ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΜΣΜ51

Η ΘΕ πραγματεύεται θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών, και ασχολείται με τη μελέτη τρόπων και μεθόδων διδακτικής και κατανόησης των μαθηματικών εννοιών. Μελετώνται πρόσφατες θεωρίες και ερευνητικά αποτελέσματα της γνωσιακής επιστήμης που αφορούν στη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών θέματα Ιστορίας των Μαθηματικών αναλύονται με τρόπο που να αντλούνται πληροφορίες σχετικά με την διαδικασία με την οποία αποδέχεται, κατανοεί και παράγει Μαθηματικά ο ανθρώπινος εγκέφαλος. Αυτό βοηθά στην ανάπτυξη μεθόδων μέσω των οποίων μπορεί ο μαθηματικός να μεταδώσει την μαθηματική γνώση. Ολοκληρώνοντας επιτυχώς τη ΘΕ, οι φοιτητές θα είναι σε θέση να κατανοούν εξελικτικές, διδακτικές και φιλοσοφικές ερμηνείες της γνώσης. Συγκεκριμένα, θα μπορούν να αντιλαμβάνονται τις διάφορες ψυχολογικές απόψεις που εμπλέκονται στη διδασκαλία των μαθηματικών, να κατανοούν τις θεωρίες της εξέλιξης της γνώσης των μαθηματικών εννοιών καθώς και την εφαρμογή τους στη διδασκαλία και τη μάθηση.
Θα είναι σε θέση επίσης να κατανοήσουν τη σχέση μεταξύ της λειτουργίας του εγκεφάλου και σημαντικές πτυχές της νόησης, της αλγοριθμικής σκέψης το πως αυτό εκφράζεται στο πεδίο της γνωσιακής επιστήμης και την εφαρμογή τους στη διδασκαλία. Θα μπορούν να συζητούν τα πλεονεκτήματα και τις αδυναμίες της γνωσιακής νευροεπιστήμης και της γνωσιακής ψυχολογίας όπως και τις προσεγγίσεις για τη γνωσιακή μοντελοποίηση. Στόχο επίσης αποτελεί η εξοικείωση με βασικές έννοιες που αφορούν στην έρευνα για μάθηση, την ευφυΐα και την εγκεφαλική δραστηριότητα αλλά και η καλλιέργεια δυνατοτήτων , ώστε να εξετάζουν κριτικά τις επιπτώσεις της έρευνας στο πεδίο της γνωσιακής νευροεπιστήμης σχετικά με την εφαρμογή τους στην τάξη.

Μετά την ολοκλήρωση των τεσσάρων ΘΕ, η εκπαίδευση ολοκληρώνεται με την εκπόνηση διπλωματικής εργασίας.

6. ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

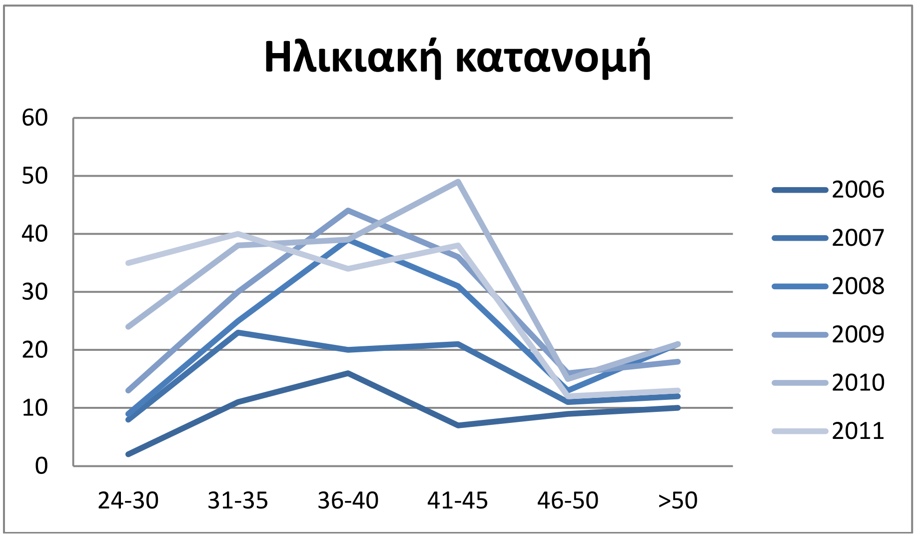
Στόχο της διπλωματικής εργασίας αποτελεί η σύνθεση των γνώσεων που απέκτησε ο φοιτητής κατά τη διάρκεια των σπουδών του. Τα θέματα των ΔΕ μπορούν να είναι θέματα μαθηματικής εκπαίδευσης ή θέματα από την Μαθηματική Επιστήμη και τις Εφαρμογές της. Στα πέντε χρόνια λειτουργίας του προγράμματος έχουν εκπονηθεί 62 ποιοτικές διπλωματικές εργασίες που αφορούν στις ως άνω περιοχές και μπορούν να διαχωριστούν σε τρείς κατηγορίες: Η πρώτη είναι τα « *Μαθηματικά και εκπαίδευση».* Οι διπλωματικές εδώ , αφορούν θεωρίες της μαθηματικής εκπαίδευσης καθώς και εφαρμογές που χρησιμοποιούνται για τη μαθηματική εκπαίδευση, για παράδειγμα ανάπτυξη mathlets κλπ. Ενδεικτικά αναφέρονται οι εργασίες με τιτλο: **Η** γνωσιακή επιστήμη για τα Μαθηματικά, Χρήση υπολογιστικών πακέτων για τη διδασκαλία των Μαθηματικών, Τα Mathlets στη Μαθηματική Εκπαίδευση, Μαθηματικά μοντέλα για τη διαδικασία της μάθησης, Ασαφή συμπερασματικά μοντέλα και εφαρμογή στην διαγνωστική αξιολόγηση των μαθηματικών. Η δεύτερη αφορά επεξεργασία θεωρητικών θεμάτων υπό τον τίτλο «*Μαθηματικές θεωρίες»*. Οι εργασίες αυτής της ενότητας πραγματεύονται θεωρητικά θέματα άλγεβρας ανάλυσης και γεωμετρίας,. Ενδεικτικοί τίτλοι διπλωματικών εργασιών που εκπονήθηκαν στην περιοχή αυτή είναι: Συναρτήσεις Green για προβλήματα δυναμικού και κυματικής διάδοσης. Μελέτη έρπουσας ροής σε αξονοσυμμετρικά συστήματα συντεταγμένων, Θεωρία γραφημάτων: χρωματισμοί - επίπεδα γραφήματος - θεωρία Ramsey Πληθαριθμικά αναλλοίωτα τυπολογικών χώρων-Μετρηκοποιήσιμοι τοπολογικοί χώροι, Η νηματοποίηση του Hopf. Τέλος η τρίτη κατηγορία αφορά στα «*Μαθηματικά και εφαρμογές»* Στο πλαίσιο αυτό μελετώνται ή αναπτύσσονται . μαθηματικά πρότυπα στις φυσικές επιστήμες, στην οικονομία, στη βιολογία, στην ιατρική, καθώς και στην τεχνολογία και στις επιστήμες του μηχανικού. Ενδεικτικοί τίτλοι σε αυτή την κατηγορία είναι: Νευρωνικά δίκτυα προσομοίωσης του ανθρώπινου εγκεφάλου Μελέτη της μη αγγειακής καρκινικής ανάπτυξης μέσω ενός πεπλατυσμένου σφαιροειδούς προτύπου. Μαθηματική προτυποποίηση μέσω προβλημάτων ελευθέρου συνόρου, Μαθηματικά μοντέλα ανάπτυξης καρκινικών όγκων, Σκέδαση ακουστικών κυμάτων από ομαλούς σκεδαστές και εφαρμογές με το υπολογιστικό πακέτο Mathematica, εισαγωγή στη στοχαστική χρηματοοικονομική ανάλυση ο τύπος των Black-Scholes, κα. Αξίζει να σημειωθεί στο σημείο αυτό, ότι μέρος των διπλωματικών εργασιών έχουν παρουσιαστεί σε συνέδρια, έχουν αξιοποιηθεί από φορείς, αλλά επίσης έχουν αποτελέσει κίνητρο και βάση περεταίρω ερευνητικής προσπάθειας. Αυτό εκφράζεται με συνέχιση, αποφοίτων του προγράμματος, για εκπόνηση διδακτορικής διατριβής στο ΕΑΠ η σε άλλα Πανεπιστήμια.

Κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της ΔΕ, οι φοιτητές εκτός από την στενή συνεργασία τους με του επιβλέποντες, για λόγους ομοιογένειας στην ποιότητα, αλλά και για λόγους διαφάνειας της εκπόνησης, καθώς και παρακολούθησης της πορείας της, καλούνται να παρουσιάσουν σε ενδιάμεση χρονική στιγμή την πρόοδο τους σε δημόσια συνεδρίαση της επιτροπής Προγράμματος σπουδών και των μεταπτυχιακών φοιτητών. Η πρακτική αυτή έχει αποδειχθεί εξαιρετικά αποτελεσματική και χρήσιμη, καθώς επιτρέπει στο φοιτητή μια πρώτη δημόσια έκθεση της δουλειάς του και τη λήψη τυχόν διορθωτικών μέτρων. Κρατά δε το φοιτητή σε επαφή με το πρόγραμμα και την ομάδα, και βοηθά στον χρονικό συντονισμό του.

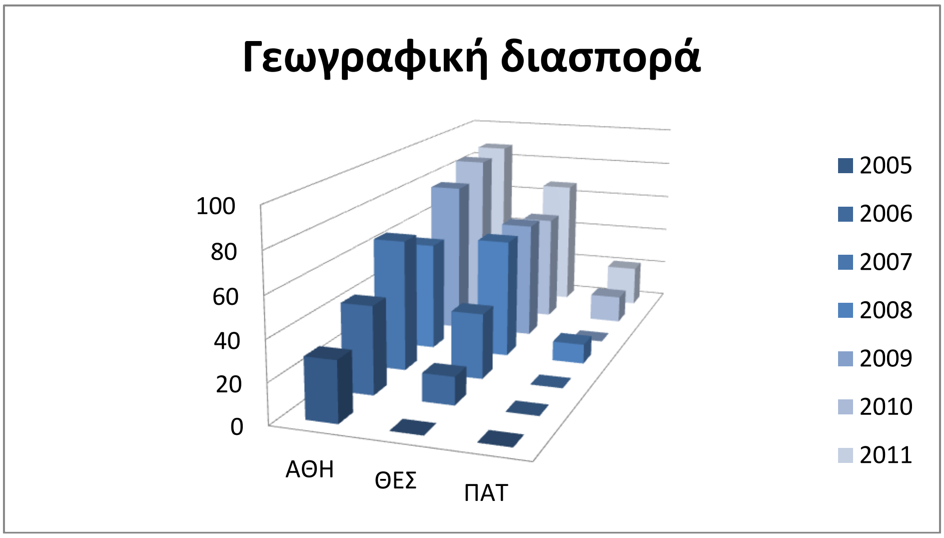
## 3. Ποσοτικά και ποιοτικά χαρακτηριστικά.

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα παρακάτω στοιχεία που αφορούν στο πρόγραμμα για τη συνολική διάρκεια που προσφέρεται (2006-σήμερα). Σύμφωνα με αυτά, υπάρχει μια σταθερά μεγάλη ζήτηση για το πρόγραμμα. Κατά μέσο όρο, η αναλογία εγγεγραμμένων προς αιτούντες είναι 1:8. Το ποσοστό εγκατάλειψης φτάνει το 16% ενώ το ποσοστό αποφοίτησης είναι 76%. Οι εγκαταλείψεις συμβαίνουν κύρια στο πρώτο έτος σπουδών, ενώ όσοι συνεχίζουν αποφοιτούν επιτυγχάνοντας στις εξετάσεις, είτε κανονικά, είτε επαναλαμβάνοντας την ενότητα. Το γεγονός αυτό οφείλεται στην αποφασιστικότητα, αυτοδέσμευση και επιμονή των φοιτητών την προσήλωση στο στόχο τους αλλά και στην καθοριστική υποστήριξη τους, από τους Συμβούλους καθηγητές τους, όπως και οι ίδιοι οι φοιτητές αναφέρουν.

Σχετικά με την ηλικιακή κατανομή των μεταπτυχιακών φοιτητών, και όπως απεικονίζεται και στο διάγραμμα, το μεγαλύτερο πλήθος των φοιτητών ανήκει στην ηλικιακή κατηγορία των 30-45 ετών, με ευχάριστες παρουσίες σε μικρότερες και μεγαλύτερες τιμές, με ακρότατα τις ηλικίες των 24 και 49 ετών.

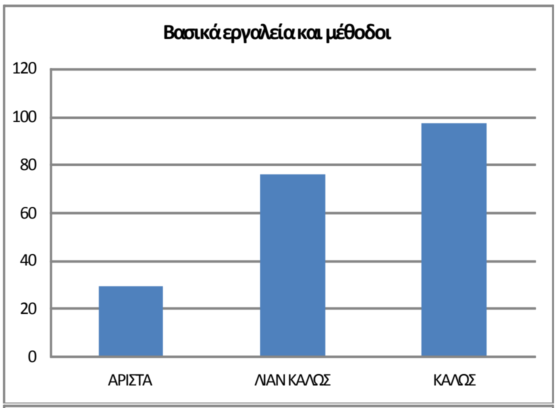


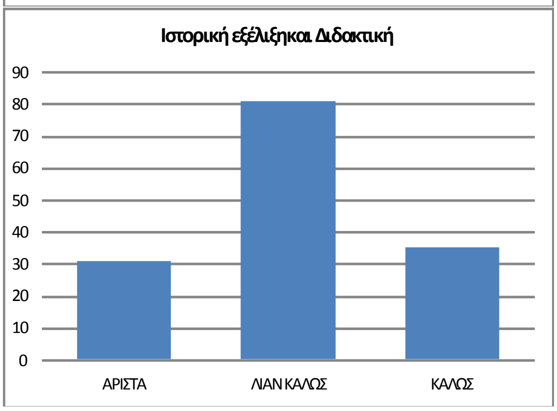

Η κατανομή των φοιτητών στα τμήματα με έδρα τα μεγάλα αστικά κέντρα, παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα και είναι ανάλογη του πληθυσμού των περιοχών αυτών. Αξίζει να σημειωθει ότι σε αυτά εντάσσονται φοιτητές από όλη την Ελλάδα.

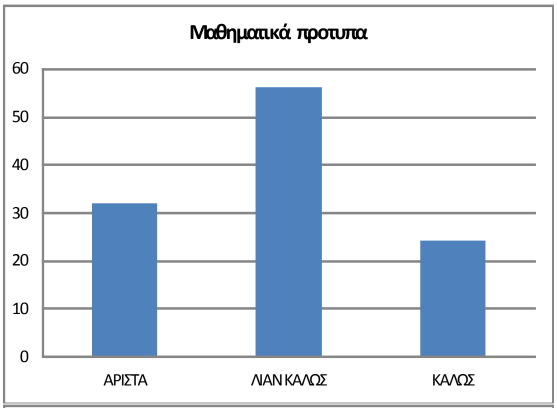


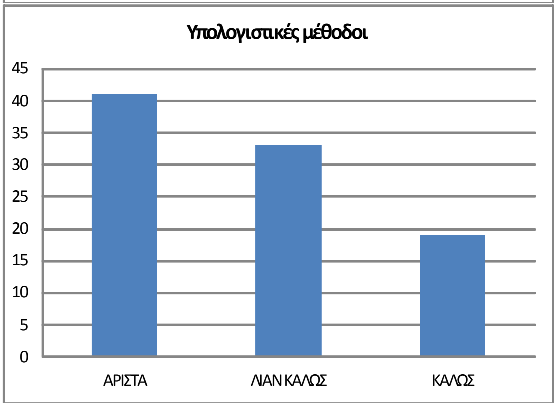

Με δεδομένο τον κανονισμό του ΕΑΠ, που δεν επιτρεπει την παρακολούθηση πάνω από δύο ΘΕ το χρόνο, αλλά και το φόρτο μελέτης και εργασίας που απαιτούν οι ΘΕ, καθώς και τον προσωπικό χρόνο των φοιτητών, προκύπτει από τα διαθέσιμα στοιχεία, ότι το μεγαλύτρο μέρος των φοιτητών ολοκληρώνει τις σπουδές του σε τέσσερα έτη ενώ δεν ξεπερναει τα έξι.

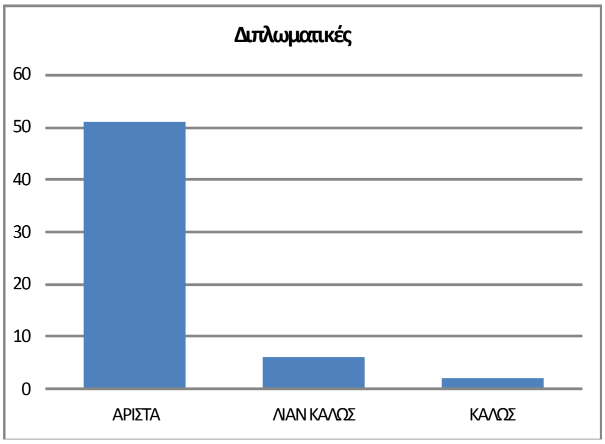

Οι επιδόσεις των φοιτητών κατά τις εξετάσεις φαίνονται παρακάτω. Παρατηρείται ότι στην πρώτη Θεματική Ενότητα που έχει ως στόχο την εμβάθυνση σε θεμελιώδεις μαθηματικές έννοιες και είναι γενική, μεγάλο ποσοστό των επιδόσεων των φοιτητών ανήκουν στην κατηγορία «καλώς» και «λίαν καλώς», γεγονός που ερμηνεύεται και ως προσαρμογή στο σύστημα της ΑεξΑΕ. Στις επόμενες Θεματικές Ενότητες που ο βαθμός εξοικείωσης με το σύστημα αυξάνει και το περιεχόμενο εξειδικεύεται, οι επιδόσεις μετατοπίζονται σταδιακά (ακολουθώντας τη χρονική σειρά επιλογής) στην κλίμακα «λίαν καλώς» και «άριστα», για να κορυφωθεί στη ΘΕ των Διπλωματικών εργασιών με ποσοστό 86%, στην κλίμακα του «άριστα», γεγονός που αντανακλά την υψηλή ποιότητα και το επίπεδο των διπλωματικών εργασιών, που τεκμηριώνεται με σχετικές δημοσιεύσεις και τη συνέχιση της έρευνας.






Η ομάδα διδασκόντων στο πρόγραμμα αποτελείται από δύο μέλη ΔΕΠ, του ΕΑΠ με αντικείμενο Γενικά Μαθηματικά και Μαθηματικά πρότυπα στις Φυσικές Επιστήμες αντίστοιχα, και έξι έως οκτώ μέλη Συνεργαζόμενου Εκπαιδευτικού Προσωπικού (Σ.Ε.Π.). που είναι μέλη ΔΕΠ άλλων Πανεπιστημίων. Συναντώνται συχνά στα πλαίσια των συνεδριάσεων της επιτροπής προγράμματος σπουδών, διαμορφώνοντας κοινή αντίληψη για το περιεχόμενο και το επίπεδο του προγράμματος. Η ομοιογένεια των απόψεων και στάσεων τους έχει ως αποτέλεσμα την καλή λειτουργία του προγράμματος, την υψηλή ποιότητα των σπουδών, ενώ παράλληλα, παρέχει στους φοιτητές εμπιστοσύνη στο θεσμό και αίσθημα δικαίου. Μεριμνούν διαρκώς για την ποιότητα της παρεχόμενης εκπαίδευσης, σχεδιάζοντας και διατυπώνοντας προτάσεις που αφορούν στη βελτίωση των συνιστωσών του προγράμματος,. Αναφορικά, έχουν υποβληθεί για παράδειγμα προτάσεις συμπλήρωσης υλικού, ή δημιουργίας νέου, (έντυπου και εναλλακτικού, όπως βιντεοσκοπημένες διαλέξεις καταξιωμένων επιστημόνων, webcast κ.λπ.), προτάσεις που αφορούν παράλληλες δραστηριότητες, όπως την ίδρυση μαθηματικού σπουδαστηρίου και εργαστηρίου μαθηματικού λογισμικού.

Ο συμβουλευτικός και καθοδηγητικός ρόλος των διδασκόντων, που δεν εξαντλείται στην τυπική άσκηση των καθηκόντων τους, έχει σημαντική θετική επίδραση στο βαθμό εμπλοκής των φοιτητών στο πρόγραμμα, στην ποιότητα των γνώσεών, τη θετική στάση τους για τις σπουδές τους και την έρευνα, τις δεξιότητες που αναπτύσσουν, γεγονός που αντικατοπτρίζεται και στις επιδόσεις τους.

Το υλικό που αναπτύσσεται διατίθεται στους φοιτητές κατά την έναρξη αλλά και κατά τη διάρκεια των σπουδών τους αποτελείται από σύγχρονα συγγράμματα στην Ελληνική και Αγγλική γλώσσα, και συμπληρωματικό ψηφιακό υλικό και υλικό που δίνεται αξιοποιώντας ηλεκτρονικές πηγές. Συνεισφέρει ουσιαστικά στην ευρεία και σφαιρική κάλυψη των διδακτικών αντικειμένων, την σε βάθος κατανόηση τους καθώς και στη διευκρίνιση ζητημάτων που χρειάζονται κατά περίπτωση περισσότερη ανάλυση και επεξεργασία.

**4. Συζήτηση-Συμπεράσματα**

Το Πρόγραμμα Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά εκπληρώνει σε πολύ υψηλό βαθμό τους κεντρικούς του στόχους, καθώς ένα μεγάλο μέρος της μαθηματικής κοινότητας έχει ευαισθητοποιηθεί και εκδηλώσει το ενδιαφέρον της για μεταπτυχιακές σπουδές, εκφράζοντας την αναγκαιότητα για δια βίου μάθηση. Τα παραπάνω αντικατοπτρίζονται στην αναλογία εισερχομένων φοιτητών προς τους αιτούντες, που είναι (1:8) κατά μέσο όρο, όλα τα χρόνια. Το Πρόγραμμα Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά, συμβαδίζει με τα αντίστοιχα σύγχρονα προγραμμάτων ελληνικών και ξένων Ανοικτών Πανεπιστημίων ως προς το περιεχόμενο και τους στόχους. Είναι διαρθρωμένο ώστε να προσφέρει ειδίκευση σε δύο κατευθύνσεις. Η μία οδηγεί στην κατεύθυνση «ιστορική εξέλιξη και διδακτική των μαθηματικών», ενώ η δεύτερη σε ειδίκευση με έμφαση στη μαθηματική προτυποποίησης και τις εφαρμογές των Μαθηματικών στις επιστήμες και την τεχνολογία. Η δεύτερη κατεύθυνση χαρακτηρίζεται ως νεωτερική, καθώς δεν συναντάται σε ανάλογα προγράμματα παρόλο που σήμερα, θεωρείται πια σημαντική. Προσφέρεται έτσι ένα ολοκληρωμένο πρόγραμμα σπουδών που απευθύνεται στους πτυχιούχους μαθηματικούς που ασχολούνται ή πρόκειται να ασχοληθούν με τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση αλλά και σε αυτούς που θέλουν αν ασχοληθούν με τις εφαρμογές των Μαθηματικών στις θετικές, τεχνολογικές, βιοϊατρικές και άλλες επιστήμες καθώς και την μαθηματική έρευνα σε αυτές.

Η ανάγκη χρήσης οργανωμένης μαθηματικής σκέψης αυξάνεται παράλληλα με την αύξηση της ανθρώπινης γνώσης σε κάθε επιστημονική περιοχή. Η εμβάθυνση του προβλήματος κατά τη μελέτη ενός φαινομένου, απαιτεί συχνά την ανάπτυξη πολύπλοκων διαδικασιών, οι οποίες οδηγούν σε συγκεκριμένα συμπεράσματα. Η ανάγκη χρήσης μαθηματικών τεχνικών γίνεται όλο και περισσότερο απαραίτητη, τόσο στην ανάπτυξη αυτών των διαδικασιών όσο και την περιγραφή και διατύπωση των σχετικών συμπερασμάτων. Αυτό οδηγεί σε αυξημένες απαιτήσεις για τη δημιουργία νέων μαθηματικών μεθόδων, δηλαδή σε απαιτήσεις για «όλο και περισσότερα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά». Το πρόγραμμα φιλοδοξεί να συνεισφέρει στην κατεύθυνση αυτή.

Οι φοιτητές δείχνουν μεγάλο ενδιαφέρον και ενθουσιασμό για τις σπουδές τους, που διατηρείται και ενισχύεται τις περισσότερες φορές με την πρόοδο στις Θ.Ε. Η μέση φοιτητική επίδοση είναι ικανοποιητική τόσο στις γραπτές εργασίες όσο και στις τελικές εξετάσεις, όπως προαναφέρθηκε. Η εγκατάλειψη του προγράμματος από τους φοιτητές διατηρείται σε χαμηλά επίπεδα και συμβαίνει κατά κύριο λόγο στην αρχή της φοίτησης. Ένα υψηλό ποσοστό των φοιτητών συμμετέχει ανελλιπώς στις ομαδικές συμβουλευτικές συναντήσεις διανύοντας συχνά μεγάλες αποστάσεις. Καθ΄ όλη τη διάρκεια των σπουδών επικοινωνούν με τους ΣΕΠ αλλά και μεταξύ τους συνεργαζόμενοι σε ομάδες.

Μείζονος σημασίας παράγοντα, στα πλαίσια αυτά, αποτελεί η ουσιαστική επικοινωνία διδάσκοντα και φοιτητή, η οποία αντισταθμίζει τα εμπόδια που δημιουργούν η μεταξύ τους γεωγραφική απόσταση και η συχνά ασύγχρονη αλληλεπίδραση. Η προσωποποιημένη επικοινωνία έχει αποδώσει σπουδαίους καρπούς και έχει αποδειχθεί καθοριστική για την προσέλκυση του ενδιαφέροντος για το πρόγραμμα, την εμπλοκή και την παραμονή των εξ αποστάσεως φοιτητών σε αυτό, σημειώνοντας όπως προαναφέρθηκε μικρά ποσοστά εγκατάλειψης, κι αυτά κύρια για λόγους έλλειψης διαθέσιμου χρόνου για μελέτη. Τα αντίστοιχα δεδομένα, καταδεικνύουν ότι όσο πιο προσωπική είναι η επικοινωνία και καθοδήγηση, υποστήριξη του φοιτητή, τόσο αυτός τείνει να εμπλέκεται στις εκπαιδευτική διαδικασία ανταποκρινόμενος προς το ενδιαφέρον του ΣΕΠ. Μεγάλο ποσοστό, ενδιαφέρεται να συνεχίσει να ασχολείται με τα μαθηματικά και να διατηρήσει τη σχέση του με το ΕΑΠ και μετά την αποφοίτησή του ζητώντας ενημέρωση και συμμετέχοντας σε επιστημονικές δραστηριότητες (π.χ συνέδρια ημερίδες κ.λπ.) ή ακόμη εκπονώντας Διδακτορικό. Έξι απόφοιτοι του προγράμματος συνεχίζουν για διδακτορικές σπουδές στο ΕΑΠ ή και σε άλλα Πανεπιστήμια. Τα θέματα με τα οποία ασχολούνται οι διδακτορικοί φοιτητές του ΕΑΠ αφορούν σε Μαθηματική προτυποποίηση της ροής πλάσματος γύρω από ερυθρά αιμοσφαίρια μέσω της ροής Stokes, της ανάπτυξης καρκινικών όγκων, της σκέδασης ακουστικών κυμάτων, της ηλεκτρομαγνητικής λειτουργίας του εγκεφάλου και απεικονίσεων του. Οι απόφοιτοι του προγράμματος, αναγνωρίζουν την ευεργετική επίδραση που είχε το Πρόγραμμα ΜΣΜ στην αναβάθμιση των γνώσεων τους, στην καλλιέργεια της μαθηματικής τους σκέψης, στη στάση τους απέναντι στο αντικείμενο των μαθηματικών τη διδασκαλία του αλλά και στους μαθητές τους, στη διάθεση για έρευνα, και στην ερευνητική μεθοδολογία και πράξη. Το πλαίσιο της Ανοικτής και Εξ Αποστάσεως εκπαίδευσης, παρέχει τη δυνατότητα στους φοιτητές για αυτενέργεια, ασύγχρονη εκπαίδευση προσαρμοσμένη στις προσωπικές ανάγκες και χρονικές απαιτήσεις του κάθε μεταπτυχιακού φοιτητή, καθώς και ουσιαστική προσωπική συμβουλευτική υποστήριξη για συντονισμό, κατανόηση, ανάπτυξη δεξιοτήτων και καλλιέργεια ερευνητικών στάσεων.

## Βιβλιογραφία

Βεργίδης, Δ., Λιοναράκης, Α., Λυκουργιώτης, Α., Μακράκης, Β., Ματραλής, Χ., (1998). *Ανοικτή και εξ αποστάσεως εκπαίδευση,* ΕΑΠ.

Δάσιος, Γ., 2001. *Δέκα Διαλέξεις Μαθηματικών.* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης

Τραχανάς, Σ., (2004) MATHEMATICA και εφαρμογές. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης

Alladin, I., (1992). International co-operation in higher education: the globalization of universities. *Higher Education in Europe, XVII (4),* pp. 4-13

Ammari,, H. (2009). *Mathematical modeling in Biomedical Imaging.* Lecture Notes in Mathematics, Springer

Blum, W. et al. (2002). Applications and Modelling in Mathemaitics Education. *Journal for Mathematik-Didaktik, 23, 262-280*

Chevallard , Y., 1985/1991. *La transposition didactique :* Grenoble: Pensee sauvages.

Courant, R.,Hilbert,D.,(1989) (Metods of Mathematical Physics. John Wiley& sons

Eves, H., (1990) *Foundations and foundamental Concepts of Mathematics.* Dover

Fiedman, A., (2004) *Free boundary problems arising in tumor models.* Rend. Mat. Acc. Lincei s.9, v 15:161-168.

Jones, D.S., Plank, M. J., Sleeman B.D., *Differential equations and Mathematical Biology.*Chapman &Hall/CRS

Kaiser, G & Schwartz, B. (2006). Mathematical modelling as bridge between school and university. *Zentrlalblatt fur Didaktik der Mathematik, 38(2), 196-208*

Logan ,J.D, (2005). *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά.* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης

Sapiro S., (1997) *Philosophy of Mathematics,* Oxford University Press.

.

# 1η ΕΝΟΤΗΤΑ: «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ»

# Σύγχρονες θεωρήσεις και εφαρμογές στη Διδακτική των Μαθηματικών στα πλαίσια της Ανοικτής και εξ Αποστάσεως εκπαίδευσης

# Contemporary considerations and applications in Mathematics Didactics in the framework of Open Distance Education

**Παναγιώτης Βλάμος**
Ιόνιο Πανεπιστήμιο,
Επίκουρος Καθηγητής
vlamos@ionio.gr

**Περίληψη**
Η αλληλεπίδραση και ο συνδυασμός της ιστορικής εξέλιξης μαθηματικών κλάδων, της ανάπτυξης φιλοσοφικών ρευμάτων και της εφαρμογής μεθόδων διδακτικής που προέρχονται από σύγχρονες θεωρήσεις της γνωσιακής επιστήμης, συνιστούν την κατεύθυνση της «Ιστορικής εξέλιξης και διδακτικής των Μαθηματικών» του Μεταπτυχιακού προγράμματος Σπουδών στα Μαθηματικά του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου. Αναλύονται οι άξονες και υποενότητες της κατεύθυνσης, ο τρόπος ανάπτυξής τους, οι απαιτούμενες εργασίες και οι παραγόμενες διπλωματικές εργασίες με τους αντίστοιχους θεματικούς άξονες.

**Abstract**
The interaction of the historical evolution of Mathematics together with the birth of philosophical aspects applied through methods of cognitive knowledge towards educational practices, consists a challenging course in the program “Graduate Studies in Mathematics” of the Hellenic Open University. The main directions of the course and its presentation are examined together with the MSc theses accomplished in this framework.

**Keywords**
*cognitive knowledge, didactics, mathematical modelling, philosophy, problem solving, graduate studies in HOU.*

## Οι βασικοί άξονες και οι υποενότητες της κατεύθυνσης της «Ιστορικής εξέλιξης και Διδακτικής των Μαθηματικών» στο πρόγραμμα ΜΣΜ του ΕΑΠ

Η θεματική ενότητα «Ιστορική εξέλιξη και Διδακτική των Μαθηματικών» του προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών του ΕΑΠ, απετέλεσε εξ αρχής ένα φιλόδοξο πρόγραμμα συγκερασμού:

1) της εξέλιξης μαθηματικών εννοιών
2) της γέννησης φιλοσοφικών ρευμάτων
3) της γνωσιακής επιστήμης στην σύγχρονη θεώρησή της
4) της διδακτικής των μαθηματικών και
5) της εκπαιδευτικής πρακτικής

Η αλληλεπίδραση των πέντε αυτών αξόνων και η μελέτη τους όχι μόνο μεμονωμένα, αλλά και με διαφορετικούς συσχετισμούς οδηγεί συνήθως στην ανανέωση του προγραμματισμού ανά έτος και στην ανάπτυξη νέων εργασιών.

Η ενότητα απαρτίζεται από τρεις υποενότητες.

- Την υποενότητα, «Θεμέλια και Θεμελιώδεις Έννοιες των Μαθηματικών, Φιλοσοφία των Μαθηματικών», με βασικά διδακτικά βοηθήματα τα βιβλία:
    1. Howard Eves, Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics.
    2. R. Wilder, Εξέλιξη των Μαθηματικών Εννοιών.
    3. S. Shapiro, Σκέψεις για τα Μαθηματικά: Η Φιλοσοφία των Μαθηματικών.
- Την υποενότητα, «Γνωστικές επιστήμες και Μαθηματικά», με βασικό περιεχόμενο τις εργασίες:
    1. Rafael Núñez and George Lakoff, The Cognitive Foundations of Mathematics: The Role of Conceptual Metaphor, Handbook of Mathematical Cognition.
    2. Rafael E. Núñez, Conceptual Metaphor and the Cognitive Foundations of Mathematics: Actual Infinity and Human Imagination
    3. Rafael E. Núñez, Embodied Cognition and The Nature of Mathematics
    4. Christophe Heintz, Psychologism and the cognitive foundations of mathematics.
    5. George Lakoff and Rafael E. Núñez, Reviews and criticisms about the book, Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics Into Being.
- Την υποενότητα, «Μαθηματική Παιδεία», με βασικό διδακτικό βοήθημα το βιβλίο:

    D. Tall. MATHEMATICAL GROWTH: from Child to Mathematician. Journeys through Three Worlds of Mathematics,

Το διδακτικό υλικό που προτείνεται είναι δύο ειδών: το βασικό διδακτικό υλικό που αποτελεί το κύριο υλικό μελέτης και το εναλλακτικό διδακτικό υλικό. Εκτός από το προτεινόμενο υλικό που δίνεται, οι φοιτητές προτείνεται να ερευνούν σε βιβλιοθήκες και το διαδίκτυο για σχετικές πηγές (βιβλία, εργασίες, κ.λπ.), με τις οποίες θα εμπλουτίσουν τις εργασίες τους.

Η ιστορική εξέλιξη βασικών μαθηματικών κλάδων εμφανίζεται στο βιβλίο του Eves: ένα αμιγώς μαθηματικό βιβλίο, ιδιαίτερα προσιτό σε μαθηματικούς που εντοπίζει σημαντικές εξελικτικές αλλαγές, καταλήγοντας στις τρεις κρίσεις των Μαθηματικών. Η απήχηση του βιβλίου είναι άμεση, το περιεχόμενο αφομοιώνεται από τους μεταπτυχιακούς φοιτητές, ενώ φαίνεται να βοηθά στη συγκρότηση των ήδη υπαρχουσών γνώσεών τους.

Η γέννηση και η πορεία των φιλοσοφικών ρευμάτων στα Μαθηματικά «εκπροσωπείται» από το βιβλίο του Shapiro. Η γραφή του βιβλίου είναι διαλεκτική δημιουργώντας συχνά «ασταθές» αντικείμενο μελέτης, το οποίο είναι ασύμβατο με τη συνήθη πρόσληψη γνώσης στην πλειονότητα των μαθηματικών. Η διαλεκτική αντιμετώπιση των τριών φιλοσοφικών ρευμάτων που αναπτύχθηκαν στα Μαθηματικά, όπως και «παραλλαγών» τους παρουσιάζεται έξυπνα από τον Shapiro, ως «διαμάχη» των εκπροσώπων τους μέσα από γόνιμες αμφισβητήσεις ή νέες ιδέες.

Open Education - The Journal for Open and Distance Education and Educational Technology
Volume 8, Number 1, 2012 Section one. © Open Education ISSN: 1791-9312

Η δυσκολία της ενότητας κορυφώνεται με την ένταξη σε σύγχρονες θεωρήσεις της γνωσιακής επιστήμης, οι οποίες εκφράζονται από το βιβλίο των Lakoff και Núñez, τα θετικά και αρνητικά σχόλια που προκάλεσε και μία σειρά εργασιών τους σχετικά με τη χρήση των μεταφορών. Το βιβλίο των Lakoff και Núñez αποτελεί μία προκλητική θεώρηση του τρόπου με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε και μαθαίνουμε Μαθηματικά, καθώς κρατά αποστάσεις τόσο από τη Νευροφυσιολογία όσο και από τη στερεότυπη Διδακτική. Διατυπώνει την άποψη ότι τα Μαθηματικά υπάρχουν μέσα μας (ενσώματη γνώση) και τα αντιλαμβανόμαστε μέσω μεταφορών. Η σειρά των εργασιών προσπαθεί να θεμελιώσει αυτή την άποψη μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα με σημαντικότερο αυτό της Βασικής Μεταφοράς του Απείρου.

Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζουν, οι εκ διαμέτρου αντίθετες κριτικές του βιβλίου τους από τη μαθηματική κοινότητα. Άλλοι μαθηματικοί τονίζουν ότι καλύπτεται ένα μεγάλο κενό της γνωσιακής επιστήμης ανάμεσα στη φυσιολογία και την εφαρμοσμένη διδακτική με ελπιδοφόρα αποτελέσματα στην εκπαιδευτική πράξη.

Πολλοί επίσης μαθηματικοί εντοπίζουν υπάρχουσες αδυναμίες, ασάφειες και ασυνέπειες που είναι φυσικό να πηγάζουν από τη διαπραγμάτευση ενός ψυχολόγου και ενός γλωσσολόγου της «προέλευσης» των Μαθηματικών. Είναι φυσικό βέβαια να προκαλούνται στα πλαίσια της ενότητας εξαιρετικά ζητήματα συζήτησης αλλά και πρακτικής εφαρμογής των θεμάτων που δημιουργεί το σύνολο αυτού του θεματικού άξονα.

Μια σύγχρονη θεώρηση της διδακτικής των Μαθηματικών παρουσιάζεται στο βιβλίο του Tall με τους τρεις κόσμους των Μαθηματικών. Η ίδια η μέθοδος γραφής του βιβλίου είναι υπόδειγμα διδακτικής μεθοδολογίας. Το βιβλίο «εκτέθηκε» ημιτελές στο διαδίκτυο, ανοικτό σε παρατηρήσεις από τους αναγνώστες του. Οι μεταπτυχιακοί φοιτητές με ανακούφιση επιστρέφουν σε ενδιαφέροντα και βατά θέματα διδακτικής, ενώ με τις εργασίες τους δημιουργούν δικές τους εκπαιδευτικές πρακτικές.

**Η ανάπτυξη της κατεύθυνσης της «Ιστορικής εξέλιξης και Διδακτικής των Μαθηματικών» στο πρόγραμμα ΜΣΜ του ΕΑΠ**

Τα πρώτα έτη του μεταπτυχιακού προγράμματος η ανάπτυξη της ενότητας γινόταν σειριακά και οι πέντε άξονες παρουσιάζονταν σχεδόν ανεξάρτητοι. Επιπλέον, τα θέματα διδακτικής εισάγονταν στο τέλος με αποτέλεσμα να υστερεί η συνδυαστική εφαρμογή των υποενοτήτων της κατεύθυνσης.

Κατόπιν, το πρόγραμμα αναδιαμορφώθηκε ακόμα δύο φορές ενώνοντας μέρη του υλικού και διαμορφώνοντας νέες πιο προκλητικές συνθήκες για τους μεταπτυχιακούς φοιτητές. Οι αναδιαμορφώσεις λειτούργησαν θετικά παρά την άνοδο της δυσκολίας στη θεματική ενότητα, ενώ προκάλεσαν νέα θέματα διπλωματικών εργασιών.

Η ανάπτυξη της ενότητας δεν παρέμεινε θεωρητική, αλλά είναι εμπλουτισμένη με πολλές μελέτες-περιπτώσεις όπως :

- Όσες αφορούν την εξέλιξη μαθηματικών εννοιών, για παράδειγμα ο μέγιστος κοινός διαιρέτης που αρχικά παρουσιάστηκε με τον αλγόριθμο της ανθυφαίρεσης στα Στοιχεία του Ευκλείδη για την εύρεση κοινού μέτρου ομοειδών μεγεθών, ο οποίος τελικά διδάσκεται ως δεξιότητα, με την ανάλυση σε πρώτους παράγοντες όπως εξελίχθηκε πολύ αργότερα στη Θεωρία Αριθμών.
- Όσες αφορούν στην καθιέρωση στερεοτύπων: «οι μιγαδικοί δημιουργήθηκαν για την επίλυση της εξίσωσης $x^2+1=0$» , «η παράγωγος δημιουργήθηκε για την εύρεση της κλίσης της εφαπτομένης».

- Όσες είναι εκτενείς και δίνονται και ως εργασίες , όπως «η περιπέτεια της Γεωμετρίας», η οποία έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον ως προς την αφετηρία και τη διαδρομή παρουσίασης.

Οι σύγχρονες θεωρήσεις της διδακτικής οδηγούν στα επίπεδα γνώσης, τα οποία έχουν εκφραστεί όχι μόνο από τον Tall με διαφορετικές ταξινομήσεις και ονομασίες.

Οι προηγούμενοι άξονες πλαισιώνονται και από το βιβλίο του Wilder, το οποίο εισάγεται στο τέλος της ενότητας: ένα απλό εγχειρίδιο που τονίζει τα Μαθηματικά ως πολιτισμικό και κοινωνικό αγαθό, μια συνιστώσα που πρέπει να λαμβάνεται υπόψη για την μελέτη της εξελικτικής τους πορείας.

**Οι εργασίες της κατεύθυνσης**

Ουσιαστικά οι εργασίες της ενότητας, δεν αποτελούν εργασίες φοιτητών, άλλα μικρά άρθρα, κάποια από τα οποία θα μπορούσαν να δημοσιευθούν ως εργασίες αναφοράς (review papers). Μέσα σε δέκα το πολύ σελίδες πρέπει να ακολουθηθεί μία συγκεκριμένη διαδρομή σκέψης που να φανερώνεται από τη δομή και να εκπροσωπεί ατομικά τον συγγραφέα της εργασίας.

Τονίζονται τα εξής βασικά χαρακτηριστικά κάθε εργασίας: η αποτύπωση των προσωπικών επιλογών κάθε συγγραφέα, τεκμηριωμένος κριτικός σχολιασμός των θέσεων που παρουσιάζονται και η εισαγωγή αναφορών για την ανάπτυξη απόψεων και επιχειρημάτων ενθαρρύνοντας την εύρεση νέας βιβλιογραφίας.

Δίνονται υποδείγματα άρθρων και δομής εργασιών καθώς και μέθοδοι αναζήτησης βιβλιογραφίας από βάσεις δεδομένων με τη χρήση κατάλληλων μεταδεδομένων (προτύπου Dublin Core).

Όσον αφορά στην εκπαιδευτική πράξη οι μεταπτυχιακοί φοιτητές παρουσιάζουν δικές τους προτάσεις σχεδίων μαθήματος εφαρμόζοντας όλα όσα έχουν αποκομίσει από τους προηγούμενους άξονες στην συνήθως ήδη μεγάλη εμπειρία τους στη διδασκαλία.

Μικρότερης έκτασης θεματικοί άξονες που συζητούνται είναι η χρήση νέων τεχνολογιών και παραγώγων τους, όπως διαδραστικοί πίνακες, webcasts, mathlets, mathML στη διδασκαλία των Μαθηματικών της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, καθώς και η εισαγωγή της μαθηματικής προτυποποίησης στις διάφορες βαθμίδες εκπαίδευσης.

**Οι διπλωματικές εργασίες της κατεύθυνσης**

Η πολύπλευρη ανάπτυξη της ενότητας δίνει τη δυνατότητα της συνδιαμόρφωσης θεμάτων διπλωματικών εργασιών μαζί με τους μεταπτυχιακούς φοιτητές, αλλά και την αυτόνομη πρόταση εκ μέρους τους. Οι τρεις βασικοί θεματικοί άξονες των διπλωματικών εργασιών της κατεύθυνσης είναι οι ακόλουθοι.

**Εφαρμογές Μαθηματικής Προτυποποίησης στην Έρευνα**

Στόχος του θέματος αυτού είναι η εισαγωγή στη μαθηματική προτυποποίηση και επίλυση προβλημάτων, όπως:

- Αναγνώριση προβλημάτων σε πληθώρα συστημάτων.
- Αναγνώριση σχετικών πληροφοριών και περιορισμών.
- Αναπαράσταση εναλλακτικών λύσεων ή τρόπων λύσης.
- Επιλογή μοντέλων και προτυποποίηση.
- Έλεγχος και αξιολόγηση λύσεων.
- Επικοινωνία αποτελεσμάτων.

Βασικά περιεχόμενα της διπλωματικής εργασίας αποτελούν η παροχή ολοκληρωμένης γνώσης με ενιαία μεθοδολογική προσέγγιση των βασικών εργαλείων της μαθηματικής προτυποποίησης συνεχών και διακριτών συστημάτων και διαδικασιών, μικροσκοπικών και μακροσκοπικών, ντετερμινιστικών και στοχαστικών, και η δια παραδειγμάτων εμπέδωση των δυνατοτήτων της προτυποποίησης σε πληθώρα συστημάτων, που καλύπτουν το ευρύτατο φάσμα των τεχνολογιών της ζωής (περιβάλλον, ποιότητα ζωής και υπηρεσιών, βιολογία, βιοτεχνολογία και βιοϊατρική), της κοινωνίας της πληροφορίας (πληροφορική, επεξεργασία χωροχρονικών σημάτων, επικοινωνίες) των υλικών και άλλων κλάδων.

**Εφαρμογές Μαθηματικής Προτυποποίησης στην Εκπαίδευση**

Η συγκεκριμένη ομάδα θεμάτων οδηγεί στην ανάπτυξη της ικανότητας προτυποποίησης του προβλήματος, στην κατανόηση του πραγματικού προβλήματος το οποίο πρόκειται να μοντελοποιηθεί, καλλιεργεί την αφαιρετική σκέψη και την ικανότητα αναδιατύπωσης του προβλήματος, ώστε να μπορεί να αντιμετωπισθεί με μαθηματικό τρόπο. Επιστρατεύονται γνώσεις και διαδικασίες από οποιαδήποτε περιοχή των Μαθηματικών και χρησιμοποιείται η διαδικασία της επανατροφοδότησης.

Καλλιεργούνται οι δεξιότητες διερεύνησης και δημιουργικότητας και οι στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων, ενώ εξετάζεται η χρήση των εργαλείων προτυποποίησης στην εκπαιδευτική διαδικασία των μαθηματικών. Τέλος, περικλείεται η ανάλυση και ερμηνεία προβληματικών καταστάσεων, προτείνοντας, ελέγχοντας και βελτιώνοντας τις υπάρχουσες λύσεις.

Επιτυγχάνεται έτσι, η οικοδόμηση βασικών μαθηματικών εννοιών, γνώσεων και διαδικασιών με σκοπό να χρησιμοποιηθούν στη μάθηση με μεθόδους επαναδόμησης και επαναδιατύπωσης ενός προβλήματος από μια εξωμαθηματική περιοχή, σε μαθηματικό πρόβλημα καθώς και τη χρήση μαθηματικών εργαλείων για την επίλυση προβλημάτων.

**Μέθοδοι Επίλυσης και Διερεύνησης (Μαθηματικών) Προβλημάτων.**

Στόχοι της προτεινόμενης ομάδας θεμάτων είναι η δόμηση των μαθηματικών εννοιών και σχέσεων μέσω της χρήσης και αξιοποίησης πολλαπλών αναπαραστάσεων, η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών ως βασικό στοιχείο της επίλυσης προβλημάτων και η χρήση και δόμηση στρατηγικών για την επίλυση ενός προβλήματος.

Η επίλυση προβλήματος βρίσκεται στο επίκεντρο της μαθηματικής εκπαίδευσης, όχι απαραίτητα ως ανεξάρτητη θεματική περιοχή αλλά ως βασικός άξονας γύρω από τον οποίο οργανώνεται η ερμηνεία και η διερεύνηση βασικών μαθηματικών εννοιών.

Η διδακτική μέθοδος που προβάλλεται διεθνώς, αλλά και τονίζεται με έμφαση στη σύγχρονη εκπαιδευτική μεταρρύθμιση, ξεκινά με μια προβληματική κατάσταση στην οποία εμπλέκονται οι μαθηματικές έννοιες που πρέπει να διδαχθούν. Η κατανόηση ενός προβλήματος και η αναζήτηση της λύσης του γίνεται αρχικά σε διαισθητικό και εμπειρικό επίπεδο, αλλά είναι επιθυμητό στη συνέχεια να μετασχηματίζεται σταδιακά σε μια αποδεικτική διαδικασία που στηρίζεται σε μια σειρά λογικών ισχυρισμών.

Ενδεικτικά, αναφέρονται τίτλοι ήδη εκπονημένων διπλωματικών εργασιών.

- Πλέρου Αντωνία, «Νευρωνικά Δίκτυα Προσομοίωσης του Ανθρώπινου Εγκεφάλου».
- Γεωργανάκης Γεώργιος, «Ανάπτυξη και Αξιολόγηση της Γεωμετρικής Σκέψης».
- Κασούτσας Αιμιλιανός, «Τα MathLets στην Μαθηματική Εκπαίδευση».
- Χατζόπουλος Σταύρος, «Κριτήρια επιλογής για την παρουσίαση μαθηματικών θεμάτων με τη χρήση νέων τεχνολογιών».
- Παπανικολάου Λεωνίδας, «Βασικές εννοιολογικές μεταφορές στα Μαθηματικά».
- Δουκάκης Παναγιώτης, «Μαθηματικά μοντέλα προβλημάτων Αντίδρασης-Διάχυσης».
- Καραμουζάς Νικόλαος, «Εφαρμογές Μαθηματικών προτύπων στη Βιολογία».
- Παπαχρήστου Γρηγόρης, «Η χρήση της γλώσσας MathML στην Εξ αποστάσεως εκπαίδευση της εξίσωσης Laplace».
- Αντωνίου Γεωργία, «Μαθηματικά μοντέλα στη Θεωρία Παιγνίων».
- Σταύρου Αγγελική, «Δυσκολίες στη μαθηματική σκέψη. Θεωρητική διερεύνηση και μεθοδική αντιμετώπιση»
- Ρόδη Μαρία, «Αρχές δημιουργίας φύλλων εργασίας και σχεδίων μαθήματος στα Μαθηματικά».

Οι μεταπτυχιακοί φοιτητές είναι πλέον αρκετά ώριμοι να συνθέσουν τις εμπειρίες τους, με τις νέες γνώσεις και τις ιδιαιτερότητες της εξ αποστάσεως Εκπαίδευσης, ενώ παρακινούνται στην παρακολούθηση συνεδρίων, στα οποία πολλές φορές συμμετέχουν ανακοινώνοντας μέρη των διπλωματικών τους εργασιών. Όλες οι διπλωματικές εργασίες έχουν την προσωπική σφραγίδα των μεταπτυχιακών φοιτητών, σε ότι αφορά τη διαδρομή του θέματος που αναπτύσσουν ενώ σε αρκετές από αυτές αναπτύσσονται πρωτότυπες υποενότητες.

**Συμπεράσματα**

Η κατεύθυνση της «Ιστορικής εξέλιξης και διδακτικής των Μαθηματικών» απευθύνεται σε εκείνους τους φοιτητές του προγράμματος «Μεταπτυχιακές σπουδές στα Μαθηματικά», του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου, οι οποίοι έχουν ενδιαφέρον στην ανανέωση της εκπαιδευτικής πρακτικής μέσα από σύγχρονες θεωρήσεις φιλοσοφίας, γνωσιακής επιστήμης και διδακτικής.

Η ειδίκευση που αποκτούν τους οδηγεί σε αναθεωρήσεις πρακτικών και μεθόδων διδασκαλίας μακριά από στερεότυπα και μεμονωμένες εμπειρικές προσπάθειες.

Δίνεται η δυνατότητα να αυτενεργήσουν σε επίπεδο εργασιών και να συνδιαμορφώνουν νέα θέματα διπλωματικών εργασιών με μεγάλο βαθμό πρωτοτυπίας. Η κατεύθυνση δημιουργεί το απαιτούμενο υπόβαθρο ανάπτυξης συγκροτημένων εκπαιδευτικών πρακτικών.

Η ανάπτυξη της κατεύθυνσης έχει αυτόνομη δυναμική πορεία καθώς βελτιώνεται διαρκώς η αλληλεπίδραση των βασικών αξόνων υλοποίησής της.

**Βιβλιογραφία**

[1] Blum W. & Niss M., Applied mathematical problem solving, Modelling, Applications, and links to other subjects: state, trends and issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics*, v. 22, n. 1, p. 27-68, 1991.

[2] Coello C., Van Veldhuizen D. & Lamont G. (2002). *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems*. Norwell, MA: Kluwer.

[3] Gershenfeld N. (1998). *The Nature of Mathematical Modeling*, Cambridge University Press.

[4] Lesh, R. and Doerr, H., *Foundations of a models and modelling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving*, Beyond Constructivism: Models and Modeling

# Η Γνωσιακή Επιστήμη των Ενσώματων Μαθηματικών

## Το Παράδειγμα του Τετραγωνισμού της Παραβολής

**Μπούκης Γιώργος**
Μαθηματικός Msc.
Ελληνικό Αμοικτό Πανεπιστήμιο
Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας
Γυμνάσιο Καστελλάνων Μέσης Κέρκυρας
48084 Καστελλάνοι Κέρκυρα
gboukis1@gmail.com

**Περίληψη**

Κατά την τελευταία εικοσαετία, έχει αναπτυχθεί στο πεδίο της γνωσιακής έρευνας μια τάση με αυξανόμενη επιρροή, η οποία δίνει έμφαση στον *ενσώματο* χαρακτήρα της μαθηματικής κατανόησης. Τα μέχρι τώρα συμπεράσματά της έρχονται να εμπλουτίσουν ή ακόμη να αμφισβητήσουν κρατούσες απόψεις της ψυχολογίας, της φιλοσοφίας και της διδακτικής ως προς τις απαρχές, τη δημιουργία και την εκμάθηση των Μαθηματικών.

Η βασική θέση των εν λόγω θεωρήσεων είναι ότι οι *αισθητηριακές* και *κινητικές* ιδιότητες του ανθρώπινου σώματος παίζουν κρίσιμο ρόλο στη μαθηματική δραστηριότητα. Επιχειρείται υπό αυτό το πρίσμα να υλοποιηθεί ένα φιλόδοξο εγχείρημα: να εξηγηθεί πώς ακριβώς οι αφηρημένες και τυπικές μαθηματικές ιδέες είναι δυνατόν να αναδύονται μέσω των αισθητηριακών και κινητικών εμπειριών.

Ως βασικό εργαλείο προβάλλεται η έννοια της *εννοιολογικής μεταφοράς* και ο ρόλος της στη διαμόρφωση του μαθηματικού νοήματος. Η συνακόλουθη *ανάλυση των μαθηματικών ιδεών* αποτελεί μια καινοτόμα και διεισδυτική προσπάθεια να αποκαλυφθεί το ενσώματο εννοιολογικό περιεχόμενο σε ένα ευρύ φάσμα μαθηματικών εννοιών και να καλυφθεί έτσι το χάσμα ανάμεσα στην *τυπική* και την *ενορατική* όψη των Μαθηματικών.

Σε πρώιμα μαθηματικά κείμενα όπου οι ευρετικές περιγραφές έχουν διασωθεί, η ενσώματη διάσταση των μαθηματικών ιδεών γίνεται ευκρινέστερη.

Στο πρώτο μέρος της παρούσας εργασίας παρουσιάζεται συνοπτικά το πλαίσιο ιδεών της Γνωσιακής Επιστήμης των Ενσώματων Μαθηματικών. Αναφέρεται κυρίως στις εργασίες των Lakoff & Núñez (2000) και Núñez (1993-2005) και θέτει τα απαραίτητα προαπαιτούμενα για το δεύτερο μέρος. Το δεύτερο μέρος είναι αφιερωμένο στην πραγματεία του Αρχιμήδη περί Τετραγωνισμού της Παραβολής, όπου αναδεικνύονται οι ενσώματες όψεις της ευρετικής προσέγγισης του προβλήματος.

**Λέξεις Κλειδιά**

*ενσώματα Μαθηματικά, τετραγωνισμός της παραβολής, εννοιολογική μεταφορά*

**Abstract**
During the last twenty years, an increasingly influential trend has been developed in cognitive science which gives emphasis to the embodied character of mathematical understanding. Cognitive research results have enriched and in certain cases even called into question some long held views in the fields of psychology, philosophy and pedagogy on the origin of mathematics and the ways it is created and learned. Such results are based on the premise that the sensory-motor properties of the human body play a crucial role in mathematical activity. Here, the major attempt consists in explaining how it is possible for the abstract and formal mathematical ideas to emerge through sensory-motor experience. The basic tool used is the concept of conceptual metaphor and its role in the formation of mathematical meanings is explored. The analysis of mathematical ideas from this perspective is an innovative and penetrating effort to uncover the embodied conceptual content in a wide spectrum of mathematical concepts and to bridge the gap between the formal and the intuitive aspects of mathematics. In early mathematical texts, wherever heuristic descriptions by the authors have been preserved, the aspect of mathematical ideas is made more lucid. The first part of this paper, based on the work of Lakoff & Núñez, offers a summary presentation of a particular framework of the cognitive science of embodied mathematics. Moreover, it serves as a useful prerequisite for the next part. The second part is concerned with Archimedes' treatise on the quadrature of the parabola. Here the embodied aspects of the heuristic approach towards the problem are pointed.

**Keywords**
*embodied mathematics, quadrature of the parabola, conceptual metaphor*

## Γενικά

Η γνωσιακή επιστήμη είναι ένας νεοσύστατος επιστημονικός κλάδος που μελετά εννοιολογικά συστήματα. Σύμφωνα με τον Gardner (1987: 6) πρόκειται για την

> *«σύγχρονη, εμπειρικά βασιζόμενη προσπάθεια να απαντηθούν μακροχρόνια επιστημολογικά ερωτήματα- ιδιαίτερα εκείνα που αφορούν τη φύση της γνώσης, τα συστατικά της, τις πηγές της, την ανάπτυξη και τη χρήση της».*

Μια ισχυρή τάση στο εσωτερικό της, γνωστή ως *ερευνητικό πρόγραμμα της ενσώματης γνώσης*, δίνει έμφαση στις αισθητηριακές και κινητικές λειτουργίες του σώματος για το *πώς* και *τι* σκέφτεται ένας οργανισμός. Καθώς ο άνθρωπος είναι προϊόν εξέλιξης και ο νευρικός εξοπλισμός των βιολογικών του προπατόρων λειτουργούσε ανέκαθεν στη βάση της αισθητηριακής και κινητικής επεξεργασίας, η γνωστική δραστηριότητα ήταν μια αδιαμεσολάβητη, απευθείας διάδραση με το περιβάλλον. Κατά συνέπεια, η ανθρώπινη γνώση δεν μπορεί παρά να έχει βαθιές ρίζες στην αισθητικοκινητική επεξεργασία: οι ίδιοι νευρικοί και γνωστικοί μηχανισμοί που μας επιτρέπουν να αντιλαμβανόμαστε και να κινούμαστε, θα πρέπει να δημιουργούν τα εννοιολογικά μας συστήματα και τους τρόπους νόησης. Κατ' αυτή την έννοια, οι έννοιες και ο νους είναι *ενσώματα* .

Με τον όρο *γνωσιακός* θα εννοούμε στο εξής κάθε νοητική λειτουργία ή δομή η οποία υπεισέρχεται στη γλώσσα, στη νοηματοδότηση, στην αισθητηριακή αντίληψη, στα εννοιολογικά συστήματα και στη λογική.

**Εξειδικεύσεις στα Μαθηματικά**

Εμπειρικές έρευνες έχουν δείξει ότι κάθε ανθρώπινο ον γεννιέται με μια έμφυτη ικανότητα «προ-αριθμητικής», δηλαδή είναι σε θέση να διακρίνει πολύ μικρό πλήθος αντικειμένων και συμβάντων (subitizing) να εκτελεί δε υπολογισμούς με πολύ μικρούς αριθμούς. Ωστόσο, τα Μαθηματικά εκτείνονται πολύ πέραν της αριθμητικής των πολύ μικρών αριθμών. Ακόμη και αυτή η κατανόηση ότι το μηδέν είναι αριθμός ή ότι οι αρνητικοί αριθμοί είναι όντως αριθμοί, ήταν αποτέλεσμα αιώνων εξέλιξης. Η επέκταση των φυσικών αριθμών με τους ρητούς, τους πραγματικούς, τους μιγαδικούς και τους υπερπραγματικούς απαιτεί τη βαθμιαία δόμηση και ενεργοποίηση ενός τεράστιου γνωστικού μηχανισμού, ο οποίος σαφώς υπερβαίνει τον καθημερινό, χωρίς ειδική εκπαίδευση ενήλικα. Εντούτοις, οι ενσώματες γνωστικές ικανότητες, οι ίδιες που χρησιμοποιούνται σε πεδία έξω από τα Μαθηματικά, είναι αυτές που, κατά τους Lakoff και Núñez, μας επιτρέπουν να κινηθούμε πέρα από τις βασικές αριθμητικές δεξιότητες, σε κατανόηση βαθύτερων μαθηματικών εννοιών. Αναφέρουν σχετικά, τέσσερις γνωστικούς μηχανισμούς ενσωματωμένους στον ανθρώπινο εξοπλισμό, οι οποίοι αποτελούν τους δομικούς λίθους των θεωρήσεών τους.

(α) τα εικονοσχήματα
(β) τα σχήματα όψεως
(γ) την εννοιολογική μεταφορά και
(δ) την εννοιολογική μίξη.

**Τα Εικονοσχήματα**

Έρευνες στο πεδίο της γνωσιακής γλωσσολογίας έχουν δείξει ότι οι χωρικές σχέσεις στα πλαίσια μιας δεδομένης γλώσσας μπορούν να αναλυθούν σε εννοιολογικά πρωτογενή στοιχεία, τα οποία ονομάζονται *εικονοσχήματα* (*image schemas)* και εμφανίζεται να έχουν καθολικότητα. Πρόκειται για σχηματικά, ενσώματα στοιχεία εντός του εγκεφάλου τα οποία είναι προ-εννοιακά, μη-γλωσσικά, παρέχουν δε συσσωρευτικά τη βάση για το σχηματισμό των εννοιών. Πιο συγκεκριμένα τα εικονοσχήματα είναι:

- *Σχηματικά*, καθώς δεν αποτελούν λεπτομερείς αναπαραστάσεις των βιωμένων συμβάντων. Είναι μερικώς δομημένα μορφώματα της διάδρασής μας με τον κόσμο.
- *Ενσώματα*, καθώς είναι σωματικά θεμελιωμένα. Εξαρτώνται από τον τρόπο με τον οποίο το σώμα αλληλεπιδρά με τον κόσμο. Επί παραδείγματι, το εικονοσχήμα της *ισορροπίας* διαμορφώνεται από τον τρόπο ελέγχου του μυϊκού συστήματος ως απόκριση σε εξωτερικό περιβαλλοντικό ερέθισμα.
- *Προ-εννοιακά*, καθώς είναι παρόντα πριν σχηματιστούν οι έννοιες. Αποτελούν τη βάση πάνω στην οποία χτίζονται οι έννοιες και ως εκ τούτου δεν είναι προϊόν της συνείδησης – η συνείδηση προϋποθέτει την έννοια.
- *Μη-γλωσσικά*, καθώς δεν κάνουν χρήση της γλώσσας ή της σκέψης.

Σημαντικά εικονοσχήματα για τα Μαθηματικά είναι το αυτό του *εγκλεισμού (Container Schema), της κεντρικότητας*, της *επαφής*, της *γειτνίασης*, της *ισορροπίας*, της *ευθείας* κ.α. Τα εικονοσχήματα ενέχουν σύμφυτες λογικές, ουσιώδεις για τη μαθηματική σκέψη.

Το Σχήμα 1 παρουσιάζει τη σύμφυτη χωρική λογική του σχήματος εγκλεισμού. Με αναφορά στο εν λόγω σχήμα, ας θεωρήσουμε τις ακόλουθες προτάσεις:

**Σχήμα 1**

*Αν το δοχείο Α βρίσκεται εντός του δοχείου Β και το Χ βρίσκεται εντός του Α, τότε το Χ βρίσκεται εντός του Β.*

*Αν το δοχείο Α βρίσκεται εντός του δοχείου Β και το Υ βρίσκεται εκτός του Β, τότε το Υ βρίσκεται εκτός του Α.*

Δεν είναι απαραίτητο να καταφύγουμε σε συμπερασματικού χαρακτήρα λειτουργίες για να οδηγηθούμε στα παραπάνω συμπεράσματα. Τα εικονοσχήματα είναι ταυτόχρονα τόσο αντιληπτικής όσο και εννοιολογικής φύσεως.

**Κινητικός Ελεγχος και Σχήματα Όψεως**

Εκ πρώτης όψεως οι μαθηματικές ιδέες και το σύστημα κινητικού ελέγχου - το νευρικό σύστημα που κυβερνά τον τρόπο κίνησης του σώματός μας, φαίνονται τελείως διαφορετικά θέματα. Όμως, πρόσφατες ανακαλύψεις για τη σχέση ανάμεσα στο σύστημα κινητικού ελέγχου και στο ανθρώπινο αντιληπτικό σύστημα δείχνουν θεμελιώδη συνάφεια μεταξύ τους. Οι εν λόγω ανακαλύψεις προέρχονται από το πεδίο της δομημένης συνδεσμικής νευρικής προτυποποίησης (*structured connectionist neural modeling*).

O Srini Narayanan (1977) παρατήρησε ότι όλα τα νευρικά προγράμματα κινητικού ελέγχου παρουσιάζουν την ίδια υπερδομή:

*Κατάσταση Ετοιμότητας*: Πριν εκτελεστεί μια σωματική πράξη, πρέπει να πληρούνται συγκεκριμένες συνθήκες ετοιμότητας (δηλαδή, θα πρέπει να αναπροσανατολίσεις το σώμα σου, να σταματήσεις νωρίτερα κάποια άλλη δράση, να ξεκουραστείς για λίγο, κ.ο.κ).

*Διαδικασία Έναρξης*: Πρέπει να κάνεις οτιδήποτε προηγείται της έναρξης της διαδικασίας (δηλαδή, για να σηκώσεις ένα φλιτζάνι, πρέπει πρώτα να το φθάσεις και να το πιάσεις).

*Κυρίως Διαδικασία:* Κατόπιν αρχίζεις την κυρίως διαδικασία.

*Πιθανή διακοπή και επανεκκίνηση*: Ενόσω εκτελείς την κύρια διαδικασία, υπάρχει η δυνατότητα-επιλογή να τη διακόψεις και αν τη διακόψεις, να την ξαναρχίσεις ή να μην την ξαναρχίσεις.

*Επανάληψη ή Συνέχιση*: Όταν ολοκληρώσεις την κυρίως διαδικασία, μπορείς να την επαναλάβεις ή να τη συνεχίσεις.

*Σκοπός:* Εάν η πράξη εκτελείται για την επίτευξη κάποιου σκοπού, ελέγχεις αν πέτυχες το σκοπό.

*Ολοκλήρωση:* Εν συνεχεία κάνεις ό,τι είναι απαραίτητο για την ολοκλήρωση της πράξης.

*Τελική Κατάσταση:* Σε αυτό το σημείο, βρίσκεσαι στην τελική κατάσταση, όπου υπάρχουν τα αποτελέσματα και οι συνέπειες της πράξης.

Κάθε σύνθετη κινητική δραστηριότητα (όπως να σηκώσουμε ένα φλιτζάνι ή να ξύσουμε το κεφάλι μας) έχει την παραπάνω δομή.

Το σύστημα κινητικού ελέγχου σχετίζεται με τις έννοιες, ειδικά δε τις αφηρημένες έννοιες όπως αυτές βρίσκουν έκφραση στις γραμματικές των διαφόρων γλωσσών. Ο Narayanan παρατήρησε ότι το εν λόγω σχήμα κινητικού ελέγχου έχει την ίδια δομή με αυτό που στην γλωσσολογία ονομάζεται *όψη*, δηλαδή, με την εν γένει δομή των γεγονότων. Οτιδήποτε αντιλαμβανόμαστε ή θεωρούμε ως πράξη ή γεγονός νοείται σα να έχει την ανωτέρω δομή. Οι φυσικές γλώσσες κατέχουν τα γραμματικά μέσα για την αποκωδικοποίηση αυτής της δομής.

Στην εργασία του ο Narayanan υποστηρίζει ότι *η ίδια νευρική δομή που χρησιμοποιείται στον έλεγχο κινητικών σχημάτων σύνθετου χαρακτήρα μπορεί να χρησιμοποιηθεί στο συλλογισμό για γεγονότα και πράξεις* (Narayanan, 1977).

Η συγκεκριμένη δομή ονομάζεται *σχήμα όψεως*.

Από τη σκοπιά της γλωσσολογίας, η όψη είναι κατ' αρχήν μια γραμματική κατηγορία χρονικής υφής, η οποία ωστόσο διακρίνεται από τη γραμματική κατηγορία του χρόνου με ουσιαστικό τρόπο. Ενώ ο γραμματικός χρόνος τοποθετεί τα γεγονότα στον άξονα του χρόνου σε σχέση με το παρόν του ομιλούντος ή κάποιο άλλο γεγονός, η όψη αποδίδει τον τρόπο με τον οποίο ο ομιλών επιλέγει να δει και να παρουσιάσει ένα γεγονός σε σχέση με την εσωτερική χρονική ή άλλη σύστασή του. Συνεπώς, η όψη δεν αφορά την αντικειμενική χρονική σύσταση κάθε ενέργειας ή κατάστασης, αλλά τον τρόπο με τον οποίο ο ομιλών τη θεωρεί, και μάλιστα, αν τη θεωρεί συνοπτικά, ως σύνολο, χωρίς να ενδιαφέρεται για την εσωτερική της διάρθρωση ή αν τη θεωρεί στην εξέλιξή της και επιλέγει να μας δώσει πληροφορίες σχετικά. Εν τέλει, αν επιλέγει σημείο θέασης *έξω* από το γεγονός ή *μέσα* από το γεγονός. Στην πρώτη περίπτωση, η θέαση είναι *συνοπτική* ενώ στην δεύτερη, *μη συνοπτική*. («Τον Αύγουστο θα δουλέψω σε εστιατόριο» ↔ «Τον Αύγουστο θα δουλεύω σε εστιατόριο») (Μόζερ, 2007).

Από τα πλέον αξιοσημείωτα συμπεράσματα του Narayanan είναι ότι το ίδιο ακριβώς γενικό νευρικό σύστημα ελέγχου που μοντελοποίησε στην εργασία του, αν τεθεί ως είσοδος σε μύες, μπορεί να εκτελέσει μια σωματικά σύνθετη κίνηση, ενώ, αν δεν υπάρξει είσοδος σε μύες, μπορεί να εκτελέσει έναν λογικό συμπερασμό. Τούτο σημαίνει ότι τα νευρικά συστήματα ελέγχου των σωματικών κινήσεων έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά με αυτά που είναι απαραίτητα για την εξαγωγή λογικών συμπερασμών στο πεδίο της όψεως.

Ανάμεσα στους λογικούς συμπερασμούς του σχήματος όψεως, δυο συμπερασματικού χαρακτήρα σχήματα δόμησης είναι σπουδαία για τα Μαθηματικά:

*Το στάδιο που χαρακτηρίζει μια διαδικασία ως ολοκληρωμένη βρίσκεται μακρύτερα από οποιοδήποτε στάδιο εντός της διαδικασίας της ίδιας.*

*Δεν υπάρχει σημείο της διαδικασίας μακρύτερα από το στάδιο ολοκλήρωσης της διαδικασίας της ίδιας.*

Οι δυο αυτές συναγωγές, αν και σχεδόν προφανείς, είναι αξιοσημείωτης σπουδαιότητας για τα Μαθηματικά και εμφανίζονται στην κατασκευή της Βασικής Μεταφοράς του Απείρου.

**Η Εννοιολογική Μεταφορά**

Η μεταφορά θεωρείτο για μεγάλο διάστημα ως απλός τρόπος του λέγειν. Όμως, σχετικά πρόσφατα εμπειρικά ευρήματα έδειξαν ότι αποτελεί κεντρική διαδικασία στην καθημερινή σκέψη. Μάλιστα, αποτελεί το βασικό μηχανισμό που επιτρέπει την πρόσβαση σε μια αφηρημένη έννοια μέσω ενός πλέγματος απτών και συγκεκριμένων αισθητηριακών-κινητικών εμπειριών. Κύριο πόρισμα της γνωσιακής επιστήμης είναι ότι οι αφηρημένες έννοιες γίνονται τυπικά κατανοητές με όρους πιο συγκεκριμένων εννοιών, μέσω της μεταφοράς.

Εν είδη ορισμού, *εννοιολογική μεταφορά* είναι μια μονοκατευθυντική απεικόνιση στοιχείων από ένα σχετικά συγκεκριμένου χαρακτήρα εννοιολογικό πεδίο (πεδίο αφετηρίας) σε αντίστοιχα στοιχεία ενός άλλου σχετικά αφηρημένου εννοιολογικού πεδίου (πεδίο άφιξης). Η εν λόγω απεικόνιση μεταφέρει τη συμπερασματική δομή του πεδίου αφετηρίας στο πεδίο άφιξης, χωρίς ωστόσο να έχει χαρακτηριστικά ισομορφισμού: είναι εν μέρει συνεπής με την τοπολογία των δυο πεδίων. Οι απεικονίσεις των εννοιολογικών μεταφορών διατηρούν τη δομή των εικονοσχημάτων. Η γλωσσικές διατυπώσεις έπονται, με αποτέλεσμα πολλά ονόματα των εννοιών του πεδίου αφετηρίας να χρησιμοποιούνται επίσης για τις έννοιες του πεδίου άφιξης.

Στα Μαθηματικά χαρακτηριστική είναι η μεταφορά *Τα Σύνολα Είναι Δοχεία*, μέσω της οποίας καταλαβαίνουμε το σύνολο σαν φραγμένη περιοχή του χώρου και τα στοιχεία της σαν αντικείμενα μέσα σε αυτήν. Η μεταφορική αντιστοίχιση έχει ως εξής:

ΤΑ ΣΥΝΟΛΑ ΕΙΝΑΙ ΔΟΧΕΙΑ

| *Πεδίο Αφετηρίας* ΔΟΧΕΙΑ | | *Πεδίο Άφιξης* ΣΥΝΟΛΑ |
|---|---|---|
| Φραγμένες περιοχές του χώρου | → | Σύνολα |
| Αντικείμενα μέσα στο δοχείο | → | Στοιχεία του Συνόλου |
| Η μια φραγμένη περιοχή μέσα στην άλλη | → | Ένα Υποσύνολο |

Ας υποθέσουμε ότι εφαρμόζουμε την ανωτέρω απεικόνιση στα δυο συμπερασματικού χαρακτήρα μορφώματα (δοχεία – σύνολα) που προαναφέραμε.

| *Πεδίο Αφετηρίας*<br>ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΟΙ ΤΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ ΕΓΚΛΕΙΣΜΟΥ | | *Πεδίο Άφιξης*<br>ΣΥΝΟΛΟΘΕΩΡΗΤΙΚΟΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΟΙ |
|---|---|---|
| Νόμος Αποκλείσεως Τρίτου<br>Κάθε αντικείμενο Χ βρίσκεται είτε εντός του Δοχείου Α είτε εκτός του δοχείου Α. | | Νόμος Αποκλείσεως Τρίτου<br>Κάθε στοιχείο Χ είτε ανήκει στο σύνολο Α είτε δεν ανήκει στο σύνολο Α. |
| Νόμος Απόσπασης - Modus Ponens<br>Δοθέντων δυο δοχείων Α και Β και ενός αντικειμένου Χ, αν το Α είναι μέσα στο Β και το Χ μέσα στο Α, τότε το Χ είναι μέσα στο Β. | | Νόμος Απόσπασης - Modus Ponens<br>Δοθέντων δυο συνόλων Α και Β και ενός στοιχείου Χ, αν το Α είναι υποσύνολο του Β και το Χ ανήκει στο Α, τότε το Χ ανήκει στο Β. |
| Νόμος Υποθετικού Συλλογισμού<br>Δοθέντων τριών δοχείων Α, Β και Γ, αν το Α είναι μέσα στο Β και το Β μέσα στο Γ, τότε το Α είναι μέσα στο Γ. | | Νόμος Υποθετικού Συλλογισμού<br>Δοθέντων τριών συνόλων Α, Β και Γ, αν το Α είναι υποσύνολο του Β και το Β είναι υποσύνολο του Γ, τότε το Α είναι υποσύνολο του Γ. |
| Νόμος Συλλογισμού Αρνητικής Μορφής – Modus Tollens<br>Δοθέντων δυο δοχείων Α και Β και ενός αντικειμένου Υ, αν το Α είναι μέσα στο Β και το Υ είναι έξω από το Β, τότε το Υ είναι έξω από το Α. | | Νόμος Συλλογισμού Αρνητικής Μορφής – Modus Tollens<br>Δοθέντων δυο συνόλων Α και Β και ενός στοιχείου Υ, αν το Α είναι υποσύνολο του Β και το Υ δεν ανήκει στο σύνολο Β, τότε το Υ δεν ανήκει στο σύνολο Α. |

**Πίνακας 1** (WMCF: 44)

Το συμπέρασμα εδώ είναι ότι οι ανωτέρω νόμοι της λογικής είναι μεταφορικές απεικονίσεις της χωρικής λογικής των σχημάτων εγκλεισμού, και ως τέτοιοι είναι θεμελιωμένοι στις νευρικές δομές που χαρακτηρίζουν τα εν λόγω σχήματα.

Η μεταφορά Τα Σύνολα Είναι Δοχεία αποτελεί μια εννοιολογικού χαρακτήρα μεταφορά και διατηρεί ως εκ τούτου τη συμπερασματική δομή του πεδίου αφετηρίας.

**Η Εννοιολογική Μίξη**

*Εννοιολογική μίξη* είναι ο εννοιολογικός συνδυασμός δυο διακριτών γνωστικών δομών με σταθερές αντιστοιχίες μεταξύ τους. Μια απλή περίπτωση στο πεδίο των Μαθηματικών αποτελεί ο μοναδιαίος κύκλος εμφυτευμένος στο καρτεσιανό επίπεδο. Οι σταθερές αντιστοιχίες είναι:

(α) το κέντρο του κύκλου είναι η αρχή των αξόνων και

(β) η ακτίνα του κύκλου είναι ίση με 1.

Η εν λόγω μίξη δημιουργεί συμπερασμούς που προκύπτουν τόσο από τις αντιστοιχίες τις ίδιες όσο και από τη συμπερασματική δομή των δυο πεδίων.

Όταν οι σταθερές αντιστοιχίες μιας εννοιολογικής μίξης δίνονται με μια μεταφορά, η μίξη ονομάζεται *μεταφορική μίξη*. Παράδειγμα αποτελεί η μίξη Αριθμός — Ευθεία Γραμμή, η οποία χρησιμοποιεί τις αντιστοιχίες που προκύπτουν από τη μεταφορά Οι Αριθμοί Είναι Σημεία Μιας Ευθείας. Κατά τη μίξη, προκύπτουν καινούργιες οντότητες, τα σημεία-αριθμοί, που είναι ταυτόχρονα σημεία μιας ευθείας αλλά και αριθμοί (Fauconnier 1997, Turner και Fauconnier 1995, 1998).

Κατά τη μηχανική προσέγγιση του Αρχιμήδη στο πρόβλημα του τετραγωνισμού της παραβολής αναγνωρίζεται η μεταφορική μίξη Το Ευθύγραμμο Τμήμα Είναι Ράβδος, όπου τα ευθύγραμμα τμήματα αντιμετωπίζονται σαν ομοιογενείς ράβδοι. Προϊόν της μίξης είναι μια καινούργια οντότητα, το Ευθύγραμμο Τμήμα – Ράβδος, το οποίο διατηρεί τις πρωτοτυπικές – γεωμετρικές ιδιότητες του ευθυγράμμου τμήματος αλλά και τη φυσική ιδιότητα του βάρους. Η επακόλουθη συμπερασματική δομή (ισορροπία των μοχλών) είναι καταλυτικής σημασίας για την επίλυση του προβλήματος του τετραγωνισμού.

**Η Βασική Μεταφορά του Απείρου (ΒΜΑ)**

Πρόκειται για μια γενικού χαρακτήρα εννοιολογική απεικόνιση, η οποία απαντάται εντός αλλά και εκτός των Μαθηματικών, ωστόσο κατανοείται με τον καλύτερο τρόπο στα πλαίσια του ακριβούς και αυστηρού πεδίου των Μαθηματικών. Οι Lakoff και Núñez θεωρούν ότι η ΒΜΑ είναι ένας απλός, καθημερινός ανθρώπινος αντιληπτικός μηχανισμός υπεύθυνος για τη δημιουργία ενεστωτικού απείρου κάθε είδους: από τα κατ' εκδοχήν σημεία της Προβολικής Γεωμετρίας, μέχρι τις σειρές, τα απειροσύνολα, τα απειροστά και τα όρια.

Η εν λόγω εννοιολογική απεικόνιση παρουσιάζεται στον παρακάτω Πίνακα 2.

Το πεδίο αφετηρίας περιέχει τις ολοκληρωμένες επαναληπτικές διαδικασίες (συνοπτικής όψεως). Στα Μαθηματικά, οι εν λόγω διαδικασίες αντιστοιχούν σε αυτές που είναι ορισμένες στο χώρο του πεπερασμένου. Το πεδίο άφιξης είναι ο χώρος ο οποίος περιέχει τις ατέρμονες επαναληπτικές διαδικασίες (μη συνοπτικής όψεως), και ως εκ τούτου χαρακτηρίζει διαδικασίες οι οποίες ενέχουν το δυνητικό άπειρο.

| *Πεδίο Αφετηρίας* | | *Πεδίο Άφιξης* |
|---|---|---|
| ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΕΣ (ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ) ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ | | ΑΤΕΡΜΟΝΕΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ |
| Εναρκτήρια Κατάσταση | → | Εναρκτήρια Κατάσταση |
| Κατάσταση απορρέουσα από το αρχικό στάδιο της διαδικασίας. | → | Κατάσταση απορρέουσα από το αρχικό στάδιο της διαδικασίας. |
| Η Διαδικασία: Από μια δεδομένη ενδιάμεση κατάσταση δημιούργησε την επόμενη κατάσταση. | → | Η Διαδικασία: Από μια δεδομένη ενδιάμεση κατάσταση δημιούργησε την επόμενη κατάσταση. |
| Το ενδιάμεσο αποτέλεσμα μετά την επανάληψη της ανωτέρω διαδικασίας. | → | Το ενδιάμεσο αποτέλεσμα μετά την επανάληψη της ανωτέρω διαδικασίας. |
| Η τελική καταληκτική κατάσταση | → | **«Η τελική καταληκτική κατάσταση» (ενεστωτικό άπειρο)** |
| Συμπέρασμα: Η τελική καταληκτική κατάσταση είναι μοναδική και έπεται κάθε μη τελικής κατάστασης. | → | **Συμπέρασμα: Η τελική καταληκτική κατάσταση είναι μοναδική και έπεται κάθε μη τελικής κατάστασης.** |

**Πίνακας 2**

Τα τέσσερα πρώτα στοιχεία του πεδίου άφιξης είναι κατά κυριολεξία ταυτόσημα με τα αντίστοιχα τέσσερα στοιχεία του πεδίου αφετηρίας. Η εννοιολογική μεταφορά είναι αυτή που επιβάλλει μια «τελική καταληκτική κατάσταση» στην ατέρμονη διαδικασία (στο τελευταίο στοιχείο του πεδίου άφιξης). Επιπροσθέτως, το κρίσιμο συμπέρασμα στο πεδίο άφιξης είναι προϊόν της ίδιας μεταφοράς: σε κάθε ολοκληρωμένη διαδικασία, η τελική καταληκτική κατάσταση είναι *μοναδική*. Αυτό σημαίνει ότι:

*Δεν υπάρχει πρότερη καταληκτική κατάσταση:* Δεν υπάρχει διακριτή πρότερη κατάσταση εντός της διαδικασίας η οποία να ακολουθεί το στάδιο ολοκλήρωσης αλλά και να προηγείται της τελικής κατάστασης της διαδικασίας.

*Δεν υπάρχει ύστερη καταληκτική κατάσταση:* Δεν υπάρχει άλλη κατάσταση της διαδικασίας η οποία να είναι αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης της διαδικασίας και να ακολουθεί την τελική κατάσταση της διαδικασίας.

Κατά αυτή την έννοια, η μοναδικότητα της τελικής κατάστασης μιας ολοκληρωμένης διαδικασίας είναι προϊόν της ανθρώπινης επίγνωσης και όχι οπωσδήποτε κάποιο γεγονός που αφορά στον εξωτερικό κόσμο: προκύπτει από τον τρόπο που αντιλαμβανόμαστε κάθε ολοκληρωμένη διαδικασία.

Η ΒΜΑ έρχεται να απεικονίσει τούτη τη ιδιότητα της μοναδικότητας των ολοκληρωμένων διαδικασιών και να την επιβάλει στο ενεστωτικό άπειρο. Το ενεστωτικό άπειρο είναι μοναδικό, μετά από *κάθε δεδομένη εφαρμογή της ΒΜΑ.*

Η διατύπωση αυτής της μεταφοράς έγινε με όρους μιας απλής, βήμα προς βήμα επαναληπτικής διαδικασίας: από μια δεδομένη κατάσταση δημιούργησε την επόμενη κατάσταση. Με δεδομένη την εναρκτήρια κατάσταση, η διαδικασία παράγει ενδιάμεσες καταστάσεις. Η μεταφορική διαδικασία διέρχεται μια απειρία τέτοιων ενδιάμεσων καταστάσεων και καταλήγει σε μια μεταφορική, μοναδική καταληκτική κατάσταση.

**Η Πλασματική Κίνηση**

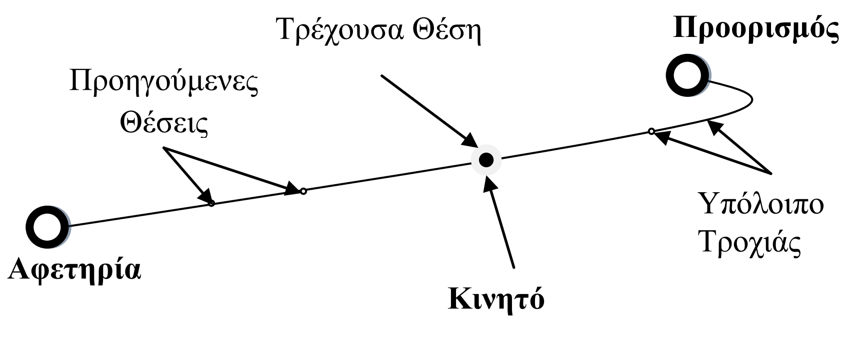
Για να προσεγγίσουμε από τη σκοπιά της γνωσιακής επιστήμης την ανάλυση του Αρχιμήδη στο πρόβλημα του τετραγωνισμού της παραβολής, απαραίτητη είναι επίσης η έννοια της *πλασματικής κίνησης* (Talmy, 1988). Πρόκειται για έναν θεμελιακό ενσώματο γνωστικό μηχανισμό μέσω του οποίου ασυνείδητα αντιλαμβανόμαστε στατικές οντότητες με δυναμικής φύσεως όρους.

Κάθε φυσική γλώσσα διαθέτει τρόπους να εκφράσει χωρικού τύπου έννοιες όπως *αφετηρίες* («από»), *προορισμούς* («προς»), καθώς και τις *διαδρομές* μεταξύ τους («μέσω», «κατά μήκος»). Οι εν λόγω έννοιες δεν εμφανίζονται απομονωμένες, αλλά αποτελούν μέρος μιας ευρύτερης ενότητας, του *σχήματος Αφετηρία-Διαδρομή-Προορισμός*. Πρόκειται για εικονοσχήμα που αναφέρεται στην κίνηση και συναρμόζεται από τα εξής επιμέρους στοιχεία:

- Ένα κινούμενο παράγοντα (: *κινητό*)
- Ένα σημείο (ή τοποθεσία) αφετηρίας
- Έναν τελικό προορισμό (του κινητού)
- Μια διαδρομή από την αφετηρία μέχρι τον προορισμό
- Την τρέχουσα τροχιά της κίνησης
- Τη θέση του κινητού σε μια δεδομένη χρονική στιγμή
- Την κατεύθυνση του κινητού τη δεδομένη χρονική στιγμή
- Την τρέχουσα τελική θέση του κινητού, η οποία ίσως είναι ή δεν είναι ο τελικός προορισμός.

Στο πεδίο της γλώσσας, στη φράση «ο δρόμος πηγαίνει στο δάσος», η κίνηση ανήκει αποκλειστικά στο χώρο της φαντασίας και η φράση η ίδια δεν περιέχει κυριολεξία οποιουδήποτε είδους.

Το κινητό μπορεί να είναι αντικείμενο είτε πραγματικό (ένα αυτοκίνητο που κινείται στο δρόμο) είτε μεταφορικής φύσεως (ο ισημερινός της Γης που διασχίζει πολλές χώρες).




Το ανωτέρω εικονοσχήμα έχει εγγενή χωρική λογική και ενσωματωμένες συμπερασματικές δομές:

- Αν έχεις διανύσει μια διαδρομή μέχρι την τρέχουσα θέση, έχεις διανύσει όλες τις προηγούμενες θέσεις της διαδρομής
- Αν έχεις μετακινηθεί από το σημείο *Α* στο σημείο *Β* και από το σημείο *Β* στο σημείο *Γ*, τότε έχεις μετακινηθεί από το *Α* στο *Γ*
- Αν υπάρχει απευθείας διαδρομή από το *Α* προς το *Β* και κινείσαι σε αυτή τη διαδρομή προς το *Β*, τότε πλησιάζεις ολοένα εγγύτερα στο *Β*.
- Αν τα *Χ* και *Υ* κινούνται από το *Α* προς το *Β* σε απευθείας διαδρομή και το *Χ* προσπερνά το *Υ*, τότε το *Χ* είναι μακρύτερα από το *Α* και πλησιέστερα στο *Β* από ότι το *Υ*.

Πρόκειται για σχήμα με βαρύνουσα σημασία στη μαθηματική σκέψη. Οι συναρτήσεις στο καρτεσιανό επίπεδο συχνά γίνονται αντιληπτές με όρους κίνησης, όταν για παράδειγμα τις περιγράφουμε σαν να «ανεβαίνουν», να «φθάνουν» σε μια μέγιστη τιμή και κατόπιν να «κατεβαίνουν». Στη Γεωμετρία επίσης, σκεφτόμαστε δυο ευθείες σαν να «συναντώνται» σε ένα σημείο ή να «διέρχονται» από αυτό. Στα Μαθηματικά, έχει μεταφορικό χαρακτήρα πάντα. Στην πρόταση «το σημείο Μ κινείται από το σημείο Α μέχρι το σημείο Β», αποδίδουμε κίνηση σε μια μεταφορική οντότητα η οποία τυπικά, έχει μόνον θέση.

Παραπλήσια περιγραφή διακρίνεται στον Αριστοτέλη, όπου, το σημείο (*στιγμή*) θεωρείται σαν ένα άκρο, μια χρονική αφετηρία, ή ένα σημείο διαίρεσης μιας ευθείας. Το ίδιο δεν αποτελεί μέγεθος, ούτε μέρος μεγέθους ή ευθείας˙ μπορεί όμως μετέχοντας της κίνησης να παραγάγει μια γραμμή και να αποτελέσει έτσι αφετηρία ενός μεγέθους (*Φυσικής Ακροάσεως* Δ, 220α 9-11).

Στα περισσότερα εγχειρίδια Απειροστικού Λογισμού, πριν τον τυπικό *ε-δ* ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης αφιερώνονται συνήθως μια-δυο παράγραφοι σε μια άτυπη περιγραφή της ιδέας της συνέχειας, με επίκληση στην ενόραση. Στο εγχειρίδιο *Mathematics, Its Contents, Methods and Meaning* των Aleksandrov, Kolmogorov, και Lavrent'ev αναφέρεται: «Μπορούμε να αποκτήσουμε τη γενική ιδέα μιας συνεχούς συνάρτησης από το γεγονός ότι η γραφική της παράσταση είναι συνεχής, δηλαδή μπορούμε να σχεδιάσουμε την καμπύλη της χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί».

Παρόμοια, στο κλασικό εγχειρίδιο "Calculus" του G. Simmons αναγράφεται για το ίδιο θέμα: «Στην καθομιλουμένη, συνεχής διαδικασία είναι εκείνη που εκτυλίσσεται χωρίς κενά ή διακοπές ή ξαφνικές αλλαγές».

Και στα δυο εγχειρίδια η περιγραφή της συνέχειας γίνεται με δυναμικούς όρους. Κάτι «κινείται»: ένα μολύβι σχεδιάζει μια καμπύλη, κάτι «εκτυλίσσεται χωρίς κενά». Και οι δυο περιγραφές αντιστοιχούν με ακρίβεια στην έννοια του *φυσικού συνεχούς* όπως αυτό έχει περιγραφεί από τους Lakoff και Núñez (1998).

Η πλασματική κίνηση στα Μαθηματικά λειτουργεί επί ενός δικτύου εξαιρετικής ακρίβειας εννοιολογικών μεταφορών, όπως Οι Αριθμοί Είναι Θέσεις Στο Χώρο (που μας επιτρέπει να αντιλαμβανόμαστε τους αριθμούς με όρους χωρικών θέσεων) και μας παρέχει την απαραίτητη συμπερασματική δομή για να αντιλαμβανόμαστε τις συναρτήσεις σαν να έχουν κίνηση και κατεύθυνση. Η εννοιολογική μεταφορά παράγει μια ακραιφνώς φανταστική οντότητα εντός ενός μεταφορικού χώρου, ενώ η πλασματική κίνηση την μετατρέπει σε κινητό εντός του μεταφορικού χώρου (Núñez, 2006).

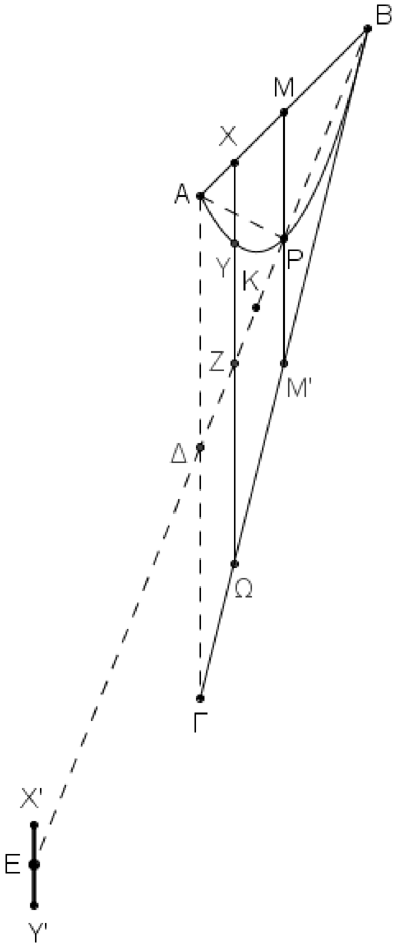
**Ο Τετραγωνισμός της Παραβολής**

Το 1906 ανακαλύπτεται τυχαία το πιο εκπληκτικό έργο του Αρχιμήδη (287-212 π.Χ.), το «*Περί των μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένην έφοδος*», όπου περιγράφεται με συστηματικό τρόπο, πώς ο Αρχιμήδης *συνέλαβε* τα σημαντικότερα αποτελέσματά του. Το παλίμψηστο χειρόγραφο βρέθηκε στην Κωνσταντινούπολη κάτω από ένα στρώμα βυζαντινών προσευχών με το οποίο είχε επικαλυφθεί κατά τον 13$^{ο}$ αιώνα. Στον πρόλογο αυτού του έργου, ο Αρχιμήδης αναφέρει ρητά ότι πρώτα ανακάλυψε «μηχανικώς» και κατόπιν απέδειξε «γεωμετρικώς» τα πιο ωραία αποτελέσματά του. Επίσης, εκθειάζει την αποτελεσματικότητα της μεθόδου της «εξάντλησης», η οποία ωστόσο υποκρύπτει μια κρίσιμη προϋπόθεση: πρέπει κανείς να γνωρίζει εκ των προτέρων το ακριβές αποτέλεσμα αυτού που θα αποδείξει, *πριν* το αποδείξει μέσω αυτής της μεθόδου.

Ποιοι ενσώματοι μηχανισμοί κατά το παράδειγμα της γνωσιακής επιστήμης των ενσώματων Μαθηματικών διακρίνονται και ποιες έννοιες της σύγχρονης γνωσιακής επιστήμης αναγνωρίζονται στην ευρετική πορεία που περιέγραψε ο Αρχιμήδης;

Το πρόβλημα που απασχόλησε τον Αρχιμήδη ήταν η αναγωγή του εμβαδού **Ε** του παραβολικού τμήματος *ΑΒΡΥΑ* σε εμβαδόν ενός τριγώνου.
Στο Σχήμα 2, *ΒΓ* είναι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο *Β*, *Μ* είναι το μέσον του *ΑΒ*, οι *ΜΡΜ΄* και *ΑΓ* είναι παράλληλες προς τον άξονα της παραβολής, *Υ* είναι τυχόν σημείο του παραβολικού τόξου και η *ΧΥΩ* είναι παράλληλη προς τον άξονα της παραβολής. Φέρουμε επίσης την *ΒΡ* η οποία τέμνει τις *ΧΩ* και *ΑΓ* στα σημεία *Ζ* και *Δ* αντιστοίχως. Στην προέκταση της *ΒΔ* θεωρούμε τα τμήματα *ΔΕ*=*ΒΔ* και τέλος, φέρουμε το τμήμα *Χ΄Υ΄* παράλληλο και ίσο με το *ΧΥ*.
Κρίσιμη σχέση για τη διαδικασία είναι η

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CU}{CW} \qquad (1)$$




**Σχήμα 2**

Πρόκειται για τη μοναδική σχέση με «αλγεβρική» ποιότητα, καθώς ξεφεύγει από τη συνήθη συλλογιστική των αρχαίων γεωμετρών με όμοια τρίγωνα: το σημείο *Υ* είναι τομή ευθείας με καμπύλη. Τέτοια σημεία υπολογίζονται σήμερα από τη λύση ενός μη γραμμικού συστήματος.

Με εφαρμογή της (1) για το μέσον *Μ* του *ΑΒ*, προκύπτει ότι

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MP}{MM'} = \frac{1}{2}$$

Άρα, το *Ρ* είναι μέσον του *ΜΜ΄* και συνεπώς, λόγω της παραλληλίας των *ΜΜ΄*, *ΧΩ* και *ΑΓ*, το *Ζ* είναι μέσον του *ΧΩ* και το *Δ* μέσον του *ΑΓ*.

Επίσης, λόγω της παραλληλίας των *ΑΓ, ΧΩ* :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{DZ}{DB} \quad \text{ή} \quad \frac{AC}{AB} = \frac{DZ}{DE} \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει

$$\frac{CU}{CW} = \frac{DZ}{DE} \quad \text{ή} \quad \frac{C'U'}{CW} = \frac{DZ}{DE} \qquad (3)$$

Αν θεωρήσουμε ότι τα τμήματα $CU = C'U'$ και $CW$ είναι ράβδοι κατασκευασμένες από το ίδιο ομοιογενές υλικό, τότε τα βάρη τους, έστω *F* και *F΄* , θα εφαρμόζονται στα μέσα τους *Ε* και *Ζ* αντίστοιχα.

Η (3) προσαρμοσμένη στη νέα θεώρηση, γράφεται

$$F\text{Ά}XDE = F\ XDZ \qquad (4)$$

Σύμφωνα με το νόμο της ισορροπίας των μοχλών (μοχλός το *ΒΕ*, υπομόχλιο το *Δ*), η ισότητα (4) δηλώνει ότι η ράβδος $CU$ μεταφερμένη στη θέση *Ε*, *ισορροπεί* την ράβδο $CW$ (στη θέση της).

Εφόσον το τρίγωνο *ΑΒΓ* αποτελείται από όλα τα παράλληλα τμήματα *ΧΩ* και το παραβολικό τμήμα *ΑΒΡΥΑ* αποτελείται από όλα τα παράλληλα τμήματα που άγονται με τον τρόπο του *ΧΥ*, το τρίγωνο *ΑΒΓ* (στη θέση του) ισορροπεί το παραβολικό τμήμα *ΑΒΡΥΑ* μεταφερμένο στο σημείο *Ε*. Επειδή το *ΑΒΓ* ισορροπεί στο κέντρο βάρους του *Κ* και το τμήμα *ΑΒΡΥΑ* (μεταφερμένο) στο κέντρο βάρους *Ε*, θα ισχύει

$$\mathbf{E}\ XDE = (\mathrm{D}\,ABG)\ XKD \qquad (5)$$

Η θέση του κέντρου βάρους του τριγώνου είναι γνωστή και προσδιορίζεται από την αναλογία

$$\frac{KD}{BD} = \frac{1}{3} \quad \text{ή} \quad \frac{KD}{DE} = \frac{1}{3} \qquad (6)$$

Από τις σχέσεις (5) και (6) προκύπτει ότι

$$\frac{\mathbf{E}}{(\mathrm{D}\,ABG)} = \frac{1}{3} \qquad (7)$$

Τούτη η τελευταία σχέση επιτυγχάνει το ζητούμενο: την αναγωγή του εμβαδού του παραβολικού τμήματος σε αυτό ενός τριγώνου.

Επειδή η διαδικασία περιλαμβάνει την κατασκευή του μάλλον περίπλοκου τριγώνου *ΑΒΓ*, ο Αρχιμήδης προχωράει σε μια απλοποίηση:

$$(\mathrm{D}\,ABG) = 2(\mathrm{D}\,ABD) = 4(\mathrm{D}\,ABP)$$

οπότε η σχέση (7) αποκτά την οριστική μορφή:

$$\frac{\mathbf{E}}{(\mathrm{D}\,ABP)} = \frac{4}{3} \qquad (8)$$

Το σημείο *Ρ* προκύπτει πλέον, ως σημείο τομής της παράλληλης προς τον άξονα της παραβολής, η οποία άγεται από το μέσον του *ΑΒ*, με το παραβολικό τόξο. Πρόκειται για την κορυφή της παραβολής. □

**Τι είναι Απόδειξη;**

Ο Αρχιμήδης δεν θεωρούσε την παραπάνω διαδικασία *απόδειξη* της σχέσης (8), αλλά μάλλον μια χρήσιμη *μηχανική* διαδικασία, μέσα από την οποία σχημάτισε αρχικά την πεποίθηση ότι το μαθηματικό συμπέρασμα ήταν ορθό, ώστε να μπορέσει να διατυπώσει με ακριβείς όρους την πρότασή του. Για ποιο λόγο η μηχανική διαδικασία δεν χαρακτηρίστηκε από τον Αρχιμήδη ως *απόδειξη*; Κάποιες εύλογες εικασίες είναι δυνατόν να διατυπωθούν προς αυτή την κατεύθυνση. Ο Dijkterhuis (1957) σημειώνει ότι ο Αρχιμήδης κάνει χρήση δύο διαφορετικών αρχών στην παραπάνω ευρετική διαδικασία. Πρώτον, ενός πλαισίου ιδεών οι οποίες προέρχονται από τη Μηχανική, καθώς αντιλαμβάνεται τα γεωμετρικά σχήματα προσαρμοσμένα σε ένα μοχλό με τρόπο ώστε ο μοχλός να παραμένει σε ισορροπία, και κατόπιν διατυπώνει τις σχετικές συνθήκες ισορροπίας (*βαρυκεντρική ή μηχανική μέθοδος)*. Δεύτερον, της ιδέας ότι ένα επίπεδο σχήμα αποτελείται από όλα τα ευθύγραμμα που άγονται παράλληλα προς μια κατεύθυνση και ως εκ τούτου, το εμβαδόν του μπορεί να προκύψει ως το «άθροισμα των μηκών» όλων αυτών των ευθυγράμμων τμημάτων (*μέθοδος των αδιαιρέτων*).

Η μαθηματική επιφύλαξη του Αρχιμήδη δεν φαίνεται να προέρχεται από την εφαρμογή της μηχανικής μεθόδου. Αυτήν εξάλλου την χρησιμοποίησε ξανά στην πραγματεία του για τον Τετραγωνισμό της Παραβολής, δηλαδή στην επίσημη δημοσίευση των συμπερασμάτων του, και συνεπώς μπορούμε με σχετική ασφάλεια να υποθέσουμε ότι ικανοποιούσε όλες τις απαιτήσεις ακρίβειας και αυστηρότητας. Ο δισταγμός και η αμφιβολία έχουν να κάνουν με την εφαρμογή της μεθόδου των *αδιαιρέτων*. Εδώ ο Αρχιμήδης ήρθε αντιμέτωπος με το μείζον και αντιφατικό για την αρχαιοελληνική σκέψη ζήτημα των άπειρων διαδικασιών και των προϋποθέσεων ένταξής τους στην αποδεικτική διαδικασία. Το θεμελιώδες δίλημμα περί διακριτής ή συνεχούς συγκρότησης της ύλης είχε μεταφερθεί ήδη νωρίτερα στα Μαθηματικά και είχε βρει μάλιστα τη γλαφυρή διατύπωσή του στην απορία του Δημόκριτου: αν οι παράλληλες προς την βάση του κώνου τομές είναι ίσες, πώς διαφοροποιείται ο κώνος από τον κύλινδρο; Αν πάλι βαίνουν μειούμενες προς την κορυφή, τότε η επιφάνεια αντί να είναι ομαλή δεν θα έπρεπε να είναι κλιμακωτή;

Η εντυπωσιακή επιχειρηματολογία του Ζήνωνος του Ελεάτη στο παράδοξο της κίνησης φαίνεται ότι αποτέλεσε για τον 4$^{o}$ π. Χ. αιώνα μια τεράστιας απήχησης διανοητική πρόκληση περί του μαθηματικού συνεχούς και σήμανε το τέλος στις πρόχειρες χρήσεις των άπειρων διαδικασιών. Η μέθοδος της εξάντλησης με την διπλή εις άτοπον απαγωγή στο έργο του Αρχιμήδη επανέφερε την αυστηρότητα στις εν λόγω διαδικασίες.

Η *Έφοδος* μας αποκάλυψε –και αυτό αποτελεί μια πρόσθετη σημαντική συνεισφορά της – ότι η μέθοδος των αδιαιρέτων ήταν μεν απαγορευμένη από τις δημοσιευμένες πραγματείες, είχε όμως αμείωτη επιρροή στο μαθηματικό εργαστήρι, εκεί όπου διαμορφώνονταν οι ιδέες. Αποκάλυψε επίσης ότι η παρουσίαση των μαθηματικών εννοιών είναι διαχρονικά κάτι πολύ διαφορετικό από την αρχική ανακάλυψή τους. Ο Αρχιμήδης ενόσω αναζητεί καινούργια μαθηματικά αποτελέσματα, θεωρεί ότι το παραβολικό τμήμα αποτελείται από όλες τις ευθύγραμμες συνιστώσες του και ότι ένα στερεό αποτελείται από όλες τις παράλληλες επίπεδες τομές του˙ και όταν μιλάει για ένα σχήμα, χρησιμοποιεί τις «χαλαρές» εκφράσεις “όλα τα ευθύγραμμα τμήματα” ή “όλοι οι κύκλοι”. Αυθαίρετοι τρόποι σκέψης ενσωματωμένοι στην πλέον ορθολογική επιστήμη;

Από τη σκοπιά της γνωσιακής επιστήμης, πρόκειται για ένα πλέγμα εννοιολογικών περιεχομένων με άμεση ενσώματη προέλευση. Η *συνεχής* διαδικασία έχει περιγραφεί από μεταγενέστερους εμβληματικούς μαθηματικούς όπως ο Newton και ο Leibniz τον 17$^{o}$ αιώνα, ως μια διαδικασία που εκτυλίσσεται χωρίς κενά ή διακοπές ή ξαφνικές απότομες αλλαγές. Το γνωσιακό περιεχόμενο τέτοιων περιγραφών περιλαμβάνει κίνηση, ροές, διαδικασίες, μεταβολές στο χρόνο και συνοπτικές, ολιστικές θεωρήσεις. Θεωρούνται εννοιολογικές επεκτάσεις εικονοσχημάτων και εννοιολογικών απεικονίσεων σύμφυτων με το ανθρώπινο εννοιολογικό σύστημα, οι οποίες εδράζονται μεταξύ άλλων στο σχήμα Αφετηρία-Διαδρομή-Προορισμός, στην μεταφορά της πλασματικής κίνησης και σε βασικές εννοιολογικές μίξεις (Núñez & Lakoff, 1998).

Η μηχανική μέθοδος στην περίπτωση του τετραγωνισμού, εμφανίζει αμέσως μια εννοιολογική μεταφορά: Το Ευθύγραμμο Τμήμα Είναι Ράβδος. Τα τμήματα *ΧΥ, Χ΄Υ΄* και *ΧΩ* (Σχήμα 2) λογίζονται σαν ράβδοι κατασκευασμένες από το ίδιο, ομοιογενές υλικό. Η εννοιολογική μίξη Ευθύγραμμο Τμήμα-Ράβδος παράγει μια καινούργια οντότητα η οποία διατηρεί τις πρωτοτυπικές ιδιότητες ενός ευθυγράμμου τμήματος (έχει μήκος αλλά όχι πλάτος) ενώ ταυτόχρονα έχει υλική υπόσταση (έχει βάρος). Μάλιστα, στην περίπτωση του *BE*, μπορεί να παίξει ρόλο μοχλού. Στην ίδια κατεύθυνση κινείται η μεταφορά Το Σημείο Είναι Υπομόχλιο. Το όλο εννοιολογικό πλέγμα εντάσσεται στο εικονοσχήμα της ισορροπίας. Εν συνεχεία, κατά τον ενσώματο μηχανισμό της *πλασματικής κίνησης* το σημείο *X* διατρέχει το τμήμα *AB*. Το συνακόλουθο τμήμα *XY* «κινείται» παράλληλα προς τον εαυτό του από το σημείο *A* μέχρι το σημείο *B*, διέρχεται μια απειρία ενδιάμεσων θέσεων και «γεμίζει» έτσι τη θεωρούμενη επιφάνεια *ABPYA*. Έτσι, η επιφάνεια *ABPYA* αποτελείται από «όλα» τα τμήματα *XY*. Η συνοπτική θέαση αυτής της άπειρης διαδικασίας, κατά την έννοια της Βασικής Μεταφοράς του Απείρου, επιβάλλει στη διαδικασία ένα μοναδικό όσο και εννοιολογικά «αυτονόητο» πέρας: την επιφάνεια *ABPYA* εν συνόλω. Ταυτόχρονα το *XΩ* σαρώνει το τρίγωνο *ΑΒΓ*. Το όλο σύστημα «ισορροπεί» και η συμπερασματική δομή της ισορροπίας των μοχλών δίνει το τελικό ποσοτικό αποτέλεσμα.

Τα εξαιρετικά γόνιμα μαθηματικά συμπεράσματα που προέκυψαν σε αυτό το γνωσιακό περιβάλλον, χαρακτηρίζονται ως πρόδρομες ιδέες του απειροστικού λογισμού. Όμως, χρειάστηκαν μια μακρά ιστορική περίοδο μαθηματικής ωρίμανσης προς την κατεύθυνση της τυπικής σκέψης, για την οριστική νομιμοποίησή τους.

## Κατακλείδα

Παρά τα ακόμη ανοικτά ερευνητικά θέματα, το ερμηνευτικό μοντέλο των ενσώματων Μαθηματικών παρουσιάζεται ικανό να ερμηνεύσει από *εννοιολογική άποψη* σημαντικές πτυχές της μαθηματικής γνώσης, οι οποίες επιφανειακά εμφανίζονται αποσυνδεδεμένες από την άμεση αισθητικοκινητική εμπειρία και συμπεριφορά.

Τονίζει τη σπουδαιότητα του γλωσσικού οργάνου στην αποκάλυψη του ρόλου των εννοιολογικών μεταφορών κατά την πραγμάτευση των μαθηματικών ιδεών. Ιδιαίτερα, επιχειρεί να διερευνήσει και να κατανοήσει το εννοιολογικό χάσμα το οποίο συχνά υφίσταται ανάμεσα στην τυπική και την ενορατική όψη των Μαθηματικών.

Επιστημολογικά, ανήκει στις «δάνειες θεωρίες», τις ενσωματωμένες πλέον στο πεδίο της έρευνας για τη μαθηματική εκπαίδευση, καθώς αντλεί από το πεδίο της ενσώματης γνωσιακής επιστήμης. Θεωρητικά εργαλεία της τελευταίας έχουν χρησιμοποιηθεί σε ερευνητικές μελέτες στα πεδία του μαθηματικού συμβολισμού, της εξεικόνισης - οπτικοποίησης, της μοντελοποίησης με ή χωρίς τη χρήση τεχνολογίας, των ανισοτήτων, των γραμμικών εξισώσεων, του ορίου και της συνέχειας συναρτήσεων, των διανυσμάτων, της εν γένει μαθηματικής σκέψης και κατανόησης, της μεταφορικής γλώσσας στη Γεωμετρία κ.α.

Γενικότερα, η έννοια του *ενσώματου* καταλαμβάνει σήμερα μια θέση Παραδείγματος στην έρευνα για τη σκέψη και τη μάθηση, παρέχοντας πρόσθετα εργαλεία στην πολυτροπική προσέγγιση της μαθηματικής γνώσης και εκπαίδευσης.

Καινούργια χαρακτηριστικά της μαθηματικής γνώσης αναδύονται συνεχώς, παρότι, με τα λόγια του Δαρβίνου, συχνά «χρησιμοποιούμε παλιούς τροχούς, παλιά ελατήρια και παλιές τροχαλίες».

## Βιβλιογραφία

Barton, B. (2008). *The Language of Mathematics.* Springer.

Dehaene, S. (1977). *The Nunber Sense: How the Mind Creates Mathematics.* New York: Oxford University Press.

Dijkterhuis, E. (1957). *Archimedes.* New York: Humanities Press.

Edwarts, C. H. (1979). *The Historial Development of the Calculus.* New York: Springer Verlag.

Gardner, H. (1987). *The Mind's New Science: A History of the Cognitive Revolution.* New York: Basic Books.

Heath, T. (1953). *The Works of Archimedes.* New York: Dover.
Lakoff, G., & Johnson, M. (2003). *Metaphors We Live By.* London: The University of Chicago Press.
Lakoff, G., & Johnson, M. (1999). *Philosophy in the Flesh. The Embodied Mind and it's Challenge to Wesrern Thought.* New York: Basic Books.
Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From.* Basic Books
Narayanan, S. (1977). Embodiment in Language Understanding: Sensory-Motor Representations for Metaphoric Reasoning about Event Descriptions. (Ph.D. Desertetion).
Núñez, R. (1993a). Approaching Infinity: A view from cognitive psychology. *Proceedings of 15th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathmatics Education*, (σσ. 105-111). North America.
Núñez, R. (2003). Conceptual Metaphor and the Cognitive Foundations of Mathematics: Actual Infinity and Human Imagination. *Metaphor and Contemporary Science (pp. 49-72)* , 49-72. Singapore: National University of Singapore.: B. Baaquie & P. Pang: University Scholars Occasional Papers Series.
Núñez, R. (2005). Creating Mathematical Infinities: Metaphor, Blending, and the beauty of Transfinite Cardinals. *Journal of Pragmatics* (37), 1717-1741.
Núñez, R. (2006). Do Real Numbars Really Move? Στο R. (. Hersh, *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics* (σσ. 171-172). NY: SpringerScience+Business Media, Inc.
Núñez, R. (1999). Embodied Cognition as Grounding for Situatedness and Contex in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics* (39), 45-65.
Núñez, R. (1990). Infinity in Mathematics as a scientific subject matter for cognitive psychology. *Proceedings of the 14th Conference of Internatiomal Group for Psychology of Mathematics Education*, (σσ. 77-84).
Núñez, R. (2000). Mathematical Idea Analysis: What Embodied Cognitive Science Can Say About the Human Nature of Mathematics. *Proceedings of the 24th International Conference, Psychology of Mathematics*, (σσ. 3-22). Hiroshima, Japan.
Núñez, R. (2005). The Cognitive Foundations of Mathematics, The Role of Conceptual Metaphor. *Handbook of Mathematical Cognitin* .
Núñez, R., & Lakoff, G. (1998). What did Weierstrass really define? The cognitive structure of natural and ε-δ continuity. *Mathematical Cognition, 4(2)* , 85-101.
Talmy, L. (1988). Force Dynamics in language and cognition. *Cognitive Science,12* , 49-100.
Wilson, M. (2002, 9(4)). Six views of embodied cognition. *Psychonomic Bulletin & Review* , 625-636.
Αναπολιτάνος, Δ. Α. (1985). *Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών.* Αθήνα: Εκδόσεις Νεφέλη.
Μόζερ, Α. (2007). *Όψη*. Ανάκτηση 06/ 05/ 2010, από Πύλη για την Ελληνική γλώσσα και την γλωσσική εκπαίδευση: www.greek-language.gr/greekLang/modern_greek/tools/lexica/glossology/
Στράντζαλος, Χ. (1989). *Η Εξέλιξη των Ευκλείδειων και των Μη Ευκλείδειων Γεωμετριών.* Αθήνα: Εκδόσεις Καρδαμίτσα.

*Σημείωση*

*Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών «Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά» της Σχολής Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου και αποτελεί μέρος της διπλωματικής εργασίας του συγγραφέως, η οποία εκπονήθηκε υπό την επίβλεψη του Δρ. Ανούση Μιχάλη, Καθηγητή Πανεπιστημίου Αιγαίου, Τμήμα Μαθηματικών* (mano@aegean.gr).

*Open Education - The Journal for Open and Distance Education and Educational Technology*
*Volume 8, Number 1, 2012 Section one © Open Education ISSN: 1791-9312*

**Διδασκαλία των Μαθηματικών: χθες και σήμερα**

**Teaching Mathematics: past and present**

**Κωστίνος Δημήτρης**
Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας
Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο
diko-mas@otenet.gr

**Περίληψη**

Η επιστήμη των μαθηματικών δεν παύει να αντιμετωπίζεται με δέος από όσους ανακαλύπτουν τη λογική και τις εφαρμογές της. Το σχολείο παίζει καθοριστικό ρόλο στην ανακάλυψη αυτή, καθώς οδηγεί το μαθητή στα μονοπάτια της μαθηματικής σκέψης που, με την κατάλληλη καθοδήγηση, μπορεί να επηρεάσει την οικοδόμηση της δικής του προσωπικότητας και ζωής.

Την καθοδήγηση του εκπαιδευόμενου στα μονοπάτια αυτά αναλαμβάνει ο μαθηματικός. Ο τελευταίος, έχοντας αφήσει πίσω του τη δασκαλοκεντρική διδακτική πράξη του περασμένου αιώνα και ακολουθώντας νέα προγράμματα σπουδών που έχουν προκύψει από μακροχρόνιες έρευνες, αντιλαμβάνεται πλέον το ρόλο του ως συνοδοιπόρου στις αναζητήσεις και τους πειραματισμούς των μαθητών του. Στο έργο του αυτό έχει πλέον στη διάθεσή του και τα σύγχρονα τεχνολογικά μέσα, που του παρέχουν ασύγκριτα περισσότερες δυνατότητες. Με την κατάλληλη αξιοποίηση της υλικοτεχνικής υποδομής και των διαθέσιμων λογισμικών ο μαθηματικός μπορεί να εξοικονομήσει πολύτιμο χρόνο από την εκτέλεση απλών μηχανικών εργασιών, τον οποίο θα διαθέσει εποικοδομητικότερα για την ανάλυση και την επεξήγηση τρόπων προσέγγισης διαφόρων προβλημάτων.

Η κριτική αντιμετώπιση της νέας τεχνολογίας διασφαλίζει αφενός τη θέση του εκπαιδευτικού ως καθοδηγητή σε μια μαθητοκεντρική τάξη και αφετέρου τη βέλτιστη απόδοση των χρησιμοποιούμενων μέσων. Κατ' αυτόν τον τρόπο ο μαθηματικός μπορεί να συντελέσει και στην αναβάθμιση του προγράμματος σπουδών, υποδεικνύοντας πραγματικούς στόχους και συνδέοντας τη διδακτική πράξη με το κοινωνικό γίγνεσθαι. Έτσι αναδεικνύεται ο πραγματικός ρόλος της τεχνολογίας και του διδάσκοντος στο νέο ελπιδοφόρο αλλά και γεμάτο παγίδες εκπαιδευτικό πλαίσιο.

**Abstract**

Mathematics has always been treated with awe by those exploring its logic and applications. School plays an essential part in this exploration, since it shows students the paths of mathematical reasoning which, if properly followed, may help them build their personality and life.

Professors of mathematics lead the way along these paths. They have left behind the past century teaching methods which place professor in the centre of teaching; they follow the reformed curricula which have resulted from long lasting mathematical research and they now realize their role as fellow-travellers sharing questions and experimentations of their students, whatever these may be. In this task, professors of mathematics can nowadays use, in addition to traditional teaching aids,

new information technologies, which provide them with incomparably more skills and options. Proper exploitation of material and technical infrastructure, as well as of available software packages, can save professors of mathematics a great deal of time and work for the execution of simple routine work, in favour of analyzing and explaining different approaches to various problems.

New technology potential, if treated critically by professors, on the one hand guarantees the leading part of professors in a class focused on student and on the other maximizes the effect of the aids used. In doing so, professors of mathematics may also contribute to the upgrading of curricula, pointing out realistic aims and connecting teaching to social needs. It's this critical treatment that shows off the actual role that technology and professor can play in the new promising but quite tricky educational environment that emerges.

**Λέξεις κλειδιά**
*διδασκαλία μαθηματικών, μαθηματικός, νέες τεχνολογίες*

## Η εξελικτική πορεία στις έρευνες και αντιλήψεις για τη διδασκαλία των μαθηματικών

Η επιστήμη των μαθηματικών αποτελεί ένα ερευνητικό πεδίο σε διαρκή εξέλιξη. Τον 20ο αιώνα η έρευνα αφορούσε κυρίως την πρωτοβάθμια εκπαίδευση, ενώ από τη δεκαετία του '60 και μετά το ενδιαφέρον στρέφεται και στη δευτεροβάθμια και μεταδευτεροβάθμια εκπαίδευση. Κατά τις δεκαετίες '70-'90 οι ερευνητές ασχολούνται πολύ και με την εκπαίδευση των Μαθηματικών στο πλαίσιο της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, καθώς και με τη διδασκαλία των μαθηματικών σε ενήλικες οι οποίοι για κάποιο λόγο επιθυμούν να συνεχίσουν τη φοίτησή τους στο σχολείο.

Η ίδια διεύρυνση χαρακτηρίζει και το γνωστικό αντικείμενο της διδασκαλίας των μαθηματικών. Έτσι τις δεκαετίες '60-'70 τους μαθηματικούς απασχολεί κυρίως τι πρέπει να διδαχθεί και πώς: ποιες μαθηματικές ενότητες να συμπεριλάβουν στο πρόγραμμα, σε ποια θεωρητική βάση, με ποια σειρά, τι πρέπει να κάνει ο εκπαιδευτικός στην τάξη και ποια χρονική στιγμή, τι πρέπει να κάνει ο μαθητής, πώς πρέπει να είναι τα σχολικά εγχειρίδια και πώς να χρησιμοποιούνται τα τεχνικά βοηθήματα διδασκαλίας ούτως ώστε να εξυπηρετούν τη «σωστή» μετάδοση των γνώσεων από τον εκπαιδευτικό στον εκπαιδευόμενο.

Στο επίκεντρο της διδακτικής πράξης βρίσκεται ο εκπαιδευτικός-αυθεντία, ο οποίος ακολουθεί απαρέγκλιτα την πορεία που του χαράζει το σχολικό εγχειρίδιο και κατευθύνει τον εκπαιδευόμενο με ασφάλεια και χωρίς εκπλήξεις στο μονοπάτι της μετάδοσης και εμπέδωσης της έτοιμης μαθηματικής γνώσης. Όλα είναι προγραμματισμένα και αναμενόμενα: παράδοση μαθηματικής θεωρίας, επίλυση ασκήσεων εφαρμογής και εξέταση των μαθητών για να αξιολογηθεί πόσο καλά αφομοίωσαν το μάθημα. Στο περιβάλλον αυτό ο μεν εκπαιδευτικός επαναπαύεται στις γνώσεις που απαιτούνται για τη διδασκαλία των μαθηματικών ενοτήτων που περιλαμβάνονται στο πρόγραμμα σπουδών, ο δε εκπαιδευόμενος αποδέχεται άκριτα και παθητικά τις γνώσεις που του παρέχονται, ενώ δεν υπάρχει ούτε κίνητρο μάθησης και πραγματική ανταλλαγή απόψεων ούτε καλλιέργεια της κριτικής ικανότητας και της μαθηματικής σκέψης.

Από τη δεκαετία του '70 και μετά η έννοια του προγράμματος σπουδών εμπλουτίζεται σταδιακά με διδακτικούς στόχους, προσεγγίσεις και τρόπους αξιολόγησης. Κατά συνέπεια οι ερευνητές αναζητούν απαντήσεις σε ερωτήματα όπως ποιοι πρέπει να είναι οι στόχοι της διδασκαλίας των μαθηματικών και γιατί, ποιοι εμπλέκονται στην κατάρτιση των προγραμμάτων σπουδών και πώς μπορεί ο εκπαιδευτικός να συμμετέχει εποικοδομητικά στη διαδικασία αυτή, τι σημαίνει αναμόρφωση του προγράμματος διδασκαλίας των μαθηματικών και ποιοι παράγοντες την επηρεάζουν, πώς αλλάζει ο ρόλος του εκπαιδευτικού και πώς μπορεί να αξιοποιηθεί σωστά το υλικό και η τεχνογνωσία. Οι απαντήσεις στα ερωτήματα αυτά εμπεριέχουν θεσμικές και κοινωνικοπολιτιστικές πτυχές και διαφοροποιούνται από χώρα σε χώρα και ανάλογα με τις ομάδες αποδεκτών της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Όπως φαίνεται από άρθρα που δημοσιεύονται στο περιοδικό New trends in mathematics teaching, Vol. III (1973) και IV (1979), της UNESCO, τα οποία απηχούν τόσο τις διεθνείς όσο και τις εθνικές τάσεις, αρχίζει να εκδηλώνεται ζωηρό ενδιαφέρον για μια αναδιοργάνωση του προγράμματος μαθηματικής εκπαίδευσης. Είναι βεβαίως εξαιρετικά δύσκολο να εφαρμοστούν στην εκπαιδευτική πραγματικότητα οι όποιες θεωρητικές ιδέες, καθώς προσκρούουν σε διάφορα εμπόδια του εκπαιδευτικού συστήματος κάθε χώρας, π.χ. φορείς (συχνά κρατικοί) σχεδιασμού του προγράμματος σπουδών, φορείς (κρατικοί και ιδιωτικοί) εμπλεκόμενοι στη διδασκαλία των μαθηματικών, εργοδότες και γονείς, αλλά συχνά και τους ίδιους τους μαθηματικούς, ο ρόλος των οποίων μάλιστα είναι πρωταγωνιστικός στην εφαρμογή του προγράμματος.

Μέσα στο γενικότερο αυτό κλίμα ανανέωσης είναι αυτονόητο ότι οι μαθηματικοί οφείλουν να είναι πλήρως καταρτισμένοι και ως προς το γνωστικό αντικείμενο αλλά και από παιδαγωγική άποψη, προκειμένου να ανταποκριθούν στο νέο τους ρόλο που τους θέλει συντονιστές της διδασκαλίας και καθοδηγητές των προσπαθειών των εκπαιδευομένων να αυτονομηθούν και να αναπτύξουν αυτό που λέμε «μαθηματική λογική». Ο μαθηματικός παύει να κινείται με σαφώς καθορισμένο τρόπο στο πλαίσιο ενός αυστηρά δομημένου προγράμματος σπουδών με στόχο την απλή μετάδοση γνώσεων και καλείται να συντονίσει ποικίλες δραστηριότητες για ολόκληρη την τάξη, μεμονωμένους διδασκόμενους ή ομάδες. Εμπλέκεται συνεπώς ενεργά στη μαθησιακή διαδικασία, παρακολουθεί στενά την εξέλιξή της, οδηγεί τους εκπαιδευόμενους στη διερεύνηση, την ανακάλυψη και τη δημιουργική επίλυση προβλημάτων.

Μεγάλη σημασία αποδίδεται επομένως στην εκπαίδευση των Μαθηματικών και δημοσιεύονται πολλά σχετικά άρθρα σε διεθνή περιοδικά. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε δύο τεύχη του περιοδικού Studies in mathematics education, Vol.3 (1984) και Vol.4 (1985), της UNESCO, εξολοκλήρου αφιερωμένα στην εκπαίδευση των δασκάλων και καθηγητών μαθηματικών.

Με την εξέλιξη της γνωστικής επιστήμης και της γνωστικής ψυχολογίας αναδεικνύεται επίσης η επίδραση των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών στον τρόπο διδασκαλίας των μαθηματικών και τελικά στον τρόπο μάθησης των εκπαιδευομένων. Κάθε μαθηματικός αντιλαμβάνεται την επιστήμη του και τη διδακτική της με διαφορετικό τρόπο, σύμφωνα με τον οποίο προσεγγίζει τα μαθηματικά προβλήματα και επιλέγει τη γνωστική στρατηγική που χρησιμοποιεί. Οι πεποιθήσεις του δηλαδή καθορίζουν τον τρόπο με τον οποίο διδάσκει, χειρίζεται τις μαθηματικές γνώσεις και επικοινωνεί με τους εκπαιδευόμενους. Μεγάλο τμήμα της σύγχρονης έρευνας για τη μαθηματική εκπαίδευση ασχολείται με αυτές τις πεποιθήσεις και το επάγγελμα του μαθηματικού εν γένει.

Οι εκπαιδευόμενοι, από την πλευρά τους, έχουν τις δικές τους γνωστικές και μαθησιακές διεργασίες, οι οποίες διαφοροποιούνται ανάλογα με την ηλικία και τη γνωστική τους ανάπτυξη. Διαμορφώνουν επίσης τις δικές τους αντιλήψεις και στάσεις απέναντι στα διδασκόμενα αντικείμενα, εν προκειμένω τα μαθηματικά. Οι διεργασίες αυτές και οι παράγοντες που συντελούν στη δημιουργία αυτών των αντιλήψεων αποτελούν από τη δεκαετία του ’80 και μέχρι σήμερα αντικείμενο εκτεταμένης έρευνας που φιλοδοξεί να καλύψει κάθε πτυχή της διαμόρφωσης μαθηματικών εννοιών, στάσεων και στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων, γνωστικών σχημάτων, κ.λπ. στους εκπαιδευόμενους.

Καθώς η διδακτική πράξη λαμβάνει χώρα στην τάξη ενός εκπαιδευτικού ιδρύματος με πρωταγωνιστές τους εκπαιδευτικούς και τους διδασκόμενους, επιρροές ασκούνται και από την αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο αυτών συμμετεχόντων αλλά και των διδασκομένων μεταξύ τους. Σε ένα σημαντικό άρθρο του που δημοσιεύθηκε το 1980 στο περιοδικό Educational Studies in Mathematics ο Bauersfeld αναφέρεται σε τέσσερεις «κρυμμένες πτυχές αυτού που ονομάζουμε πραγματικότητα μιας τάξης μαθηματικών: η διδασκαλία και η εκμάθηση των μαθηματικών πραγματοποιούνται και αποκτούν νόημα μέσα από την ανθρώπινη αλληλεπίδραση, λαμβάνουν χώρα σε εκπαιδευτήρια, επηρεάζουν αισθητά τη ζωή του εκπαιδευόμενου και την ανάπτυξη της προσωπικότητάς του και χαρακτηρίζονται από εξαιρετικά μεγάλη πολυπλοκότητα που πρέπει να περιοριστεί δραστικά αλλά και να αντιμετωπιστεί δεόντως.». Κατά τον Bauersfeld οι πτυχές αυτές «αποτελούν τα αδύνατα σημεία της έρευνας».

Οι έρευνες όμως επεκτείνονται και πέρα από τη μικροκοινωνιολογία της τάξης και του εκπαιδευτηρίου, στις διάφορες κοινωνίες μέλη των οποίων είναι οι εκπαιδευτικοί και οι εκπαιδευόμενοι. Διερευνάται πώς οι κοινωνίες αυτές με τα ιδιαίτερα κοινωνικοπολιτικά, οικονομικά, τεχνολογικά και πολιτιστικά χαρακτηριστικά τους, καθώς και το φύλο, η εθνότητα, η γλώσσα, τα ήθη και τα έθιμα προάγουν ή αποτελούν τροχοπέδη για τη μαθηματική εκπαίδευση. Οι έρευνες αυτές συνιστούν τα λεγόμενα εθνομαθηματικά (για να αποδώσουμε στα ελληνικά τον όρο ethno-mathematics που προέρχεται ετυμολογικά από δύο ελληνικά συνθετικά).

Παράλληλα διεξάγονται διαπολιτισμικές μελέτες, που συγκρίνουν επιδόσεις που καταγράφονται και στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων που ακολουθούνται σε διάφορες χώρες. Σκοπός τους είναι να αποκαλύψουν πολιτιστικές ιδιαιτερότητες που πιθανόν να ευθύνονται για τις διαφορές που παρατηρούνται, αλλά και τις βέλτιστες πρακτικές που, αν συνδυαστούν και εφαρμοστούν, ενδέχεται να βελτιστοποιήσουν και τη διδασκαλία και εκμάθηση των μαθηματικών.

Στα τέλη της δεκαετίας του ’80 άρχισαν να διεξάγονται έρευνες και στον τομέα της αξιολόγησης της μαθηματικής εκπαίδευσης. Τα ερωτήματα που τέθηκαν καλύπτουν αφενός την υφιστάμενη αξιολόγηση, πώς δηλαδή οι καθιερωμένοι τρόποι αξιολόγησης επηρεάζουν τη διδασκαλία και την εκμάθηση των μαθηματικών, και αφετέρου την επιθυμητή, δηλαδή τους τρόπους αξιολόγησης που πρέπει να εφεύρουμε και να εφαρμόσουμε για να σταθμίσουμε κατά πόσο επιτυγχάνονται οι στόχοι που επιδιώκουμε με τη μαθηματική εκπαίδευση.

Εντούτοις, όλο αυτό το πολύτιμο ερευνητικό υλικό κινδυνεύει να μείνει αναξιοποίητο χωρίς την κατάλληλη επεξεργασία και συστηματοποίηση, ούτως ώστε να καταλήξουμε σε αξιόπιστες γενικεύσεις και έγκυρα πορίσματα. Όπως αναφέρει ο Mogens Niss σε εισήγησή του στο $9_o$ Διεθνές Συνέδριο για τη Μαθηματική Εκπαίδευση «δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι ο τελικός στόχος κάθε επιστημονικής προσπάθειας είναι να περιορίσει όσο χρειάζεται την πολυπλοκότητα».

Αξίζει, τέλος, να επισημάνουμε μια παρατήρηση του Mogens Niss στην προαναφερθείσα εισήγηση: υπάρχει χάσμα μεταξύ των μαθηματικών-ερευνητών και των μαθηματικών-εκπαιδευτικών, το οποίο μάλιστα διευρύνεται σε ανησυχητικό βαθμό. Δεν μπορούμε βεβαίως να ζητάμε από τους ερευνητές θαυματουργές συνταγές επιτυχημένης διδασκαλίας, αφού η διδακτική πράξη περιλαμβάνει, όπως είδαμε, τόσες μεταβλητές και αστάθμητες παραμέτρους που, αν προσπαθήσουμε να διδάξουμε τα ίδια μαθηματικά με τον ίδιο τρόπο σε διαφορετικούς αποδέκτες, το αποτέλεσμα θα είναι διαφορετικό.

Μπορούμε όμως να περιορίσουμε το χάσμα δημιουργώντας γέφυρες ουσιαστικής επικοινωνίας και ανταλλαγής απόψεων μεταξύ ερευνητών και εκπαιδευτικών. Αν αντιστρέφονται κατά καιρούς οι ρόλοι, με τους ερευνητές να συμμετέχουν στη διδασκαλία των μαθηματικών και τους εκπαιδευτικούς στην έρευνα, αφενός η έρευνα θα γίνει εποικοδομητικότερη και αφετέρου η διδακτική πρακτική θα εμπλουτιστεί με νέες προσεγγίσεις και προτάσεις εφαρμογής προς όφελος των διδασκομένων και της ευρύτερης κοινωνίας.

## Σχεδιασμός του προγράμματος σπουδών: εκπαιδευτικοί και μαθηματικοί στόχοι, επιλεκτική χρήση της τεχνολογίας για την επίτευξή τους

Οι μαθηματικοί, όπως εξάλλου και οι εκπαιδευτικοί άλλων ειδικοτήτων, έχουν στη διάθεσή τους ένα πρόγραμμα σπουδών με τις ενότητες που καλούνται να διδάξουν, τους στόχους που τίθενται σε καθεμία, καθώς και κατευθυντήριες γραμμές που τους εξασφαλίζουν ένα είδος οδηγού πλοήγησης στη διδασκαλία του αντικειμένου τους και στην αξιολόγηση των εκπαιδευομένων. Για την κατάρτιση του προγράμματος συνεργάζονται ερευνητές, συγγραφείς, εκπαιδευτικοί, αξιολογητές, εκδότες, καθένας από τους οποίους συμβάλλει από την πλευρά του ώστε το τελικό προϊόν να ανταποκρίνεται όσο το δυνατόν περισσότερο στις πραγματικές ανάγκες και τους εκπαιδευτικούς στόχους του τελικού αποδέκτη, ολόκληρης δηλαδή της εκπαιδευτικής κοινότητας.

Ο Judah L. Schwartz αναφέρει πολύ εύστοχα τρεις βασικούς στόχους του εκπαιδευτικού συστήματος μιας κοινωνίας: να συμβάλει στην ανάπτυξη και καλλιέργεια της προσωπικότητας των πολιτών, να προετοιμάσει τα άτομα για την ένταξή τους στην αγορά εργασίας και να μεταλαμπαδεύσει την πολιτιστική κληρονομιά και τις αξίες της στις επόμενες γενιές. Ανάλογα με τη βαρύτητα που δίνεται σε καθέναν από αυτούς οργανώνεται και η μαθηματική εκπαίδευση και σχεδιάζεται το πρόγραμμα σπουδών.

Αφετηρία λοιπόν για την κατάρτιση ενός προγράμματος σπουδών είναι ο καθορισμός των απώτερων εκπαιδευτικών στόχων, οι οποίοι λειτουργούν σαν ομπρέλα κάτω από την οποία συγκεντρώνεται και οργανώνεται το μαθηματικό υλικό που θα διδαχθεί, επιλέγονται τα μέσα διδασκαλίας που θα εξυπηρετήσουν με τον καλύτερο τρόπο την επίτευξη των στόχων και εξετάζονται οι πρακτικές λεπτομέρειες εφαρμογής. Οι στόχοι αυτοί γίνονται αποδεκτοί αξιωματικά από τους συμμετέχοντες στο σχεδιασμό και περνούν έμμεσα μηνύματα και πεποιθήσεις στους διδασκόμενους.

Στη συνέχεια, προκειμένου να οργανωθεί σωστά το μαθηματικό υλικό και να καθοριστούν οι επιμέρους μαθηματικοί στόχοι της διδασκαλίας, χρειάζεται να γίνει διαχωρισμός των μαθηματικών αντικειμένων και των μαθηματικών ενεργειών. Πρέπει επομένως να καθορίσουμε ποια μαθηματικά αντικείμενα (π.χ. ποσοτικά μεγέθη, σχήματα, συναρτήσεις, κ.λπ.) θέλουμε να μάθουν οι εκπαιδευόμενοι να χρησιμοποιούν με ευχέρεια και τι είδους ενέργειες να κάνουν με αυτά (π.χ. παρατήρηση και συγκέντρωση ποιοτικών και ποσοτικών δεδομένων, διαμόρφωση τεκμηριωμένων και λογικών κρίσεων για ό,τι είναι χρήσιμο ή περιττό σε δεδομένη κατάσταση, υπολογισμοί μεγεθών, κ.λπ.).

Σε ένα τέτοιο πλαίσιο δόμησης του προγράμματος σπουδών για τα μαθηματικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν και τεχνολογικά εργαλεία που παρέχουν στον εκπαιδευόμενο δυνατότητες διατύπωσης και διερεύνησης εικασιών, συλλογής, αξιολόγησης και ανάλυσης δεδομένων, πειραματισμού με την κατασκευή μοντέλων, εφεύρεσης λογικών διαδικασιών που αντικαθιστούν τις μηχανικές, καθώς και βαθύτερης και ευρύτερης κατανόησης αφηρημένων εννοιών. Το δυναμικό των τεχνολογικών αυτών μέσων ενισχύει το πρόγραμμα προς την επίτευξη των μαθηματικών και εκπαιδευτικών στόχων του.

Η διατύπωση και διερεύνηση εικασιών για μαθηματικά αντικείμενα αποτελεί την πεμπτουσία της μαθηματικής επιστήμης. Η διαδραστικότητα που χαρακτηρίζει το περιβάλλον των σύγχρονων εκπαιδευτικών λογισμικών τα καθιστά ιδιαίτερα φιλικά προς το χρήστη και διευκολύνει αυτή τη διαδικασία. Το λογισμικό παρακολουθεί πώς αλληλεπιδρά ο χρήστης με το περιβάλλον και αναλύει αυτή την αλληλεπίδραση στα χρησιμοποιούμενα αντικείμενα και στις ενέργειες που εκτελούνται σε αυτά. Στη συνέχεια απομνημονεύει το σύνολο των ενεργειών ως ενιαία διαδικασία που μπορεί να επαναληφθεί σε άλλα αντικείμενα. Συνεπώς, αν ο χρήστης ανακαλύψει κάποιες ενδιαφέρουσες ιδιότητες σε ένα αντικείμενο μπορεί να υποθέσει ότι θα τις ξανασυναντήσει και σε άλλα και να επιβεβαιώσει την εικασία του εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία σε διαφορετικά αντικείμενα.

Για παράδειγμα, αν κατασκευάσουμε σε περιβάλλον δυναμικού λογισμικού τρίγωνο ΑΒΓ και ενώσουμε τα μέσα ΔΕ των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, τότε βλέπουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ είναι ίσο με το μισό του ΒΓ. Μετακινώντας σε διάφορες θέσεις την κορυφή Α παρατηρούμε ότι το ΔΕ εξακολουθεί να είναι ίσο με το μισό του ΒΓ.

Με το διαδίκτυο και γενικότερα τα αυτοματοποιημένα μέσα που έχει σήμερα στη διάθεσή του ο εκπαιδευόμενος για να συλλέγει, να αξιολογεί και να αναλύει δεδομένα εξοικονομεί πολύ κόπο και χρόνο και απαλλάσσεται από τα λάθη καταγραφής. Παράλληλα εξασφαλίζει ποιοτικότερη ανάλυση και εξοικειώνεται με χώρους πέραν των τριών διαστάσεων και την κατανόηση κάθε είδους δεδομένων. Λόγω όμως της δραματικής αύξησης του όγκου των δεδομένων, απαιτείται μεγαλύτερη προσοχή στην αξιολόγηση της εγκυρότητας και της καταλληλότητάς τους για την εκάστοτε ανάλυση.

Μία ακόμα δυνατότητα της σύγχρονης τεχνολογίας που μπορεί να αξιοποιηθεί στην εκπαίδευση, στο πλαίσιο των εκπαιδευτικών και μαθηματικών στόχων που έχουν τεθεί, αφορά την προαγωγή των μηχανικά εκτελούμενων εργασιών σε λογικές συνειδητές διαδικασίες. Οι εκπαιδευόμενοι καλούνται να εφεύρουν τρόπους να επιτύχουν συγκεκριμένους στόχους χωρίς τη βοήθεια συγκεκριμένων μαθηματικών αντικειμένων ή ενεργειών. Κατ' αυτόν τον τρόπο εμβαθύνουν στην κατανόηση διαφόρων αντικειμένων (π.χ. υπολογιστικών αλγορίθμων) ή ενεργειών (π.χ. σχεδιασμός περίπλοκων σχημάτων) που συνήθως τα βρίσκουν έτοιμα στο υπολογιστικό περιβάλλον.

Καλούνται, για παράδειγμα, να κατασκευάσουν σε δυναμικό λογισμικό τρίγωνα και τετράπλευρα περιγεγραμμένα σε κύκλο χρησιμοποιώντας μόνο σημεία και ευθύγραμμα τμήματα και όχι τα έτοιμα τρίγωνα και τετράπλευρα που περιλαμβάνονται στο λογισμικό.

Το περιβάλλον των σύγχρονων εκπαιδευτικών λογισμικών συμβάλλει πολλαπλά στη βαθύτερη και ευρύτερη κατανόηση αφηρημένων εννοιών, εφόσον ο χρήστης του «διατηρεί τον έλεγχο είτε του πνευματικού περιεχομένου των προσπαθειών του είτε του τρόπου αλληλεπίδρασης με το περιεχόμενο ή και των δύο» (J. L. Schwartz). Υποστηρίζει π.χ. τη δημιουργία και επεξεργασία γραφικών και δίνει στο χρήστη τη δυνατότητα να τροποποιήσει τον τύπο μιας συνάρτησης και να παρατηρήσει τις συνέπειες της τροποποίησης και στον τύπο και στη γραφική παράσταση. Κάποια περιβάλλοντα υποστηρίζουν και το αντίστροφο: επιτρέπουν δηλαδή στο χρήστη να τροποποιήσει την καμπύλη της συνάρτησης και να παρατηρήσει τις συνέπειες και στην καμπύλη και στον τύπο.

Μέσα από τις τεράστιες δυνατότητές της η σύγχρονη τεχνολογία είναι σε θέση να δώσει νέα δυναμική στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών. Ανοίγει το δρόμο για την επεξεργασία νέων μαθηματικών πεδίων, αλλά και για την προσέγγιση των ήδη γνωστών θεμάτων με καινοτόμους και ενδιαφέροντες τρόπους που κρατούν σε εγρήγορση τον εκπαιδευόμενο και του δίνουν έμπνευση και κίνητρο για νέους πειραματισμούς. Ενώ με τους συμβατικούς τρόπους διδασκαλίας, ακόμα και στις ευνοϊκότερες συνθήκες υλοποίησης της εκπαιδευτικής πράξης, ο διδασκόμενος θα έπρεπε να περάσει από πολλά ενδιάμεσα στάδια υπολογισμών και δοκιμών για να δει π.χ. το τελικό αποτέλεσμα διερεύνησης μιας εικασίας, με τα σύγχρονα υπολογιστικά μέσα συντομεύεται κατά πολύ η διαδικασία και δίνεται η ευκαιρία μελέτης περισσότερων περιπτώσεων που θα επιβεβαιώσουν ή θα διαψεύσουν την ερευνώμενη εικασία. Η ιδιότητα του (εξ)ερευνητή συμβάλλει στην ανάπτυξη της αυτοπεποίθησης και αυτοεκτίμησης του εκπαιδευόμενου και τα απτά αποτελέσματα των προσπαθειών του αποτελούν ένα είδος ανταμοιβής που τον ωθεί να προχωρήσει ακόμα παραπέρα.

Παράλληλα οξύνεται η κριτική του ικανότητα και καλλιεργείται το πνεύμα και γενικότερα η προσωπικότητά του. Έχει την αίσθηση ότι συμμετέχει και στο μαθηματικό γίγνεσθαι, όπως συμμετέχει στο γλωσσικό ή το καλλιτεχνικό γίγνεσθαι, και εγκαταλείπει τη θέση του θεατή για να γίνει παράγοντας των μαθηματικών εξελίξεων. Έτσι τα μαθηματικά αρχίζουν να λειτουργούν ως φορέας πολιτισμού και αξιών και αναδεικνύεται η βαθύτερη φύση τους ως πηγής ομορφιάς και απόλαυσης. Επιπλέον, είναι αυτονόητο ότι ένα εκπαιδευτικό σύστημα όπου επιδιώκονται τέτοιοι στόχοι προετοιμάζει με τον καλύτερο τρόπο τους εκπαιδευόμενους και για την αγορά εργασίας.

Όλα τα παραπάνω ίσως δημιουργήσουν μια ιδανική εικόνα για τη χρήση των νέων τεχνολογικών εργαλείων και του διαδικτύου. Ακριβώς όμως λόγω του τεράστιου δυναμικού τους οι νέες τεχνολογίες μπορούν πολύ εύκολα να ξεφύγουν από τον έλεγχό μας και να επιφέρουν αλλαγές σιωπηρά, χωρίς να γίνουν αντιληπτές, αλλαγές που ενδέχεται να αποδειχθούν ακόμα και ανεπιθύμητες. Κινδυνεύει π.χ ο εκπαιδευόμενος να αρκεστεί στην παρατήρηση κάποιου θεωρήματος και να μη μπει στον κόπο να ασχοληθεί με την απόδειξή του, απομακρυνόμενος έτσι από την ουσία της μαθηματικής σκέψης.

Χρειάζεται επομένως να θέσουμε την τεχνολογία στην υπηρεσία των μαθηματικών και όχι το αντίστροφο. Αυτό συνεπάγεται ότι το πρόγραμμα σπουδών θα πρέπει, χωρίς να αποπροσανατολιστεί ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο, να συμπεριλάβει τη διδασκαλία τεχνικών δεξιοτήτων απαραίτητων για την κατανόηση και το χειρισμό των τεχνολογικών μέσων που θα επιλεγούν ως καταλληλότερα για την εξυπηρέτηση των στόχων του.

**Ο καθηγητής μαθηματικών μπροστά στη νέα τεχνολογική πραγματικότητα: ενδοιασμοί και προκλήσεις**

Σήμερα, παρά το γεγονός ότι τα προγράμματα σπουδών έχουν σε μεγάλο βαθμό εκσυγχρονιστεί τόσο ως προς το περιεχόμενο όσο και ως προς τους στόχους και τα προτεινόμενα μέσα διδασκαλίας, τα μαθηματικά εξακολουθούν σε πολλές περιπτώσεις να διδάσκονται με τρόπο που δίνει έμφαση στην απόκτηση ακαδημαϊκών γνώσεων σε βάρος της καλλιέργειας ανεξάρτητου πνεύματος και κριτικής ικανότητας. Μέσα από την πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια γενική μαθηματική παιδεία ο μαθητής μαθαίνει αριθμητική, γεωμετρία, άλγεβρα και λογισμό, αλλά, δυστυχώς, φαίνεται να τα αξιοποιεί μόνο για να εκτελέσει μηχανικές και καθοδηγούμενες ασκήσεις επανάληψης.

Βέβαια, σύμφωνα με τον Piaget και τη θεωρία του κονστρουκτιβισμού – που υποστηρίζει ότι η γνώση κατασκευάζεται μέσα από την εκτέλεση ενεργειών – τέτοιες καθοδηγούμενες ασκήσεις θέτουν τη βάση για την αφαιρετική σκέψη. Μπορούμε επομένως να συμπεράνουμε ότι είναι απαραίτητες, τουλάχιστον στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Αν όμως ο εκπαιδευόμενος περάσει στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και παραμείνει εγκλωβισμένος σε ανάλογες δραστηριότητες, αμφιβάλλω αν θα επέλθει ποτέ το επιθυμητό άλμα προς την ανώτερη μορφή της αφαιρετικής νόησης.

Στο σημείο αυτό ακριβώς χρειάζεται το χέρι βοήθειας του εκπαιδευτικού, που θα βοηθήσει τον εκπαιδευόμενο να αυτενεργήσει, να ερευνήσει, να επαληθεύσει και να φτάσει σε συμπεράσματα και σε αποδείξεις. Και εδώ είναι που ο καθηγητής μαθηματικών μπορεί να αξιοποιήσει τις ευκαιρίες που του παρέχουν, όπως είδαμε και παραπάνω, οι νέες τεχνολογίες, αρκεί να είναι σε θέση να διακρίνει εάν, πότε, πώς και για ποιον σκοπό θα τις χρησιμοποιήσει.

Κατ' αρχήν να διευκρινίσουμε ότι τα νέα τεχνολογικά μέσα είναι ένα ακόμα μέσο διδασκαλίας που έρχεται να προστεθεί στον πίνακα, το χαρτί, το βιβλίο και τα παραδοσιακά εποπτικά μέσα, αυξάνοντας το εύρος των επιλογών που έχει στη διάθεσή του ο εκπαιδευτικός. Η χρήση τους επομένως είναι προαιρετική και ανάλογη των εκάστοτε στόχων. Τα λογισμικά μπορούν να διαχωριστούν με κριτήριο την εκπαιδευτική βαθμίδα στην οποία απευθύνονται, καθώς και τα μαθηματικά πεδία που καλύπτουν.

Προκειμένου ο εκπαιδευτικός να είναι σε θέση να αξιοποιήσει τις διαθέσιμες τεχνολογικές λύσεις και να τις συνδυάσει αποτελεσματικά με άλλες τεχνικές επίλυσης προβλημάτων χρειάζεται υπομονή, προσπάθεια και κυρίως θέληση να διευρύνει τις επιστημονικές γνώσεις και τις τεχνικές δεξιότητές του.

Πέρα όμως από την εξοικείωσή του με τα νέα περιβάλλοντα, ο καθηγητής μαθηματικών πρέπει πλέον να κατέχει το γνωστικό αντικείμενο τόσο βαθιά ώστε να μπορεί να ελέγξει κάθε απροσδόκητη τροπή που μπορεί να πάρει το μάθημα. Γιατί αυτός ο γοητευτικός κίνδυνος ελλοχεύει στις τεράστιες δυνατότητες των νέων εκπαιδευτικών λογισμικών και του διαδικτύου. Πρέπει επίσης να είναι διατεθειμένος να εξερευνήσει πρώτος αυτός τις δυνατότητες των λογισμικών που χρησιμοποιεί και να ανακαλύψει πιθανές παγίδες που μπορεί να θέσουν σε κίνδυνο τους επιδιωκόμενους στόχους, για να οδηγήσει στη συνέχεια με ασφάλεια και τους μαθητές του στο ανοιχτό, διαδραστικό περιβάλλον των νέων μέσων.

Στην πράξη όμως πολλοί εκπαιδευτικοί αντιμετωπίζουν με καχυποψία και αρνητική διάθεση τις νέες τεχνολογίες στην εκπαίδευση. Ένας λόγος είναι ότι τα εργαλεία πληροφορικής βελτιώνονται συνεχώς και θέτουν σε δοκιμασία τις γνώσεις του εκπαιδευτικού, ο οποίος είναι υποχρεωμένος να επιμορφώνεται συνεχώς και στο γνωστικό αντικείμενο και στις νέες τεχνολογίες, προκειμένου να μην αποδειχθεί ανεπαρκής. Ένας άλλος λόγος είναι η απόρριψη του πρωτόγνωρου. Αρκετοί καθηγητές που δεν είναι εξοικειωμένοι με τα περιβάλλοντα των εκπαιδευτικών λογισμικών φοβούνται μήπως δεν μπορέσουν να αντεπεξέλθουν στις δυσκολίες που θα συναντήσουν. Κάποιοι άλλοι υποστηρίζουν ότι, αφού κάνουν καλά το μάθημά τους με τα ήδη υπάρχοντα διδακτικά μέσα, δεν υπάρχει λόγος να τα αντικαταστήσουν ή να προσθέσουν κι άλλα.

Ο τελευταίος αυτός λόγος ευσταθεί μόνο εφόσον το νέο εργαλείο εκτελεί την ίδια ακριβώς εργασία με το παλαιό, οπότε η επιλογή του δεύτερου είναι συνειδητή καθώς έχει προκύψει από σύγκριση. Όσο για τους δύο προηγούμενους, μπορούν κάλλιστα να εκλείψουν αν ο εκπαιδευτικός έχει τη διάθεση να συνειδητοποιήσει ότι η εξέλιξη είναι αναπόσπαστο στοιχείο της εκπαίδευσης και οφείλει να συμβαδίζει αντί να αντιστέκεται.

Συμπερασματικά, ο εκπαιδευτικός δεν έχει να φοβηθεί τίποτα από τις νέες τεχνολογίες αν πιστέψει ότι ήρθαν ως εξέλιξη του πίνακα και της κιμωλίας και όχι για να πάρουν τη θέση του. Ο ρόλος του έχει πλέον ξεπεράσει την, κατά τον Paulo Freire, «τραπεζική αντίληψη» της παιδείας που τον θέλει καταθέτη έτοιμων γνώσεων στα «άδεια μυαλά» των μαθητών, όπως καταθέτει κάποιος χρήματα στην τράπεζα, αλλά ο ίδιος παραμένει αναντικατάστατος, εφόσον σέβεται τον εαυτό του και το λειτούργημά του.

*Σημείωση*
*Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών «Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά» της Σχολής Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου και αποτελεί μέρος της διπλωματικής εργασίας του συγγραφέως, η οποία εκπονήθηκε υπό την επίβλεψη του Δρ. Γκιντίδη Δρόσου, Επίκ. Καθηγητή, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, ΕΜΠ,* dgindi@math.ntua.gr

*Open Education - The Journal for Open and Distance Education and Educational Technology*
*Volume 8, Number 1, 2012 Section one © Open Education ISSN: 1791-9312*

# Τα Mathlets στη Μαθηματική Εκπαίδευση

# Mathlets in Mathematical Education

**Κασούτσας Αιμιλιανός**
Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο
Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας
MSc. Μαθηματικός
Εκπαιδευτικός
emilkas@gmail.com

**Περίληψη**

Η παρούσα εργασία αποτελεί μια κριτική παρουσίαση και εφαρμογή των Java Applets (mathlets) στο χώρο της διδασκαλίας των μαθηματικών.

Οι βασικοί στόχοι είναι η σύναψη της μαθηματικής κοινωνίας με μια άκρως υποσχόμενη πτυχή των νέων τεχνολογιών, τις μικροεφαρμογές Java (Java Applets) και να δοθεί έμφαση στα πλεονεκτήματα της χρήσης αυτών στη μαθηματική εκπαίδευση μέσα από την παρουσίαση παραδειγμάτων.

**Λέξεις κλειδιά**

*Mathlets, Java applets, Μαθηματική Εκπαίδευση*

**Abstract**

This study is a critical presentation and implementation of Java Applets (mathlets) in the field of teaching mathematics.

The main objectives are bringing Java Applets, a promising aspect of the new technologies, in the mathematical society and highlighting the advantages of their use in mathematical education by presenting examples.

The special characteristics of Java Applets are introduced and justified as an important tool in math teaching. A comprehensive reference to principles ruling the construction of Mathlets as well as reference to software with which one can create them, are included.

The second part refers to the specific benefits of Mathlets through implementation, evaluation and analytical use of examples in teaching math objects. Specifically, there is an analytical and in-depth reference to the educational novelties which are introduced.

**Keywords**

*Mathlets, Java Applets, Mathematical Education*

## *Α Μέρος : Θεωρητική Προσέγγιση*

## 1. Java Applets

Τα Applets είναι προσομοιώσεις φαινομένων, πειραματικών διατάξεων, μαθηματικών μοντέλων και μαθηματικών σχέσεων, είναι κατά κάποιον τρόπο μικρά εικονικά εργαστήρια που επιτρέπουν την αλληλεπίδραση με τον χρήστη. Ο χρήστης μπορεί μεταβάλλοντας τις παραμέτρους να δει άμεσα τα αποτελέσματα αυτής της παρέμβασής του.

Ως παιδαγωγικά μέσα, τα Java Applets επηρεάζουν τη διδασκαλία των μαθηματικών, μεταφέροντας την εστίασή τους από τις ξεκομμένες δεξιότητες στην περιοχή της διερεύνησης των σχέσεων μεταξύ των μαθηματικών εννοιών. Ως εκ τούτου, τα τελευταία χρόνια πολλά εκπαιδευτικά ιδρύματα στρέφουν την προσοχή τους στην παραγωγή portals με μαθησιακά εργαλεία τα οποία επιτρέπουν στους εκπαιδευτικούς την on-line χρήση Applets και άλλων μαθηματικών υλικών που παρέχουν μάθηση.

Η ένταξή τους στην εκπαιδευτική διαδικασία εκτός από το ότι την εμπλουτίζει με ένα νέο μέσο που είναι ενδιαφέρον και προσελκύει τους μαθητές, δίνει τη δυνατότητα να υλοποιηθεί διερευνητική μάθηση. Έτσι οι μαθητές έχουν ένα εργαλείο πειραματισμού και μάθησης, χωρίς περιορισμούς χρόνου και τόπου, το οποίο συμβάλλει στην κατανόηση εννοιών και φαινομένων και στη διατύπωση γόνιμων ερωτημάτων. Οι εκπαιδευτικοί από την άλλη αποκτούν ρόλο συντονιστή, καθοδηγητή, οργανωτή και ισότιμα συμμετέχοντα στην διαδικασία της μάθησης.

Τα καλά σχεδιασμένα προγράμματα προσομοίωσης Java Applets μπορούν να παρέχουν στους μαθητές ένα κανάλι για να συζητήσουν τις μαθηματικές έννοιες μέσα σε ένα αλληλεπιδραστικό περιβάλλον μάθησης. Στο πλαίσιο αυτών οι μαθητές δεν εκλαμβάνονται ως παθητικοί δέκτες, αλλά ως αυτόνομα και υπεύθυνα άτομα τα οποία συμμετέχουν ενεργά στη διαδικασία της μάθησης, υποβοηθούμενα από τις δυνατότητες της αλληλεπιδραστικής υπολογιστικής τεχνολογίας. Η έννοια της ενεργητικής μάθησης προϋποθέτει ότι ο μαθητής θα αναπτύξει ένα ιδιαίτερο είδος ψυχολογικής σχέσης με τη διαδικασία και το περιεχόμενο (Little, 1991). Η ρυθμιστική παρέμβαση του εκπαιδευτικού συντελείται στο πλαίσιο μιας συνεχούς υποστήριξης των μαθησιακών επιδιώξεων, με ταυτόχρονη σταδιακή απόσυρση του ελέγχου και της υποστήριξης από το σύστημα και τον εκπαιδευτικό με στόχο την αυτόνομη μάθηση.

Παράλληλα η γραφιστική προσέγγιση στην αλληλεπίδραση, παίζει σημαντικό ρόλο στα μαθησιακά κίνητρα. Οι μαθητές συχνά έλκονται από την καινοτομία των αλληλεπιδραστικών πολυμέσων. Η διάταξη της πληροφορίας στην οθόνη και ο τρόπος παρουσίασης επηρεάζουν σημαντικά την κατεύθυνση, τη διάρκεια και το βαθμό προσοχής του μαθητή. Στο πλαίσιο αυτό το χρώμα, η ταχύτητα, η κίνηση και ο ήχος, μπορούν να επηρεάσουν την αλληλεπιδραστική διαδικασία.

Ο Lester υποστηρίζει ότι: «ενώ τα φυσικά αντικείμενα γίνονται περισσότερο αφηρημένα όταν μοντελοποιούνται σε οθόνη υπολογιστή, τα μαθηματικά αντικείμενα, τα οποία είναι από τη φύση τους αφηρημένα, γίνονται περισσότερο συγκεκριμένα»

## 2. Τα Mathlets

Μια σημαντικότατη – για τα μαθηματικά – εφαρμογή των Java Applets, είναι τα Mathlets. Τα Mathlets είναι μικρά ανεξάρτητα εργαλεία εκμάθησης τα οποία εστιάζουν σε ένα συγκεκριμένο μαθηματικό θέμα ή πρόβλημα και είναι έτοιμα προς χρήση για επιδείξεις απ' τους καθηγητές ή για εξατομικευμένη μάθηση απ' τους ίδιους τους μαθητές. Βρίσκονται είτε σε ιστοσελίδες στο διαδίκτυο είτε είναι οργανωμένα σε βιβλιοθήκες όπως είναι το Math Forum, Library of Virtual Manipulatives, Digital Classroom Resources κ.α.

## 3. Λειτουργία και ρόλος στην εκπαίδευση

Δεδομένου ότι η παραδοσιακή διδασκαλία έχει περιορισμούς και προβλήματα, τα Mathlets έρχονται να προσφέρουν λύσεις σε αρκετά εξ αυτών και να προτάξουν ένα ιδιαίτερα χρήσιμο εργαλείο στη διδασκαλία των Μαθηματικών.

**Ανοιχτή Τάξη** : Η χρήση των Mathlets ενθαρρύνει την ασύγχρονη και εξ αποστάσεως διδασκαλία, βοηθώντας στην υπερπήδηση συνηθισμένων χρονικών και χωρικών εμποδίων. Ο μαθητής μπορεί να διδαχθεί το μαθηματικό αντικείμενο ακόμα και όταν δεν είναι παρών στη φυσική του διδασκαλία, μέσα σε συγκεκριμένη αίθουσα κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Μέσω του διαδικτύου, καθίσταται πια δυνατή όχι μόνο η πρόσβαση στις συνήθεις μεθόδους μετάδοσης μαθηματικής γνώσης, τα βιβλία, αλλά οποιαδήποτε στιγμή και σε οποιοδήποτε μέρος να λαμβάνει χώρα μια πλήρης παραγωγική διαδικασία διδασκαλίας και μάθησης με χρήση των Mathlets.

**Η φύση της πληροφορίας** : Κάποιες κατηγορίες μαθηματικών εννοιών είναι από μόνες τους ιδιαίτερα δύσκολες να παρουσιαστούν και να αναλυθούν με απλή χρήση μολυβιού ή ακόμη και πίνακα. Το αποτέλεσμα είναι η μεταφορά της γνώσης στον μαθητή να δυσχεραίνει. Τέτοιες έννοιες είναι ως επί το πλείστον

- ✓ *Δυναμικές* , όπως η σύγκλιση μιας ακολουθίας
- ✓ *Πολυμεσικές* , όπως η μελέτη ενός τρισδιάστατου συστήματος
- ✓ *Διαδραστικές* , όπως σε παραμετρικές εξισώσεις γραμμών όπου η μεταβολή των τιμών των παραμέτρων είναι κρίσιμη για την κατανόηση του τελικού σχήματος.

Ακόμα και αν χρησιμοποιηθούν άλλες τεχνικές αναπαράστασης των ανωτέρω θεμάτων, το βέβαιο είναι ότι στερούνται διαδραστικότητας. Τα Mathlets, σε συνδυασμό με την πολυμεσική υποστήριξη του παγκόσμιου ιστού (www), παρέχουν παρουσίαση τέτοιων εννοιών, συχνά πιο αποδοτική ως προς τη μεταδοτικότητα. Σε αυτό συντελούν οι δυναμικές και διαδραστικές δυνατότητες των Mathlets που δίνουν τον έλεγχο επιλεγμένων εργαλείων στα χέρια του μαθητή, επιτρέποντας με τον τρόπο αυτό να έχει ενεργό συμμετοχή στην κατασκευή ή/και μεταβολή του μαθηματικού αντικειμένου.

**Αναπαραστάσεις και σύνδεσμοι στην αίθουσα :** Οι αναπαραστάσεις είναι σημαντικό συστατικό εννοιών που έχουν πρακτικό προσανατολισμό. Σε υπολογιστικά μαθήματα, υπάρχουν πρακτικοί αλγόριθμοι, χρήσιμοι στην καθημερινότητα, που όμως δεν εισάγονται στην αίθουσα. Στην καλύτερη των περιπτώσεων, οι αλγοριθμικές υλοποιήσεις διαχωρίζονται από τη διδασκαλία του αντικειμένου και διδάσκονται ξεχωριστά, συνήθως σε εργαστήρια Η/Υ όπου γίνεται χρήση κάποιου στατικού προγράμματος προς παρουσίαση ενός αλγορίθμου ή ακόμα και μιας στατικής εικόνας, το γραφικό αποτέλεσμα που παρήγαγε μιας ξένη προς το μαθητή μηχανή. Στον αντίποδα, με τα Mathlets οι δάσκαλοι μπορούν να αναπαράγουν μέσα στην αίθουσα, ταυτόχρονα με τη διδασκαλία του αντικειμένου, παρουσιάσεις που εμπεριέχουν όλους τους υπολογισμούς, καθιστώντας περισσότερο ρεαλιστική την ανάλυση του αντικειμένου. Επιπλέον, οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να εμπλακούν ενεργά στους υπολογισμούς αλλά και να πειραματιστούν προκειμένου να κατακτήσουν πλήρως τη νέα γνώση που μόλις διδάχθηκαν. Έτσι, η ερμηνεία της αλγοριθμικής υλοποίησης γίνεται πιο περιεκτική και λιγότερο χρονοβόρα. Τέτοιο παράδειγμα είναι η και η παρουσίαση του τρόπου με τον οποίο αλλάζει το εμβαδό χωρίου καμπύλης καθώς αυξάνουν οι διαμερίσεις, κάτι που αν δε το δουν οι μαθητές να συμβαίνει, δυσκολεύονται να το αντιληφθούν. Συν τοις άλλοις, γίνεται εύκολα προσέγγιση συναφών αντικειμένων με άμεση αναφορά τους μέσα στο ίδιο Mathlet, δίχως να διακόπτεται έτσι η ροή και η καθαρότητα της διδασκαλίας, όπως συμβαίνει λόγου χάρη με τα συχνά «βάλε-βγάλε» των διαφανειών ή το «σβήσε-γράψε» του πίνακα.

**Μεταφερσιμότητα :** Τα αποτελέσματα της ανάπτυξης των Mathlets σε μία περίπτωση μπορούν συχνά να είναι μεταβιβάσιμα και να προσαρμόζονται σε διάφορες άλλες καταστάσεις μάθησης. Όταν χρησιμοποιούνται σε μια σχολική τάξη, μπορεί να επιφέρουν μεγαλύτερη ολοκλήρωση μεταξύ των ήδη υπαρχουσών θεωρητικών και πρακτικών πτυχών του θέματος. Υπάρχουν διάφορα μαθήματα η διδακτέα ύλη των οποίων συχνά διασταυρώνεται (για παράδειγμα, Γεωμετρία και Computer Graphics, Αριθμητική Ανάλυση και Λογισμός - Γραμμική Άλγεβρα). Τα Mathlets που αναπτύχθηκαν για ένα συγκεκριμένο σκοπό θα μπορούσαν να επαναχρησιμοποιηθούν από δάσκαλο και μαθητές σε άλλα μαθήματα.

**Αξιολόγηση :** Οι παραδοσιακές μέθοδοι αξιολόγησης, όπως οι ερωτήσεις εντός αίθουσας μπορούν να ενισχυθούν με την απλούστερη μορφή των Mathlets, τα τεστ με εναλλασσόμενες ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής. Τέτοια τεστ μπορούν να διεξαχθούν είτε κατά τη διάρκεια του μαθήματος είτε και για εξάσκηση στο σπίτι από τον μαθητή και βοηθούν τον εκπαιδευόμενο να διαπιστώσει το βαθμό κατανόησης από μέρους του.

Πέραν όλων αυτών τα Mathlets αποτελούν μια δωρεάν πρόταση βελτίωσης της διδασκαλίας σε αντίθεση με τα ακριβά πακέτα εφαρμογών που κυκλοφορούν στο εμπόριο και είναι απρόσιτα στους περισσότερους μαθητές. Όσοι έχουν πρόσβαση σε Η/Υ και στο διαδίκτυο, μπορούν να εκμεταλλευτούν και τα Mathlets!

## 4. Κατασκευή των Mathlets

Υπάρχουν αρκετοί τεχνολογικοί και παιδαγωγικοί παράγοντες που πρέπει να ληφθούν υπόψη προτού αποφασιστεί η χρήση των Mathlets στην εκπαιδευτική διαδικασία . Όπως και σε κάθε άλλη τεχνολογία άλλωστε, θα πρέπει να γίνει κατανοητό ότι η χρήση των Mathlets δεν αποτελεί τη Χρυσή Οδό που θα διαβούμε προκειμένου να υπερπηδήσουμε κάθε διδακτική δυσκολία των Μαθηματικών.

**Κατάλληλα Μαθηματικά Αντικείμενα :** Τα Mathlets πρέπει να βασιστούν σε προσεκτικά επιλεγμένα θέματα από τη διδακτέα ύλη ενός μαθήματος. Δεν είναι αναγκαίο να παρουσιάζονται όλα τα θέματα με χρήση Mathlets στην αίθουσα διδασκαλίας. Τα θέματα που επιλέγονται για διδασκαλία μέσω των Mathlets πρέπει να είναι αντικείμενα που παρουσιάζουν ειδικές δυσκολίες στην κατανόηση ή/και έχουν ιδιαίτερες ανάγκες αναπαράστασης.

**Προγραμματιστική Εμπειρία :** Η χρήση των Mathlets γίνεται κατανοητή σχετικά εύκολα από πλευράς των μαθητών αν και, όπου κρίνεται αναγκαίο, μπορεί να συνοδευτεί από σύντομα εγχειρίδια χρήσης του περιβάλλοντος εργασίας τους προκειμένου να ξεπεραστούν τυχόν αδυναμίες. Η κατασκευή και ανάπτυξη των Mathlets από πλευράς διδασκόντων ωστόσο, είναι μια πιο δύσκολη υπόθεση, ιδιαίτερα για εκείνους που δεν έχουν προηγούμενη προγραμματιστική εμπειρία. Ακόμα και η τροποποίηση των Mathlets μπορεί να απαιτεί ιδιαίτερες γνώσεις προγραμματισμού με αποτέλεσμα να χρησιμοποιούνται κάποιες φορές έτοιμα Mathlets που δεν είναι απολύτως προσαρμοσμένα στο διδακτικό αντικείμενο.

### *4.1 Αρχές Δημιουργίας*

Υπάρχουν κάποιες βασικές παράμετροι που πρέπει να λαμβάνονται υπόψη κατά τη σχεδίαση και υλοποίηση ενός Mathlet. Πολλές εξ αυτών ταυτίζονται με τις γενικότερες αρχές της πολυμεσικής μάθησης όπως αυτές έχουν προκύψει από την εμπειρία ανθρώπων που δούλεψαν σε πανεπιστήμια της Αμερικής σε συνεργασία με καθηγητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

**Γραφικό Περιβάλλον Χρήσης (GUI) – Διαδραστικότητα :** Τα Mathlets πρέπει να παροτρύνουν τον πειραματισμό στο μέτρο του δυνατού και όχι την παθητική παρακολούθηση, όπως συμβαίνει λόγου χάρη σε μια ταινία. Για να επιτευχθεί αυτό σε ένα φιλικό προς τους μαθητές περιβάλλον, θα πρέπει να έχουν την ικανότητα της διαδραστικής οπτικοποίησης των γραφικών αποτελεσμάτων μέσω ενός γραφικού περιβάλλοντος χρήσης όπου οι μεταβλητές (επιλογή αρχικών τιμών και τιμές παραμέτρων) να μπορούν να τροποποιηθούν εύκολα. Επιπλέον, θα πρέπει να υπάρχει η δυνατότητα έναρξης, παύσης και επανεκκίνησης του Mathlet μέσα από το GUI.

**Ανθεκτικότητα :** Υπάρχει πάντα η πιθανότητα παραγωγής λαθών σε μια εκπαιδευτική διαδικασία που χρησιμοποιεί εφαρμογές βασισμένες σε υπολογιστή και η επιλογή τιμών εκτός φάσματος είναι ο συνηθέστερος λόγος. Τέτοια λάθη θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη κατά τη δημιουργία των Mathlets και να προβλέπονται κατάλληλα μηνύματα επεξήγησης.

**Απόδοση :** Εξαιτίας των χρονικών περιορισμών σε μια αίθουσα διδασκαλίας, θα πρέπει τα Mathlets να είναι γρήγορα και να έχουν κατασκευαστεί έχοντας πάντα κατά νου τα χρονικά περιθώρια.

**Βοηθητικά Φύλλα :** Παρόλο που ο μαθητής με τη βοήθεια του Mathlet έρχεται σε επαφή με μεγάλο όγκο μαθηματικών πληροφοριών, αυτό δε σημαίνει κατ'ανάγκη ότι τις επεξεργάζεται κατάλληλα ή/και ότι τις αφομοιώνει και τις κατανοεί. Κάποιες φορές είναι δύσκολο για τον μαθητή να αντιληφθεί την έννοια που διαπραγματεύεται ένα Mathlet, εκτός και αν αυτό συνοδεύεται από το ανάλογο βοηθητικό κείμενο. Προκειμένου να αντιμετωπισθούν τέτοιες περιπτώσεις, θα πρέπει τα Mathlets να συνοδεύονται από σύντομα έγγραφα που αναλύουν το υπό εξέταση θέμα και να συμπεριλαμβάνουν τις οδηγίες χρήσης του Mathlet.

**Δομημένος Προγραμματισμός :** Η αυθαίρετη και άναρχη ανάπτυξη οδηγεί σε προγράμματα που είναι δύσκολο να επεκταθούν ή ακόμα και να συντηρηθούν. Θα πρέπει λοιπόν η κατασκευή των Mathlets να ακολουθεί τους κανόνες και τις βασικές μεθοδολογίες του δομημένου προγραμματισμού.

### *4.2 Λογισμικό Δημιουργίας Mathlets*

Τα λογισμικά συγγραφής Mathlets οφείλουν να στηρίζουν αποτελεσματικά τους καθηγητές και να «καλύπτουν» τις όποιες τεχνικές αδυναμίες τους. Έχοντας κατά νου αυτό, έχουν αναπτυχθεί αρκετά ελεύθερα λογισμικά που επικοινωνούν με πολλές πλατφόρμες Η/Υ, τα δημοφιλέστερα εκ των οποίων είναι :

**GeoGebra :** Το πρόγραμμα GeoGebra είναι ένα δυναμικό Μαθηματικό λογισμικό που ενσωματώνει την γεωμετρία , την άλγεβρα και τον λογισμό. Αφενός, είναι ένα δυναμικό σύστημα Γεωμετρίας όπου μπορείς να κάνεις κατασκευές με σημεία, διανύσματα, τμήματα, ευθείες, κωνικές τομές καθώς και συναρτήσεις και εν συνεχεία να τα αλλάξεις με δυναμικό τρόπο. Αφετέρου, οι εξισώσεις και οι συντεταγμένες μπορούν να εισαχθούν άμεσα.

**Geonext :** Το GEONEXT επιτρέπει την αυτόνομη και συνεργατική εκμάθηση των μαθηματικών στην τάξη και ενθαρρύνει μια ενεργό εξερευνητική προσέγγιση στη μαθηματική σκέψη. Προσφέρει ευκαιρίες για απεικονίσεις που δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν σε χαρτί ή στον πίνακα με τα παραδοσιακά εργαλεία κατασκευής και ενεργεί ως εργαλείο για τις γεωμετρικές κατασκευές.

Ανάλογου περιεχομένου είναι και το **Hot Potatoes** το οποίο δημιουργεί διαδραστικές εφαρμογές πολλαπλής επιλογής, σύντομης απάντησης, συμπλήρωσης κενών και σταυρόλεξα τα οποία πλαισιώνουν ιστοσελίδες, δημιουργώντας ευχάριστο μαθησιακό περιβάλλον. Είναι ελεύθερο λογισμικό άλλα όχι open-source.

## *Β Μέρος : Πρακτική Εφαρμογή μέσω χαρακτηριστικών παραδειγμάτων*

### 1. Οπτικοποίηση Δυναμικών εννοιών

Διδακτικά, αποτελεί πάντα μια πρόκληση η οπτικοποίηση μαθηματικών αντικειμένων που εμπεριέχουν δυναμικές έννοιες. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η προσέγγιση συναρτήσεων μέσω του πολυωνύμου Taylor.

Με τη βοήθεια του Mathlet που κατασκεύασε ο Mike May, Πρόεδρος του Department of Mathematics and Mathematical Computer Science στο Πανεπιστήμιο του Saint Louis και βρίσκεται στην ιστοσελίδα http://www.slu.edu/classes/maymk/GeoGebra/TaylorPoly.html, θα γνωρίσουμε ένα νέο εποπτικό μοντέλο το οποίο

- οπτικοποιεί με μεγάλη ευκολία, ταχύτητα και ακρίβεια τη δυναμική κατάσταση της προσέγγισης μιας συνάρτησης
- προωθεί την ενεργοποίηση του μαθητή μέσω διαδραστικών αντικειμένων
- παρακινεί για περαιτέρω ενασχόληση καθώς υπάρχει η δυνατότητα για πολλαπλούς ελέγχους συναρτήσεων είτε από τη πλευρά του μαθητή είτε του διδάσκοντα.

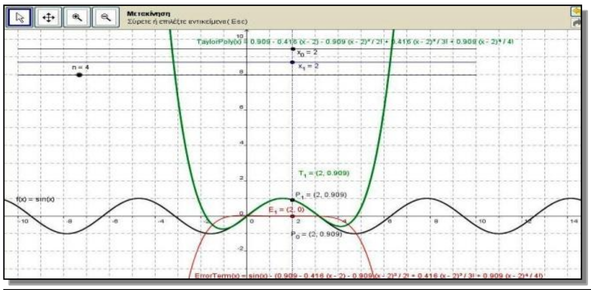
Αρχικά δίνουμε τη συνάρτηση f(x) που θέλουμε να προσεγγίσουμε και τις αρχικές τιμές των $x_0$, $x_1$, n στα αντίστοιχα προαναφερόμενα πεδία και ενε set values το Αυτόματα, στην οθόνη γραφικών εμφανίζονται :

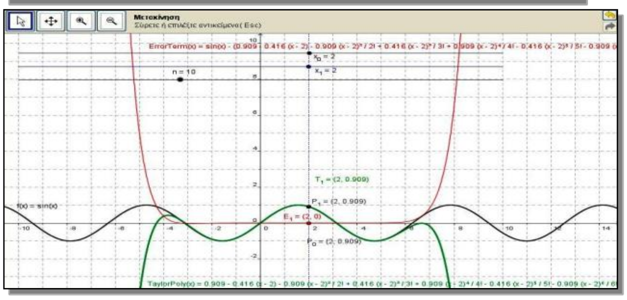
- Η γραφική παράσταση της f(x) με μαύρο χρώμα
- Η γραφική παράσταση του πολυωνύμου Taylor με πράσινο χρώμα
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης σφάλματος με κόκκινο χρώμα

ενώ παράλληλα εμφανίζονται στο ίδιο παράθυρο γραφικών το πολυώνυμο Taylor και η συνάρτηση σφάλματος.

Με την βοήθεια των δρομέων μπορούμε να μεταβάλλουμε τις τιμές των $x_0$, $x_1$, n και να παρατηρήσουμε άμεσα τα αποτελέσματα στο παράθυρο προβολής γραφικών. Στην ακολουθία εικόνων που ακολουθεί φαίνεται η μεταβολή των γραφικών παραστάσεων και οι προσεγγίσεις της f(x) = sinx από το ανάπτυγμα Taylor με το «σύρσιμο» του δρομέα εκ μέρους του χρήστη προκειμένου να μεταβληθεί ο βαθμός προσέγγισης n

Για n = 4 Για n = 10





Τα άμεσα και πρακτικά οφέλη από τη χρήση του Mathlet συνοψίζονται στα ακόλουθα :

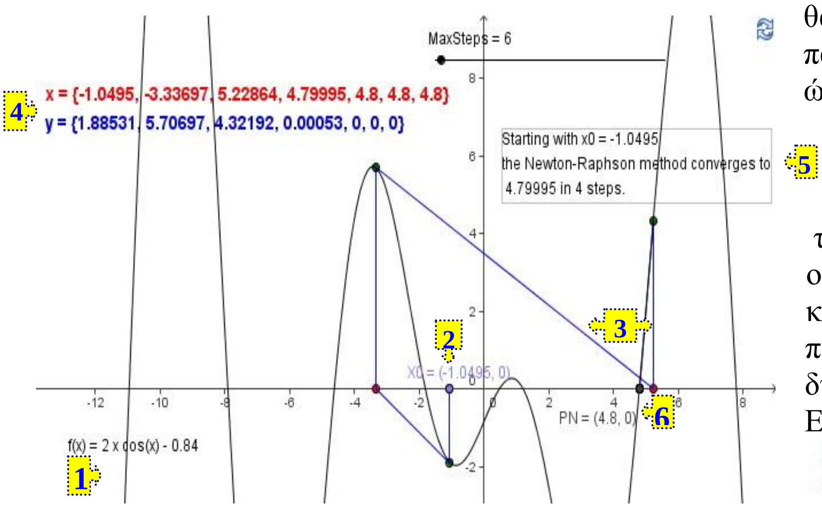
- Ο χρήστης έρχεται σε άμεση επαφή με την έννοια της προσέγγισης μιας συνάρτησης μέσω του αναπτύγματος Taylor, χάρη στην γραφική απεικόνιση τους. Καθίσταται δυνατή η οπτικοποίηση δηλαδή της μεθόδου που έχει διδαχθεί θεωρητικά, με αποτέλεσμα να υπάρχει μια εποπτεία του αντικειμένου που βοηθάει στη κατανόηση.

- Υπάρχει η δυνατότητα να μελετηθεί η μέθοδος σε οποιαδήποτε συνάρτηση, παρακινώντας το μαθητή για περαιτέρω ενασχόληση που θα τον φέρει πιο κοντά στο διδακτικό αντικείμενο.
- Γίνεται ταυτόχρονη μέτρηση του σφάλματος προσέγγισης και αναφορά στα αποτελέσματα των τύπων ώστε να υπάρχει συνεχώς σύνδεση των γραφικών αποτελεσμάτων με τα θεωρητικά συμπεράσματα της μεθόδου.
- Με σωστή χρήση χρωμάτων και εργαλείων (δρομείς) γίνεται εύκολη η παραμετροποίηση του βαθμού προσέγγισης με σαφή αναπαράσταση των αποτελεσμάτων ώστε να ενθαρρύνεται η συμμετοχή του χρήστη και παράλληλα να μην είναι κουραστική η χρήση του Mathlet.
- Μέσα από τη χρήση των δρομέων παράγεται η ψευδαίσθηση της «κίνησης» στο Mathlet, κάτι που αφενός είναι ιδιαίτερα ελκυστικό στα μάτια του χρήστη και αφετέρου αποτελεί κρίσιμο παράγοντα κατανόησης κάθε δυναμικής έννοιας στα μαθηματικά, όπως η προσέγγιση μιας συνάρτησης.

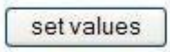
## 2. Κατευθυνόμενη Διερεύνηση

Μετά τη θεωρητική περιγραφή της μεθόδου Newton-Raphson για την προσέγγιση ριζών μιας πραγματικής συνάρτησης, θα ήταν ιδιαίτερα χρήσιμη μια αναπαράσταση του τρόπου λειτουργίας της μεθόδου καθώς και των δυσχερειών που συναντώνται σε ειδικές περιπτώσεις. Για το σκοπό αυτό απαιτείται ένα εποπτικό μέσο που :

- θα βοηθάει στους υπολογισμούς και θα παρουσιάζει άμεσα τα αλγεβρικά αποτελέσματα
- θα παρουσιάζει τα γραφικά αποτελέσματα της μεθόδου
- θα έχει τη δυνατότητα παραμετροποίησης (επιλογή τυχαίας συνάρτησης)




- θα προσφέρει έτοιμα παραδείγματα συναρτήσεων ώστε να αναδεικνύει τις ειδικές συνθήκες αποτυχίας της μεθόδου

Αρχικά δίνουμε τον τύπο της συνάρτησης f(x) της οποίας αναζητούμε μια ρίζα καθώς και μια πρώτη προσέγγιση της ρίζας, δηλαδή την τιμή $x_0$. Ενεργοποιούμε το 

και το παράθυρο προβολής γραφικών έχει ως εξής :

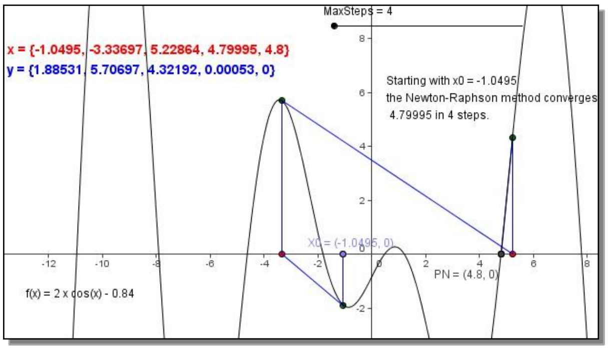
1. Η γραφική παράσταση της f(x) με μαύρο χρώμα
2. Το αρχικό σημείο $x_0$
3. Οι διαδοχικές εφαπτομένες που προκύπτουν από την μέθοδο Newton – Raphson με μπλε χρώμα
4. Στο ανώτερο σημείο του παραθύρου εμφανίζονται 2 ακολουθίες τιμών : Οι τιμές του x και οι τιμές του y, όπως αυτές παράγονται από τη μέθοδο Newton – Raphson. Πρακτικά, είναι οι τετμημένες (x) και οι τεταγμένες (y) των σημείων επαφής και μας δείχνουν την προσέγγιση της ρίζας f μέχρι να

εξαντληθούν τα βήματα (MaxSteps) ή μέχρι να επέλθει μια ικανοποιητική σύγκλιση της ρίζας.

**5.** Υπάρχει και ένα πεδίο που συνοψίζει τα αποτελέσματα της μεθόδου

**6.** Πραγματική ρίζα της f (σημείο τομής με x΄x) προς σύγκριση με τη ρίζα της μεθόδου Newton – Raphson.

Με την βοήθεια του δρομέα MaxSteps μπορούμε να μεταβάλλουμε το πλήθος των βημάτων της μεθόδου και να παρατηρήσουμε βήμα – βήμα την προσέγγιση της ρίζας και να συγκρίνουμε τη τελική προσέγγιση με την πραγματική ρίζα :




Σημαντική είναι βέβαια και η δυνατότητα αλλαγής της τιμής του $x_0$ με «σύρσιμο» του σημείου, ώστε να γίνει εύκολα κατανοητή η σημασία επιλογής του αρχικού σημείου στο αποτέλεσμα της προσέγγισης και πως απομακρύνεται η τελική προσέγγιση όταν το $x_0$ είναι κοντά σε κρίσιμο σημείο της f.

Τα διδακτικά οφέλη από τη χρήση του Mathlet συνοψίζονται στα ακόλουθα :

- Ο χρήστης παρακολουθεί τη διαδικασία προσέγγισης της ρίζας με ταυτόχρονη απεικόνιση των εφαπτομένων. Με άλλα λόγια, δεν αρκείται στο υπολογιστικό κομμάτι των σημείων τομής των εφαπτομένων αλλά το συνδυάζει με την γραφική αναπαράστασή τους ενώ παράλληλα μπορεί να συγκρίνει το αποτέλεσμα με την πραγματική ρίζα της συνάρτησης, είτε οπτικά είτε και αριθμητικά
- Δεν σπαταλάται χρόνος σε υπολογισμούς αλλά παρουσιάζεται η ουσία και ο τρόπος λειτουργίας της μεθόδου καθώς βέβαια και τα αποτελέσματα αυτής.
- Δίνεται η ευκαιρία στον χρήστη να πειραματιστεί με την εφαρμογή της μεθόδου Newton – Raphson σε όποια συνάρτηση επιθυμεί και με τη χρήση των ανάλογων εργαλείων να παραμετροποιήσει τόσο την αρχική τιμή αλλά και το πλήθος των βημάτών της μεθόδου με εξαιρετικά εύκολο και απλό τρόπο. Έτσι, καλλιεργείται η «περιέργεια» του μαθητή και μέσα από αυτή προκύπτει η ουσιαστική κατάκτηση της μαθηματικής μεθόδου.
- Υπάρχουν έτοιμες συναρτήσεις που συνοδεύονται από ακόλουθες ερωτήσεις – υποδείξεις προκειμένου να παρατηρήσει ο μαθητής τις ιδιαιτερότητες και τις αδυναμίες της μεθόδου. Μέσω της κατευθυνόμενης διερεύνησης λοιπόν εκμηδενίζεται η πιθανότητα να μην επιλέξει κατάλληλες συναρτήσεις ο χρήστης και καθοδηγείται στα επιθυμητά συμπεράσματα.
- Η χρήση του δρομέα βοηθά και στην βηματική παρουσίαση της μεθόδου καθώς με κάθε αύξηση της τιμής του, παρουσιάζεται και η επόμενη εφαπτομένη και οι συντεταγμένες του επόμενου σημείου. Έτσι, γίνεται πιο κατανοητή η λειτουργία της μεθόδου.

**3. Σύνδεση Άλγεβρας – Γεωμετρίας**

Οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί στο επίπεδο με τη βοήθεια πινάκων είναι ένα μαθηματικό αντικείμενο το οποίο συνδέει αλγεβρικές γνώσεις με γεωμετρικές απεικονίσεις. Ως εκ τούτου, αποτελεί ένα άριστο τόπο εφαρμογής νέων τεχνολογιών προκειμένου να συνδυαστούν κατάλληλα οι δύο γνωστικές περιοχές με στόχο την ουσιαστικότερη και πληρέστερη γνώση του αντικειμένου.

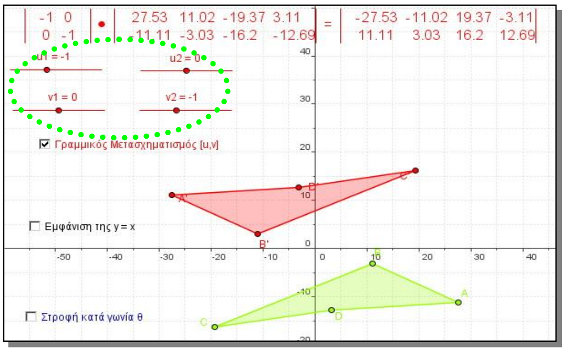
Έχοντας κατά νου τα παραπάνω, και στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής θα επιχειρήσουμε να συντάξουμε ένα Mathlet. Οι στόχοι είναι :

- να προκληθεί το ενδιαφέρον του μαθητή για διερεύνηση των βασικών γεωμετρικών μετασχηματισμών με χρήση ευδιάκριτων χρωμάτων και σχεδίων.
- να γίνει η απαραίτητη σύνδεση των γεωμετρικών μετασχηματισμών με τους πίνακες μετασχηματισμών με ταυτόχρονη αναπαράσταση των πινάκων μετάβασης και των γεωμετρικών σχημάτων.
- να υπάρξει καθοδήγηση στη διερεύνηση των μετασχηματισμών με χρήση ερωτηματολογίου το οποίο θα εμφανίζει προαιρετικά και τις απαντήσεις.
- να εξασφαλιστεί η συμμετοχή του μαθητή στη διερεύνηση και μελέτη των μετασχηματισμών με χρήση διαδραστικών εργαλείων.

Κατά την εκκίνηση του Mathlet εμφανίζεται ένα κίτρινο 4/πλευρο ABCD που αντιστοιχεί στο αρχικό σχήμα και του οποίου οι συντεταγμένες αποτελούν τις στήλες του αρχικού πίνακα.

Ενεργοποιώντας την επιλογή «Γραμμικός μετασχηματισμός [u,v]» εμφανίζονται οι δρομείς με τους οποίους αλλάζουμε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων που προκαλούν τον μετασχηματισμό καθώς και το μετασχηματισμένο κόκκινο σχήμα.

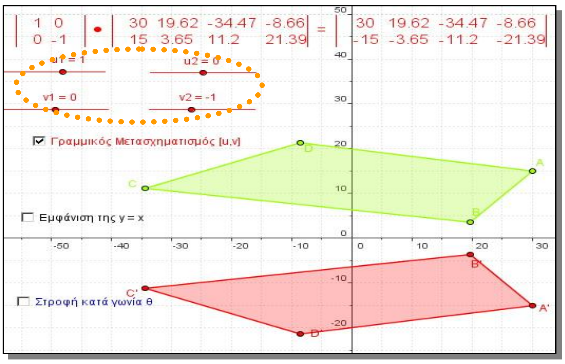
Η πρώτη διερεύνηση των αποτελεσμάτων που έχει η αλλαγή των διανυσμάτων στον γεωμετρικό μετασχηματισμό και παράλληλα στα αλγεβρικά αποτελέσματα του πολλαπλασιασμού πινάκων είναι καθοδηγούμενη από το υπάρχον ερωτηματολόγιο του Mathlet :




**α) Συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων**

Για $\vec{u}=(-1,0)$ και $\vec{v}=(0,-1)$ ο γεωμετρικός μετασχηματισμός έχει πίνακα μετασχηματισμού –Ι και προκαλεί σχήμα συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων, όπως φαίνεται και στην οθόνη γραφικών :

Η μεταβολή του αρχικού 4/πλεύρου (με σταθερά τα $\vec{u},\vec{v}$) ενισχύει την πεποίθηση αυτή.

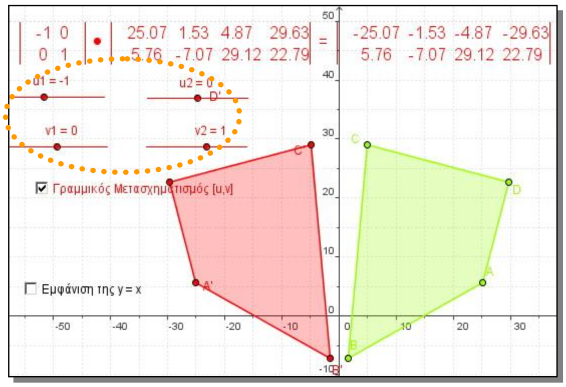



**β) Συμμετρία ως προς τον άξονα x΄x**

Για $\vec{u}=(1,0)$ και $\vec{v}=(0,-1)$ ο γεωμετρικός μετασχηματισμός έχει πίνακα μετασχηματισμού $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ και προκαλεί σχήμα συμμετρικό ως προς τον x΄x, όπως φαίνεται και στην οθόνη γραφικών.

Οι αλλαγές του αρχικού σχήματος επιβεβαιώνουν την εκτίμηση αυτή.

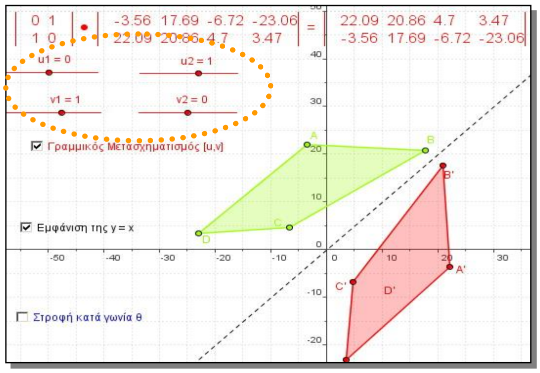
Open Education - The Journal for Open and Distance Education and Educational Technology
Volume 8, Number 1, 2012 Section one © Open Education ISSN: 1791-9312




**γ) Συμμετρία ως προς τον άξονα yy΄**

Για $\vec{u}=(-1,0)$ και $\vec{v}=(0,1)$ ο γεωμετρικός μετασχηματισμός έχει πίνακα $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ και προκαλεί σχήμα συμμετρικό ως προς τον yy΄, όπως φαίνεται και στην οθόνη γραφικών.

Μετατοπίζοντας τα αρχικά σημεία ABCD προκύπτει κάθε φορά παρόμοιο αποτέλεσμα, εδραιώνοντας έτσι την πεποίθηση αυτή.




**δ) Συμμετρία ως προς την ευθεία y = x**

Για $\vec{u}=(0,1)$ και $\vec{v}=(1,0)$ ο γεωμετρικός μετασχηματισμός έχει πίνακα μετασχηματισμού $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ και προκαλεί σχήμα συμμετρικό ως προς την ευθεία y = x, όπως φαίνεται και στην οθόνη γραφικών όταν ενεργοποιήσουμε την εμφάνιση της ευθείας

**ε) Ομοιοθεσία**

Ακολουθώντας πάντα το ερωτηματολόγιο, θέτουμε τους δρομείς στις κατάλληλες θέσεις ώστε $u_2=v_1=0$ και $u_1=v_2=\lambda$ για διάφορες τιμές του $\lambda\neq 0$. Έτσι έχουμε πίνακα μετασχηματισμού $\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}=\lambda I$ ο οποίος παράγει όμοια σχήματα.

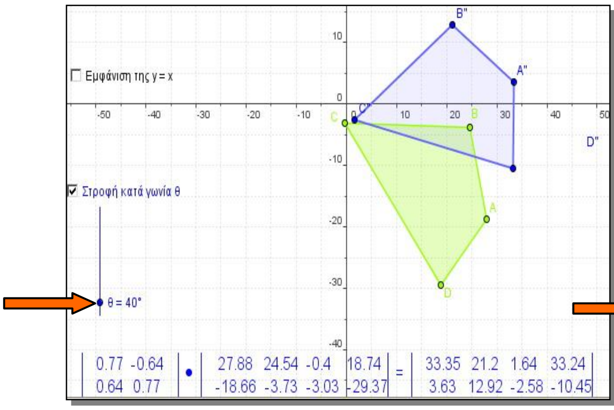
**στ) Ισομετρίες**

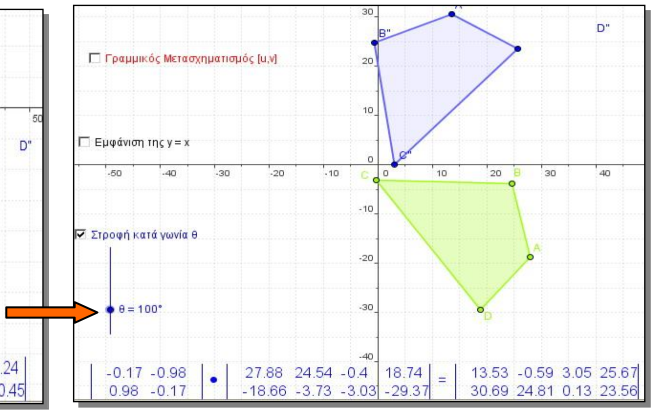
Στη συνέχεια παρακινείται ο μαθητής να εξετάσει σε ποιες από τις παραπάνω περιπτώσεις το αρχικό σχήμα διατηρείται (ισομετρία) φέρνοντας στο νου του όσα έχει ήδη δοκιμάσει από πριν στο Mathlet.

**ζ) Στροφή με κέντρο Ο και γωνία θ**

Επόμενο βήμα είναι η ενεργοποίηση του πεδίου «Στροφή κατά θ» το οποίο εμφανίζει το δρομέα μεταβολής τιμών της γωνίας θ και τους πίνακες μετάβασης του ABCD στο A΄΄B΄΄C΄΄D΄΄. Παράλληλα, είναι θεμιτή α απενεργοποίηση του πεδίου «Γραμμικός μετασχηματισμός [u,v]» προκειμένου να μείνουν στην οθόνη μόνο το αρχικό και το τελικό (μετά την στροφή) σχήμα.

Λογικό είναι να ζητηθεί από τους μαθητές να ερευνήσουν την συμπεριφορά του νέου – μπλε – σχήματος κατά την αλλαγή των τιμών του θ ενώ παράλληλα ελέγχουν τους πίνακες μετάβασης. Με τον τρόπο αυτό θα γίνει φανερή η στροφή του σχήματος και θα επέλθει η σύνδεσή του με τον πίνακα μετασχηματισμού.




Τα άμεσα οφέλη από τη χρήση του Mathlet συνοψίζονται στα ακόλουθα :

- Η σύνδεση των αλγεβρικών σχέσεων με τα γεωμετρικά αποτελέσματα γίνεται απτή και άρα καλύτερα και γρηγορότερα κατανοητή. Με τον τρόπο αυτό ο χρήστης συνδέει τις δύο γνωστικές περιοχές του ίδιου αντικειμένου και η γνώση του γίνεται πλήρης και ουσιαστική.
- Η χρήση χρωμάτων, κουτιών επιβεβαίωσης και δρομέων κάνει ελκυστική τη χρήση του Mathlet και δεν απαιτεί γνώση του λογισμικού.
- Προωθείται σε κάθε σημείο της χρήσης του Mathlet , η αυτενέργεια του χρήστη μέσω των διαδραστικών εργαλείων. Έτσι, τα γνωστικά αντικείμενα μετατρέπονται σε «ανακαλύψεις» του χρήστη.
- Η ύπαρξη ερωτηματολογίου καθοδηγεί τον χρήστη στο είδος έρευνας που είναι επιθυμητό και τον βοηθάει να συλλάβει έννοιες και σχέσεις. Έτσι μπορεί να γίνει χρήση του Mathlet και δίχως ιδιαίτερες καθοδηγήσεις από τον διδάσκοντα.

## Βιβλιογραφία – Πηγές

***<u>Ελληνική</u>***

[1] Βλάμος Π.Μ.(1999) "*Εξ αποστάσεως διδασκαλία και εκπαιδευτικό λογισμικό στα Μαθηματικά"*, Μαθηματική Επιθεώρηση, 52, 3-12.
[2] Γκούτσιας, Α., (2002), *Διδακτικές προσεγγίσεις με λογισμικό ή πείραμα,* στα πρακτικά της Ημερίδας για τη Διδασκαλία των Φυσικών Επιστημών – Καινοτομίες στην εκπαίδευση.
[3] Μακράκης, Β. & Στεφάνου, Χ., (2001), *Αναπτύσσοντας αλληλεπιδραστικά μαθησιακά περιβάλλοντα στην ανοικτή και εξ αποστάσεως εκπαίδευση με την τεχνολογία Java & Java Applets*, στα Πρακτικά του 1ου Πανελλήνιου Συνεδρίου για την Ανοικτή και εξ Αποστάσεως Εκπαίδευση, Πάτρα, Μάιος, 2001
[4] Ράπτης Α., &Ράπτη Α. (2006), *Μάθηση Και Διδασκαλία στην εποχή της πληροφορίας, Ολική Προσέγγιση*, σ.109 Αθήνα
[5] Χαντζηβασιλείου Κ., Ταξίδης Χ., (2007), *Η Αξιοποίηση Των Προγραμμάτων Προσομοίωσης Java Applets Στη Διδασκαλία Των Μαθηματικών*, στα Πρακτικά του 4ου Πανελληνίου Συνεδρίου για τις ΤΠΕ στην Εκπαίδευση, Σύρος, 2007
[6] Π.Ι. & ΙΤΥ, Τομέας Επιμόρφωσης και Κατάρτισης (2008) "*Επιμορφωτικό υλικό για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στα Κέντρα Στήριξης Επιμόρφωσης*, Τέυχος 4: Κλάδος ΠΕ03", στα πλαίσια της επιμόρφωσης εκπαιδευτικών στη χρήση και αξιοποίηση των ΤΠΕ στην εκπαιδευτική διδακτική διαδικασία.
[7] Πατσιομίτου Στ. , (2006), " *Συμπεράσματα από την Πειραματική Διδασκαλία με math applets* του Ιστοχώρου illuminations.nctm.org. Αντιλήψεις Μαθητών", στα πλαίσια του 5ου Συνεδρίου ΕΤΠΕ, Θεσσαλονίκη, Οκτώβριος 2006

***<u>Ξενόγλωσση</u>***

[1] Clark, R. C.; Mayer, R. E. (2003). *E-learning and the science of instruction*. San Francisco: Jossey-Bass.
[2] Gadanidis, G., (1994), *Deconstructing constructivism,* Mathematics Teacher, 87, 2, 91-97

[3] Gadanidis, G., Gadanidis, J., & Schindler, K., (2003), Factors mediating the use of the on line applets in the lesson planning of Preservice Mathematics Teaches, Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching 22(4), pp 322-344, Norfolk VA: AACE

[4] de Jong, T., & van Joolingen, W.R., (1998), *Scientific discovery learning with computers simulations of conceptual domains,* in Review of Educational Research, 68, 179-202.,

[5] Hohenwarter M. and Preiner J., Creating Mathlets with Open Source Tools, The Journal of Online Mathematics and Its Applications Volume 7. July 2007. Article ID 1574

[6] Kahn, K., (1998), Helping children to learn hard things: Computer programming with familiar objects and action, Morgan Kaufmann

[7] Kennedy D., (2007), MESSing with Mathlets: requirements for interactive teaching Software, School of Computing Christchurch Polytechnic Institute of Technology

[8] Lester, J., (2000), Designing Interactive Mathematic, Paper presented at the Asian Technology Conference in Mathematics, Chiang Mai, Thailand

[9] Steffe, L, Nesher, P., Cobb, P., Golding, G., Greer, B., (1996), *Theories of Mathematical Learning*, Mahwah N.Jersey: Lawence Erlbaum Ass. Publisher.

[10] von Glasersfeld, E. (1995). *A constructivist approach to teaching. In Constructivism in education* (Eds. Steffe, P.L., & Gale, J.) Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers

[11] van Joolingen, Wouter (1999): Cognitive tools for discovery learning. International Journal of Artificial Intelligence in Education, 10, p. 385-397.

[12] Hohenwarter, M.; Preiner, J. (2007): Dynamic Mathematics with GeoGebra.Journal for Online Mathematics and its Applications, Volume 7, March 2007, Article ID 1448

[13] Clark, R. C.; Mayer, R. E. (2003). E-learning and the science of instruction. San Francisco: Jossey-Bass.

***Διαδικτυακές Πηγές***

http://mathforum.org/
http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html,
http://mathdl.maa.org/mathDL/3/,
http://www.geogebra.org/cms/,
http://www.geogebra.org/wiki
http://www.maa.org/joma/Volume7/Hohenwarter2/2007_joma_mathlets.pdf
http://www.geogebra.org/forum
http://geonext.uni-bayreuth.de/index.php?id=2453,
http://mathsrv.kueichstaett.de/MGF/homes/grothman/java/zirkel/doc_en/index.html
http://hotpot.uvic.ca/
http://www.slu.edu/classes/maymk/GeoGebra/
http://www.math.umn.edu/~rogness/mathlets.shtml

*Σημείωση*

*Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών «Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά» της Σχολής Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου και αποτελεί μέρος της διπλωματικής εργασίας του συγγραφέως, η οποία εκπονήθηκε υπό την επίβλεψη του Δρ. Βλάμου Παναγιώτη, Επίκ. Καθηγητή Ιονίου Πανεπιστημίου, Τμήμα Πληροφορικής (vlamos@ionio.gr).*

Open Education - The Journal for Open and Distance Education and Educational Technology
Volume 8, Number 1, 2012 Section one © Open Education ISSN: 1791-9312

# Εφαρμογή ασαφών συμπερασματικών μοντέλων στην διαγνωστική αξιολόγηση των μαθηματικών

# An implementation of fuzzy diagnostic models on teaching mathematics

**Δημήτρης Ζούκης**
Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο
Σχολή θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας
Μαθηματικός 1ου Γυμνασίου Νάξου
Υποψήφιος Διδάκτορας
Δημοκριτείου Πανεπιστημίου Θράκης
zoukis_dimitris@yahoo.gr

**Abstract**
Students' evaluation is considered to be one constant educational procedure whereby the progress of learning is monitored and assessed based on the outcome of it. The achievement of the teaching aims of the lessons, as well as the curriculum are taken into consideration while conducting the evaluation process. Diagnostic evaluation takes place at the beginning of the school year and its basic aim is to determine the cognitive level of the students, which, accordingly, affects the teaching methodology. The aim of this project is the construction of a fuzzy, diagnostic model of the cognitive ability of a student who is in the first year of High School. The calculative application of the system has been made via the Fuzzy Logic Toolbox, which is a collection of functions constructed in the numeric environment of Matlab.

**Περίληψη**
Αξιολόγηση του μαθητή θεωρείται η συνεχής παιδαγωγική διαδικασία με την οποία παρακολουθείται η πορεία της μάθησης, προσδιορίζονται τα τελικά αποτελέσματά της και ο βαθμός επίτευξης των διδακτικών στόχων του μαθήματος και του προγράμματος σπουδών. Η διαγνωστική αξιολόγηση πραγματοποιείται στην αρχή του σχολικού έτους και βασικός σκοπός της είναι να προσδιοριστεί το γνωστικό επίπεδο των μαθητών, ώστε να προσαρμοστεί ανάλογα η διδασκαλία Στόχος της εργασίας αυτής η κατασκευή ενός ασαφούς (Fuzzy) «διαγνωστικού» μοντέλου της γνωστικής ικανότητας ενός μαθητή που ξεκινάει την Α' τάξη του ενιαίου Λυκείου. . Η υπολογιστική εφαρμογή του συστήματος έγινε με την χρήση του Fuzzy Logic Toolbox το οποίο είναι μια συλλογή συναρτήσεων κατασκευασμένων στο αριθμητικό υπολογιστικό περιβάλλον του MatLab

**Keywords**
*fuzzy inference systems, students' evaluation, diagnostic evaluation*

## 1. Προκαταρκτικές Έννοιες

Θα οριστούν σ' αυτήν την παράγραφο όλες οι βασικές προκαταρκτικές έννοιες του ασαφούς συνόλου, της ασαφούς άρνησης, της ασαφούς τομής (t-norm) και της ασαφούς ένωσης (t-conorm) της συνεπαγωγής και των ασαφών συμπερασματικών κανόνων που είναι απαραίτητες για την κατασκευή των ασαφών συμπερασματικών μοντέλων. Οι παρακάτω ορισμοί υπάρχουν στα [1],[2],[3],[5] και αλλού.

Έστω $S$ ένα κλασικό σύνολο αναφοράς. Κάθε συνάρτηση $A: S \to \ 0,1$ λέγεται ασαφές υποσύνολο του S. Αν $x \in S$, τότε η τιμή $A \ x$ λέγεται τιμή συμμετοχής του $x$ (membership value) και εκφράζει τον βαθμό που το $x$ ανήκει στο ασαφές σύνολο A. Ένας συνήθης συμβολισμός για τα ασαφή υποσύνολα ενός συνόλου $S$ είναι ο $A = \ S, \mu_A$ όπου $\mu_A : S \to \ 0,1$ . Η συνάρτηση $\mu_A$ ονομάζεται συνάρτηση συμμετοχής (membership function)

**Ορισμός 1.1**: Μια συνάρτηση $N: \ 0,1 \ \to \ 0,1$ είναι μια ασαφής άρνηση αν ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

(i) Η $N$ είναι φθίνουσα συνάρτηση.

(ii) $N \ 0 \ =1$ και $N \ 1 \ =0$

Επιπλέον αν $N \ N \ x \ \ = x$ για κάθε $x \in \ 0,1$ η συνάρτηση $N$ καλείται ισχυρή άρνηση.

**Ορισμός 1.2**: Μια συνάρτηση $T: \ 0,1 \ ^2 \to \ 0,1$ είναι μια ασαφής τομή ή t-norm (triangular norm) αν για κάθε $x, y, z \in \ 0,1$ ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

$T_1$. $T \ x,1 \ = x$ (συνοριακή συνθήκη)

$T_2$. $y \le z$ συνεπάγεται $T \ x,y \ \le T \ x,z$ (μονοτονία)

$T_3$. $T \ x,y \ = T \ y,x$ (αντιμεταθετική)

$T_4$. $T \ x, T \ y,z \ \ = T \ T \ x,y \ ,z$ (προσεταιριστική)

**Ορισμός 1.3**: Μια συνάρτηση $S: \ 0,1 \ ^2 \to \ 0,1$ είναι μια ασαφής ένωση ή t-conorm (triangular conorm) αν για κάθε $x, y, z \in \ 0,1$ ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

$S_1$. $S \ x,0 \ = x$ (συνοριακή συνθήκη)

$S_2$. $y \le z$ συνεπάγεται $S \ x,y \ \le S \ x,z$ (μονοτονία)

$S_3$. $S \ x,y \ = S \ y,x$ (αντιμεταθετική)

$S_4$. $S \ x, S \ y,z \ \ = S \ S \ x,y \ ,z$ (προσεταιριστική)

**Ορισμός 1.4:** Μια ασαφής συνεπαγωγή *I*, είναι μια συνάρτηση της μορφής:

$I: \ 0,1 \ \times \ 0,1 \ \to \ 0,1$

η οποία για κάθε δυνατή αληθή τιμή *a*, *b* των ασαφών προτάσεων *p*, *q* αντίστοιχα ορίζει μια αληθή τιμή $I \ a,b$ της υποθετικής πρότασης "ΑΝ *p* ΤΟΤΕ *q*". Η συνάρτηση *I* θα πρέπει να είναι μια επέκταση της κλασσικής συνεπαγωγής, $p \Rightarrow q$, στην οποία οι τιμές αληθείας περιορίζονται στο $\ 0,1$ , στο διάστημα $\ 0,1$ για τις τιμές αληθείας στην ασαφή λογική. Στην κλασσική λογική η συνεπαγωγή έχει τον ακόλουθο πίνακα αληθείας

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Έτσι η ασαφής συνεπαγωγή θα πρέπει να ικανοποιεί τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες:

$I \ 0,0 \ = I \ 0,1 \ = I \ 1,1 \ =1$ και $I \ 1,0 \ = 0$ (1)

Στον κλασικό συλλογισμό που χρησιμοποιεί την κλασική λογική χρησιμοποιούνται για την εξαγωγή λογικών συμπερασμάτων οι ακόλουθοι τέσσερεις κύριοι συμπερασματικοί κανόνες:

Modus ponens: $\alpha \wedge \ \alpha \Rightarrow b \ \ \Rightarrow b$, Modus tollens: $\bar{b} \wedge \ \alpha \Rightarrow b \ \ \Rightarrow \bar{\alpha}$

Syllogism: $\alpha \Rightarrow b\ \wedge\ b \Rightarrow \gamma\ \Rightarrow\ \alpha \Rightarrow \gamma$ , Contraposition: $\alpha \Rightarrow b\ \Rightarrow\ \bar{b} \Rightarrow \bar{a}$

Με την βοήθεια των πράξεων των ασαφών λογικών προτάσεων όπως τις ορίσαμε παραπάνω μπορούμε να μεταφέρουμε τους κλασικούς λογικούς συμπερασματικούς κανόνες στον προσεγγιστικό συλλογισμό. Με την σκέψη μας σε ότι έχει αναφερθεί παραπάνω μπορούμε τώρα να ορίσουμε τον γενικευμένο ασαφή **ΑΝ-ΤΟΤΕ** κανόνα ως εξής:

"**ΑΝ** $\alpha_1$ είναι $A_1$ **ΚΑΙ** …**ΚΑΙ** $\alpha_n$ είναι $A_n$ **ΤΟΤΕ** $b$ είναι $B$"

Ο οποίος υπολογίζεται με την βοήθεια των συναρτήσεων συμμετοχής από τον τύπο:

$\mu_{A_1}\ a_1\ \wedge ... \wedge \mu_{A_n}\ a_n\ \Rightarrow \mu_B\ b$

Τελικά κάθε πεπερασμένη ασαφούς λογικής συνεπαγωγή μπορεί να περιγραφεί από ένα σύνολο γενικευμένων ΑΝ-ΤΟΤΕ κανόνων που να περιέχουν μόνο την πράξη της σύζευξης υπό την μορφή:

(1) **ΑΝ** $a_{11}$ είναι $A_{12}$ **ΚΑΙ** …**ΚΑΙ** $a_{1n}$ είναι $A_{1n}$ **ΤΟΤΕ** $b_1$ είναι $B_1$

(2) **ΑΝ** $a_{21}$ είναι $A_{21}$ **ΚΑΙ** …**ΚΑΙ** $a_{2n}$ είναι $A_{2n}$ **ΤΟΤΕ** $b_2$ είναι $B_2$

$\vdots$

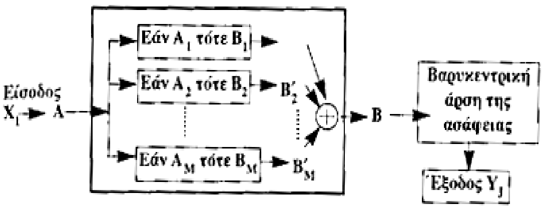
(m) **ΑΝ** $a_{m1}$ είναι $A_{m1}$ **ΚΑΙ** …**ΚΑΙ** $a_{mn}$ είναι $A_{mn}$ **ΤΟΤΕ** $b_m$ είναι $B_m$

Ένα ασαφές μοντέλο ή σύστημα είναι μια μεγάλη ομάδα από ασαφείς λογικούς κανόνες του τύπου ΑΝ-ΤΟΤΕ. Ένα ασαφές σύστημα κατασκευάζεται σε τρία στάδια:

1ο Στάδιο: Η επιλογή των κατάλληλων λεκτικών μεταβλητών εισόδου και εξόδου του συστήματος

2ο Στάδιο: Επιλογή των ασαφών συνόλων και υποσυνόλων για τις λεκτικές μεταβλητές εισόδου και εξόδου.

3ο Στάδιο: Η επιλογή των κανόνων. Στο στάδιο αυτό συσχετίζουμε τα ασαφή σύνολα των μεταβλητών εισόδου μ' αυτά των μεταβλητών εξόδου.




Ένα fuzzy σύστημα λαμβάνει τιμές για τις μεταβλητές εισόδου, συγκρίνει τις τιμές αυτές με όλα τα ασαφή σύνολα εισόδου, δίνει σύνολα εξόδου και με μια διαδικασία που ονομάζεται αποασαφοποίηση (defuzzification) μετατρέπει τα ασαφή σύνολα εξόδου σε έναν αριθμό εξόδου.

## 2. Αξιολόγηση

Η λήψη αποφάσεων είναι ένα θέμα που αντιμετωπίζει κανείς καθημερινά. Και για την λήψη των ορθών αποφάσεων είναι απαραίτητη η κατάλληλη πληροφόρηση. Ο ρόλος της αξιολόγησης είναι να δώσει σχετικές και ακριβείς πληροφορίες ώστε να ληφθεί η καλύτερη δυνατή απόφαση. Έτσι και στον τομέα της εκπαίδευσης, οι εκπαιδευτικοί λαμβάνουν καθημερινά αποφάσεις για το περιεχόμενο και τις μεθόδους διδασκαλίας, την προσαρμογή της διδασκαλίας στο επίπεδο και τις ανάγκες των μαθητών τους, την μορφή της διδακτικής πράξης με σκοπό την επιτυχή διδασκαλία και την βελτίωση της παρεχόμενης εκπαίδευσης. Η σύγχρονη παιδαγωγική διακρίνει τρεις τύπους αξιολόγησης του μαθητή: την διαγνωστική αξιολόγηση, την διαμορφωτική αξιολόγηση και την αθροιστική αξιολόγηση. Η διαγνωστική αξιολόγηση πραγματοποιείται συνήθως στην αρχή του σχολικού έτους ή πριν από την διδασκαλία μιας σημαντικής έννοιας ή ενότητας και βασικός στόχος της είναι να προσδιοριστεί το γνωστικό επίπεδο των μαθητών, ώστε να προσαρμοστεί ανάλογα η διδασκαλία. Σκοπός της διαγνωστικής αξιολόγησης είναι να δώσει στον εκπαιδευτικό πληροφορίες για το επίπεδο των μαθητών της τάξης του, τα γνωστικά κενά , το γνωστικό χάσμα που μπορεί να υπάρχει μεταξύ των μαθητών και το επίπεδο γενικά της απόκτησης και αφομοίωσης των γνώσεων μέχρι την στιγμή αυτή. Το διαγνωστικό τεστ αξιολόγησης συνηθίζεται να εφαρμόζεται στην αρχή της σχολικής χρονιάς γιατί οι πληροφορίες που θα δώσει στον εκπαιδευτικό θα καθορίσουν και θα βοηθήσουν εν γένει στον σχεδιασμό της διδασκαλίας και στην προσαρμογή της διδακτικής πρακτικής στις ανάγκες και τις ιδιαιτερότητες της τάξης του. Ο προγραμματισμός στην διδακτική είναι ιδιαίτερα σημαντικός κα για να είναι επιτυχημένος θα πρέπει να βασίζεται σε πραγματικές μετρήσιμες παρατηρήσεις του γνωστικού επιπέδου των μαθητών στους οποίους θα εφαρμοστεί. Έτσι η διαγνωστική αξιολόγηση αποτελεί σημαντικό βοήθημα για τον εκπαιδευτικό στην προσπάθειά του να διαμορφώσει ένα ουσιαστικό, επιτεύξιμο και επιτυχές διδακτικό πρόγραμμα τόσο σε επίπεδο μακρόχρονου προγραμματισμού, αλλά και σε εβδομαδιαίου ακόμα και ημερήσιου Στο συγκεκριμένο σύστημα διαγνωστικής αξιολόγησης με την χρήση ασαφούς συμπερασματικού μοντέλου που θα παρουσιαστεί στην επόμενη παράγραφο έχει επιλεγεί να γίνει εφαρμογή στους μαθητές που ξεκινούν την πρώτη Λυκείου. Θα πρέπει να σημειωθεί όμως, πως με την κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών μπορεί να εφαρμοστεί τόσο σε διαφορετικές βαθμίδες εκπαίδευσης όσο και σε διαφορετικές μορφές αξιολόγησης ακόμα και πέρα από τα στενά εκπαιδευτικά πλαίσια.

### 3.1 Το ασαφές συμπερασματικό μοντέλο

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιαστεί το ασαφές συμπερασματικό σύστημα για την διαγνωστική αξιολόγηση των μαθητών στο μάθημα των μαθηματικών. Θα περιγραφεί η θεμελίωση και κατασκευή του συστήματος βήμα προς βήμα και στο τέλος θα τρέξουμε το πρόγραμμα για να μελετήσουμε τα αποτελέσματα και να αξιολογήσουμε την επιτυχία του συστήματος. Για να λυθεί το πρόβλημα της μοντελοποίησης ενός συστήματος θα πρέπει να προσδιοριστούν τα παρακάτω στοιχεία:

(i) Οι μεταβλητές εισόδου $x_1,...,x_n$

(ii) Τα διαστήματα $X_1,...,X_n$ στα οποία ανήκουν οι μεταβλητές $x_1,...,x_n$ αντίστοιχα και ορίζουν τα ασαφή υποσύνολα

(iii) Τις συναρτήσεις συμμετοχής $\mu_{X_1},...,\mu_{X_n}$ των μεταβλητών εισόδου και εξόδου

(iv) Τις σχέσεις $R^i, i=1,...,n$ που χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν την συμπεριφορά των δεδομένων εισόδου και εξόδου του συστήματος.

### 3.2 Οι μεταβλητές Εισόδου- Εξόδου

Η επιλογή των κατάλληλων μεταβλητών εισόδου και εξόδου του συστήματος αποτελεί σημαντικό παράγοντα για την επιτυχία του. Το ασαφές συμπερασματικό μοντέλο που κατασκευάζεται εδώ, εφαρμόζεται στην διαγνωστική αξιολόγηση των μαθητών της Α’ Τάξης του Ενιαίου Λυκείου για το μάθημα των μαθηματικών. Η επιλογή των μεταβλητών εξαρτάται από τους γενικούς και ειδικούς στόχους του μαθήματος όπως αυτοί ορίζονται από το Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών (Ε. Π .Π. Σ. Μ. ) και τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (Α. Π. Σ.) και έχουν περιγραφεί αναλυτικά στην προηγούμενη παράγραφο.

Ο καθηγητής των μαθηματικών με την βοήθεια ενός τεστ αξιολόγησης επιχειρεί να ελέγξει:

1. Τις γνώσεις που απέκτησε ο μαθητής της Α' Λυκείου και τον βαθμό κατάκτησης των γνώσεων αυτών, στην άλγεβρα, την γεωμετρία και την τριγωνομετρία.
2. Την αναλυτική και συνθετική του σκέψη και την αποδεικτική του ικανότητα.
3. Την ικανότητα του μαθητή να μπορεί να εκφράζεται με την βοήθεια της γλώσσας των μαθηματικών, αλλά και να εκφράζει την γλώσσα των μαθηματικών στην γλώσσα ομιλίας και γραφής.
4. Την ικανότητά του να κατανοήσει προβλήματα, να τα μεταφράσει σε μαθηματικές σχέσεις και να τα λύσει.

Με βάση λοιπόν όλα τα παραπάνω και έχοντας κατά νου το Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών και τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών ορίζουμε τις μεταβλητές εισόδου:

**gm ( general mathematics Knowledge):** περιλαμβάνει τις μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες, την αποδεικτική ικανότητα και την ικανότητα σύνθεσης και ανάλυσης του μαθητή.

**ps ( problem solving ):** περιλαμβάνει την ικανότητα λύσης μαθηματικών προβλημάτων, κατανόηση εφαρμογών των μαθηματικών και εφαρμοσμένη σκέψη και μεθοδολογία.

**lc ( language capability):** η ικανότητα χρήσης και κατανόησης της μαθηματικής γλώσσας.

Οι παραπάνω μεταβλητές κατασκευάστηκαν με την σκέψη ότι πρέπει να ομαδοποιηθούν οι γενικοί και ειδικοί στόχοι του μαθήματος των μαθηματικών. Αν ορίζαμε μία μεταβλητή για κάθε στόχο θα είχαμε ένα δύσχρηστο από άποψη κατασκευής αλλά και εφαρμογής σύστημα

Η γλωσσική μεταβλητή lc συμμετέχει κατά 20% στο συνολικό αποτέλεσμα, Η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων ps κατά 30% και η γενική μαθηματική γνώση κατά 50% στο συνολικό αποτέλεσμα.

Ως μεταβλητή εξόδου χρησιμοποιούμε την:

**cl (cognitive level) :** που παριστάνει το γνωστικό επίπεδο του μαθητή στα μαθηματικά.

Όλες οι λεκτικές μεταβλητές εισόδου παίρνουν τιμές από το 0 έως το 100, όπως δηλαδή συνηθίζουμε να βαθμολογούμε τα τεστ αξιολόγησης των μαθητών.

### 3.3 Ασαφή υποσύνολα και συναρτήσεις συμμετοχής

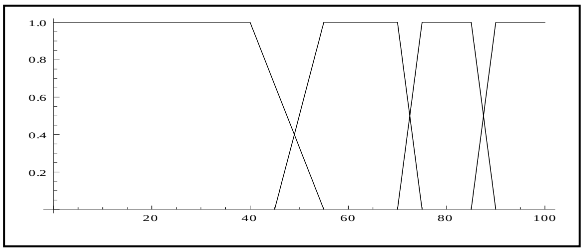
Επιλέγουμε τώρα τα ασαφή σύνολα. Ορίζουμε για τις μεταβλητές εισόδου gm, ps και cl τα παρακάτω υποσύνολα:

$$\text{κακός} = \begin{cases} 1, & \text{για } 0 \le x \le 40 \\ -\dfrac{x}{15} + \dfrac{55}{15}, & \text{για } 40 < x < 55 \end{cases}$$

$$\text{μέτριος} = \begin{cases} \dfrac{x}{10} - \dfrac{45}{10}, & \text{για } 45 \le x < 55 \\ 1, & \text{για } 55 \le x \le 70 \\ -\dfrac{x}{5} + 15, & \text{για } 70 < x < 75 \end{cases}$$

$$\text{καλός} = \begin{cases} \dfrac{x}{5} - 14, & \text{για } 70 < x < 75 \\ 1, & \text{για } 75 \le x \le 85 \\ -\dfrac{x}{5} + 18, & \text{για } 85 < x < 90 \end{cases}$$

$$\text{άριστος} = \begin{cases} \dfrac{x}{5} - 17, & \text{για } 85 \le x \le 90 \\ 1, & \text{για } 90 \le \text{x} \le 100 \end{cases}$$




όπου $x$, ο βαθμός που παίρνει ο μαθητής σε κάθε μία από τις παραπάνω μεταβλητές εισόδου. Η επιλογή των ασαφών υποσυνόλων των μεταβλητών εισόδου και εξόδου έγινε με βάση την εμπειρία και την συνήθη εκπαιδευτική θεώρηση. Αντίστοιχες εφαρμογές και ορισμοί των ασαφών υποσυνόλων έχουν γίνει και στα [14] και [15] της βιβλιογραφίας.

### 3.4 Εφαρμογη στο Matlab

Το υπολογιστικό εργαλείο στο οποίο θα εφαρμοστεί το ασαφές συμπερασματικό σύστημα διαγνωστικής αξιολόγησης που είναι το MatLab.Το MatLab περιέχει ένα «κέλυφος» κατασκευής τέτοιων συστημάτων, το Fuzzy Logic Toolbox. Το Fuzzy Logic Toolbox είναι μια συλλογή συναρτήσεων κατασκευασμένων στο αριθμητικό υπολογιστικό περιβάλλον του MatLab. Αν και το MatLab δίνει την δυνατότητα στο κατασκευαστή του συστήματος να δουλέψει αποκλειστικά από την γραμμή εντολών είναι γενικά ευκολότερο να δουλέψει κανείς το σύστημα γραφικά[1]. Θα παραθέσουμε στην παρούσα εργασία κάποια βασικά χαρακτηριστικά του συστήματος, ενώ περισσότερες λεπτομέρειες υπάρχουν στο [21].

Μέσω του FIS editor χειριζόμαστε τα υψηλής σημασίας χαρακτηριστικά του συστήματος. Στην μέθοδο αποασαφοποίησης επιλέξαμε να είναι βαρυκεντρικού τύπου. Δηλαδή:

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{m} \mu_{Y_1}\;\; y_1^0 \;\; \cdot y_1^0}{\sum_{i=1}^{m} \mu_{Y_1}\;\; y_1^0}$$

Σε ότι αφορά την Ένωση και την Τομή του συστήματός μας επιλέξαμε να χρησιμοποιήσουμε τις:

$$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{Max}\;\; \mathrm{A}(x), \mathrm{B}(x) \quad \text{και} \quad \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{Min}\;\; \mathrm{A}(x), \mathrm{B}(x)$$

αντίστοιχα. Και για τη συνεπαγωγή το MatLab χρησιμοποιεί την:

$$\mu_{A \Rightarrow B}\;\; a, b \;\; = \min\;\; \mu_A\;\; a\;\; , \mu_B\;\; B$$

Αυτή έχει επιλεγεί και στην κατασκευή του συστήματός μας. Οι κανόνες βασίζονται στην εμπειρία του κατασκευαστή. Ως εμπειρία του κατασκευαστή θεωρείται το σύνολο των πληροφοριών που έχει στα χέρια του ο κατασκευαστής του συστήματος από πειράματα, έρευνα ή καθημερινή πρακτική.

Ο κάθε ένας από τους παραπάνω κανόνες έχει συντελεστή βαρύτητας 1. Μπορεί κάποιος αν θέλει βέβαια να δώσει βάρος σε έναν ή περισσότερους κανόνες και ο Rule Editor του MatLab υποστηρίζει αυτή τη δυνατότητα.

### 3.5 Αξιολόγηση του συστήματος

Για να αξιολογήσουμε την αξιοπιστία και την εγκυρότητα του συστήματος θα πρέπει να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που μας δίνει το μοντέλο που κατασκευάστηκε με ένα πρότυπο μέτρο. Αρχικά θεωρήσαμε τη γλωσσική μεταβλητή lc να συμμετέχει κατά 20% στο συνολικό αποτέλεσμα, την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων ps κατά 30% και τη γενική μαθηματική γνώση κατά 50% στο συνολικό αποτέλεσμα. Άρα θα μπορούσαμε να αναμένουμε τιμή για την μεταβλητή εξόδου που δίδεται από τον τύπο:

$$\mathrm{cl} = 0.5\mathrm{gm} + 0.3\mathrm{ps} + 0.2\mathrm{lc} \quad (3.51)$$

[1] Πληροφορίες και εκτιμήσεις από J.S. Roger Jang, Ned Gulley, “Matlab Fuzzy Logic Toolbox”

Οι παραπάνω τιμές επιλέχτηκαν τυχαία, από όλο το φάσμα των τιμών των μεταβλητών εισόδου του συστήματος. Η στήλη με τις αναμενόμενες τιμές κατασκευάστηκε αντικαθιστώντας τις τιμές εισόδου στον παραπάνω τύπο (3.51)

Το σύστημα που κατασκευάστηκε βασίζεται σε κανόνες που συνδέουν τις τιμές των μεταβλητών εισόδου και εξάγουν ένα συμπέρασμα για το γνωστικό επίπεδο του μαθητή. Η σχέση αυτή δεν είναι γραμμική και η συμπερασματολογία δεν θα μπορούσε να εξαχθεί από έναν γραμμικό τύπο.

| General Mathematics Knowledge | Problem Solving | Language Capability | Cognitive Level | Αναμενόμενη Τιμή | Απόλυτο σφάλμα |
|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 27 | 42 | 24.1 | 24 | **0.1** |
| 18 | 87 | 82 | 60.7 | 59.7 | **1** |
| 20 | 25 | 50 | 25.4 | 27.5 | **3.5** |
| 24 | 21 | 65 | 23.7 | 31.3 | **7.6** |
| 30 | 50 | 70 | 40.1 | 44 | **3.9** |
| 34 | 20 | 10 | 23.7 | 25 | **1.3** |
| 40 | 52 | 58 | 47.5 | 47.2 | **0.3** |
| 42 | 10 | 0 | 24.1 | 24 | **0.1** |
| 48 | 80 | 65 | 60.5 | 61 | **0.5** |
| 50 | 80 | 60 | 60.6 | 61 | **0.4** |
| 54 | 28 | 90 | 56.1 | 53.4 | **2.7** |
| 59 | 60 | 78 | 61.1 | 63.1 | **2** |
| 62 | 20 | 50 | 40.1 | 47 | **6.9** |
| 67 | 44 | 88 | 60.7 | 64.3 | **3.6** |
| 69 | 89 | 77 | 74 | 76.6 | **2.6** |
| 70 | 60 | 50 | 60.6 | 63 | **2.4** |
| 74 | 91 | 64 | 74 | 76.5 | **2.5** |
| 76 | 42 | 21 | 61 | 54.8 | **6.2** |
| 84 | 71 | 75 | 80 | 78.3 | **1.7** |
| **94** | **92** | **91** | **93.9** | **92.8** | **1.1** |

Οι αναμενόμενες τιμές παρέχονται εδώ για να μελετηθεί η προσαρμογή του συστήματος σε ένα πρότυπο μέτρο. Όπως φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα ενδεικτικών τιμών τα εξαγόμενα από το σύστημα αποτελέσματα έχουν απόλυτα σφάλματα που στις περισσότερες περιπτώσεις δεν υπερβαίνουν τις 3 μονάδες με μέγιστο το 100. Στις περισσότερες περιπτώσεις έχουμε λοιπόν απόκλιση από την αναμενόμενη τιμή που δεν υπερβαίνει το 3%.

Η πρώτη εκτίμηση είναι λοιπόν ότι το σύστημα προσαρμόζεται καλά στο πρότυπο μέτρο. Ακόμα και σε περιπτώσεις που τα σφάλματα που προκύπτουν και μπορεί να είναι μεγαλύτερα, ειδικά όταν έχουμε ακραίες περιπτώσεις τιμών δεν μπορούν να αποδοθούν σε ανεπάρκεια του συστήματος αλλά αντιθέτως στην σωστή λειτουργία του συστήματος. Ένας από τους σκοπός της εφαρμογής ενός ασαφούς συμπερασματικού συστήματος στην διαγνωστική αξιολόγηση των μαθητών είναι η εξαγωγή συμπερασμάτων σε περιβάλλον όπου οι πληροφορίες είναι ασαφείς, συγκεχυμένες, αβέβαιες ή και ανακριβείς. Τα σφάλματα αυτά είναι θεμιτά και φανερώνουν την ανάγκη κατασκευής ενός τέτοιου συστήματος ώστε να μπορούμε να προβλέψουμε και να εξάγουμε εκτιμήσεις σε καταστάσεις ακραίων, ανακριβών και ασαφών γενικά περιπτώσεων.

## 4. Γιατί fuzzy;

### Καινοτομίες του ασαφούς συμπερασματικού μοντέλου διαγνωστικής αξιολόγησης

Ένα ερώτημα που θα πρέπει να απαντηθεί με την ολοκλήρωση της παρουσίασης του ασαφούς συμπερασματικού συστήματος είναι γιατί πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τα ασαφή συστήματα για την κατασκευή ενός τέτοιου μοντέλου. Τι καινούριο εισάγει η θεωρία των ασαφών συμπερασματικών συστημάτων στην μοντελοποίηση και εν προκειμένω ποια είναι η καινοτομία του συστήματος της διαγνωστικής αξιολόγησης των μαθητών που εισήχθη στις προηγούμενες παραγράφους.

Τα ασαφή συμπερασματικά μοντέλα βασίζονται σε μεγάλο βαθμό στην αβεβαιότητα. Η αβεβαιότητα αυτή έχει να κάνει με τις πληροφορίες και κυρίως με την έλλειψη αυτών στην προσπάθειά μας να μοντελοποιήσουμε ένα πρόβλημα. Υπάρχουν πολλές περιπτώσεις έλλειψης πληροφορίας. Η πληροφορία μας μπορεί για παράδειγμα να είναι ατελής, ανακριβής, αποσπασματική, αναξιόπιστη, αόριστη ή αμφιλεγόμενη. Ο Biswas στο [13], υποστηρίζει πως η χρήση της ασαφούς λογικής στην αξιολόγηση κρίνεται απαραίτητη αφού κάθε εκπαιδευτικό βαθμολογικό σύστημα περιέχει ένα ποσό αβεβαιότητας. Ο Fournali sto [14], υποστηρίζει ότι ο λόγος για την υιοθέτηση της ασαφούς προσέγγισης είναι ότι σε ότι αφορά την εκπαιδευτική αξιολόγηση, διαφορετικοί εκτιμητές έχουν διαφορετικά μέτρα αξιολόγησης. Ο Law στο [15] αναφέρει τρεις σημαντικούς παράγοντες που προκρίνουν την ασαφή προσέγγιση στην αξιολόγηση. Πρώτα απ' όλα οι βαθμοί που δίνονται από τους εκπαιδευτικούς για την μαθητική επίδοση δεν είναι πάντα ακριβείς. Δεύτερον οι εξετάσεις αποτελούνται από αβέβαια-ασαφή δεδομένα, ενώ τέλος πολλοί εκπαιδευτικοί βαθμολογούν τους μαθητές με λεκτικούς όρους. Γίνεται λοιπόν σαφές ότι η ασαφή λογική και τα ασαφή συστήματα μπορούν να αντιμετωπίσουν τις παραπάνω περιπτώσεις ασάφειας και αβεβαιότητας που υπάρχουν στην διαδικασία της εκπαιδευτικής αξιολόγησης.

Ένα ασαφές συμπερασματικό μοντέλο χρησιμοποιεί την διαδικασία του προσεγγιστικού συλλογισμού η οποία μιμείται την ανθρώπινη συλλογιστική. Έτσι μπορεί και εκμεταλλεύεται την φυσική γλώσσα και η διαδικασία του προγραμματισμού και της κατασκευής του συστήματος καθίσταται εύκολη και πρακτική. Είναι φανερό λοιπόν, ότι ένα ασαφές συμπερασματικό σύστημα μπορεί να κατασκευαστεί γρήγορα, με ελάχιστο κόστος και έχει υψηλή χρηστική αξία.

Τα ασαφή συμπερασματικά συστήματα εκμεταλλεύονται με τον βέλτιστο τρόπο την εμπειρία και τα δεδομένα που προέρχονται από αυτή. Όπως είδαμε και στην κατασκευή του ασαφούς συστήματος διαγνωστικής αξιολόγησης που παρουσιάστηκε παραπάνω η θεμελίωση του βασίστηκε σε δεδομένα που προέρχονται από την ανθρώπινη εμπειρία. Χρησιμοποιήθηκε η εξειδικευμένη γνώση του κατασκευαστή σε κάθε βήμα της κατασκευής του συστήματος.

Το ασαφές συμπερασματικό σύστημα διαγνωστικής αξιολόγησης που κατασκευάσαμε προσφέρει μεγάλη ευελιξία στην διαχείριση και μεταβολή των δεδομένων και των αποτελεσμάτων . Το παραπάνω σύστημα μπορεί να αποτελέσει πρότυπο στην κατασκευή συστημάτων αξιολόγησης γενικότερα. Το σύστημα που κατασκευάσαμε βασίζεται στην γενική αρχή ότι η διαδικασία της αξιολόγησης βασίζεται στους στόχους που έχουμε εξ' αρχής θέσει. Από τους στόχους αυτούς λαμβάνονται οι μεταβλητές εισόδου του συστήματος και θέτονται οι γλωσσικοί κανόνες. Με μια αλλαγή λοιπόν των μεταβλητών και τον κανόνων, εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία το σύστημα μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλες εκπαιδευτικές, ιατρικές ή άλλου είδους αξιολογικές διαδικασίες.

## 5. Βιβλιογραφία

[1]G.J. Klir, B. Yuan (1995), 'Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, Theory and applications', Prentice-Hall,New Jersey,

[2] Y. Shi, et al.(2009), 'On dependencies and independencies of fuzzy implication axioms', Fuzzy Sets and Systems

[3] Y. Shi, D. Ruan, E. E. Kerre,(2007), 'On the characterizations of fuzzy implications satisfying $I\ x,y\ = I\ x, I\ x,y$ ', Information Sciences

[4] H. Bustince, P. Burillo, F. Soria (2003) , 'Automorphisms, negations and implication operators', Fuzzy Sets and Systems

[5] J. Dombi(1982), 'A General Class of Fuzzy Operators, the De Morgan Class of Fuzzy Operators and Fuzziness Measures Induced by Fuzzy Operators', Fuzzy Sets and Systems, p. 149-163

[6] B. De Baets, E.E. Kerre (1993), ‘The generalized modus ponens and the triangular fuzzy data model’, Fuzzy Sets and Systems 59, p. 305-317
[7] D. Dubois, H. Prade (1999), ‘Fuzzy Sets In Approximate Reasoning, Part1: Inference with Possibility Distributions’, Fuzzy Sets and Systems, p. 73-132
[8] Ana Pradera, et al (2007), ‘On Fuzzy Set Theories, Fuzzy Logic A Spectrum of Theoretical and Pragnatic Issues’, Springer
[9] George J. Klir (2006). ‘Uncertainty and Information. Foundations of Generalized Information Theory. (John Wiley)
[10] Ronald R. Yager, Dimitar P. Filev (1994).Essentials of fuzzy modeling and Control. (John Wiley)
[11] Guanrong Chen, Trung Tat Pham (2001). Introduction to Fuzzy Sets, Fuzzy logic and Fuzzy Control Systems (CRC Press)
[12] Paul P. Wang, Da Ruan, Etienne E. Kerre, (Eds) (2007) Fuzzy Logic, A spectrum of Theoretical and Practical Issues. (Springer)
[13] R. Biswas (1995), “An application of fuzzy sets in students' evaluation,” Fuzzy Sets and Systems, vol. 74, no. 2, pp. 187-194.
[14] Fourali (1994),“Fuzzy logic and the quality of assessment of portfolios”, Fuzzy Sets and Systems 68:123–139”
[15] Law (1996) “Using fuzzy numbers in educational grading system. Fuzzy Sets Syst 83:311–323”
[16] Khairul A. Rasmani, Qiang Shen (2006). Data-driven fuzzy rule generation and its application for student academic performance evaluation.(Springer Science and Business Media, LLC )
[17] Fuzzy Logic Applications to Students’ Evaluation in Intelligent Learning Systems, XVI Congreso Nacional y II Congreso Internacional de Informática y Computación
de la ANIEI. Zacatecas, 22-24 de octubre del 2003. Vol. I, pp. 161 – 166.
[18] Hui-Yu Wang and Shyi-Ming Chen. New Methods for Evaluating Students’ Answerscripts Using Fuzzy Numbers Associated with Degrees of Confidence, 2006 IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Vancouver Canada
[19] J. S. Roger Jang, Ned Gulley (1995), “Matlab Fuzzy Logic Toolbox”, The Mathworks Inc,
[20] William A. Mehrens, Irvin J. Lehmann. Measurement and Evaluation in Education and Psychology (Wadsworth)
[21] Δ. Ζουκης (2009), “Ασαφή συμπερασματικα μοντέλα και εφαρμογη στη διαγνωστική αξιολόγηση των μαθηματικών, Διπλωματική Εργασία, ΕΑΠ, Πατρα,
[22] Μ. Τουμάσης (2002), “Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών” Εκδόσεις Gutenberg
[23] ΥΠ.Ε.Π.Θ. (1998), Κέντρο εκπαιδευτικής έρευνας , “Η αξιολόγηση των μαθητών της Α’ Λυκείου στα Μαθηματικά” Αθήνα
[24] ΥΠ.Ε.Π.Θ. (1998), Κέντρο εκπαιδευτικής έρευνας , “Η αξιολόγηση των μαθητών της Α’ Λυκείου (Γενικές οδηγίες και στοιχεία μεθοδολογίας)”, Αθήνα

*Σημείωση*

*Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών «Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά» της Σχολής Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου και αποτελεί μέρος της διπλωματικής εργασίας του συγγραφέως, η οποία εκπονήθηκε υπό την επίβλεψη του Δρ. Παπαδόπουλου Βασιλείου, Καθηγητή Δημοκρίτειου Πανεπιστημίου Θράκης, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών* (papadob@civil.duth.gr .)

Open Education - The Journal for Open and Distance Education and Educational Technology
Volume 8, Number 1, 2012 Section one © Open Education ISSN: 1791-9312

# 2η ΕΝΟΤΗΤΑ: «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΕΣ»

**Ανάπτυξη Μαθηματικών Θεμάτων στα πλαίσια της ΑεξΕκπ.**

**Mathematical Master Theses on Pure Mathematics, in the frame of Open Distance education**

**Μιχαήλ Ανούσης**
Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Τμήμα Μαθηματικών
Καθηγητής
mano@aegean.gr

**Περίληψη**
Παρουσιάζουμε συνοπτικά διπλωματικές εργασίες που έχουν εκπονηθεί στο πρόγραμμα Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά του ΕΑΠ στην περιοχή των θεωρητικών μαθηματικών.

**Abstract**
We briefly present master's theses submitted in the program Graduate Studies in Mathematics of the Hellenic Open University which are in the area of pure mathematics.

**Λέξεις κλειδιά**
*thesis, pure mathematics*

## 1. Η κατεύθυνση των θεωρητικών μαθηματικών

Συχνά όταν μιλάμε ή γράφουμε για τα μαθηματικά αναφερόμαστε στα θεωρητικά μαθηματικά και στα εφαρμοσμένα μαθηματικά. Εν τούτοις η διάκριση μεταξύ τους δεν είναι σαφής. Περιοχές που θεωρούνται ότι ανήκουν στα εφαρμοσμένα μαθηματικά έχουν ισχυρό θεωρητικό υπόβαθρο (για παράδειγμα η Αριθμητική Ανάλυση ή τα Χρηματοικονομικά) και περιοχές των θεωρητικών μαθηματικών έχουν συχνά σημαντική εφαρμοσμένη διάσταση (για παράδειγμα η Θεωρία Αριθμών και η Θεωρία Αλγεβρικών Καμπυλών χρησιμοποιούνται ουσιωδώς στην κρυπτογραφία). Πολλές φορές αυτό που διαφοροποιεί τους μαθηματικούς είναι η οπτική με την οποία προσεγγίζουν το αντικείμενο τους καθώς και τα εργαλεία που χρησιμοποιούν.

Με την επεξεργασία μαθηματικών θεμάτων είτε στα πλαίσια των Θεματικών Ενοτήτων είτε στα πλαίσια της εκπόνησης μιας διπλωματικής εργασίας, οι φοιτητές του Προγράμματος ΜΣΜ του ΕΑΠ εξοικειώνονται με την μαθηματική αυστηρότητα, καλλιεργούν την δυνατότητα της αφηρημένης προσέγγισης και βοηθούνται στο να κατανοήσουν πως αναπτύσσεται και δομείται μια θεωρία.

Τα θεωρητικά μαθηματικά χρειάζονται σαν υπόβαθρο για την παρακολούθηση των Θεματικών Ενοτήτων του προγράμματος, αλλά αποτελούν και αντικείμενο μελέτης αυτά καθεαυτά από τους φοιτητές του προγράμματος. Αυτό γίνεται κυρίως μέσα από την εκπόνηση διπλωματικών εργασιών. Οι διπλωματικές εργασίες που πολλοί φοιτητές του προγράμματος επιλέγουν να εκπονήσουν στα θεωρητικά μαθηματικά, είναι κατά κανόνα συνθετικές. Δηλαδή οι φοιτητές καλούνται να παρουσιάσουν έναν κλάδο ή ένα μέρος του ή να παρουσιάσουν κάποιο γνωστό σημαντικό πρόβλημα.

Επίσης πολλές διπλωματικές εργασίες έχουν υβριδικό χαρακτήρα, δηλαδή μπορεί να είναι πάνω σε θέματα θεωρητικών και εφαρμοσμένων μαθηματικών, ή σε θέματα θεωρητικών μαθηματικών και ιστορίας των μαθηματικών ή επιστημολογίας.

## 2. Η κατεύθυνση των θεωρητικών μαθηματικών στο πρόγραμμα

Τα θεωρητικά μαθηματικά είναι παρόντα σε όλα τα προγράμματα σπουδών μαθηματικών είτε σε αυτόνομη μορφή, είτε στα πλαίσια άλλων μαθημάτων.

Αναφέρουμε ότι στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Μαθηματικών του Ανοικτού Πανεπιστήμιου της Μεγάλης Βρετανίας (The open university (uk)) προσφέρονται τα ακόλουθα μεταπτυχιακά μαθήματα:

Αναλυτική Θεωρία Αριθμών I και II, Γεωμετρία των Fractals, Συναρτησιακή Ανάλυση, Λογισμός Μεταβολών και Προχωρημένος Λογισμός.

Η κατεύθυνση των θεωρητικών μαθηματικών στο πρόγραμμα θεραπεύεται κυρίως στην Θεματική Ενότητα ΜΣΜ 50.

Σκοπός της Θεματικής Ενότητας είναι η εμπέδωση βασικών μαθηματικών γνώσεων και τεχνικών από την Ανάλυση, την Γραμμική Άλγεβρα, τη Θεωρία Πιθανοτήτων και την Στατιστική ούτως ώστε οι φοιτητές να αποκτήσουν το αναγκαίο υπόβαθρο για την παρακολούθηση των μαθημάτων του δευτέρου έτους σπουδών.

Δίνεται έμφαση στην εμβάθυνση σε θεμελιώδεις μαθηματικές έννοιες, καθώς και στην εξοικείωση με τους υπολογισμούς.

Η Θ.Ε. περιλαμβάνει τις ακόλουθες υποενότητες

1. Προχωρημένη Ανάλυση
2. Γραμμική Άλγεβρα
3. Στοιχεία Στοχαστικών Μαθηματικών
4. Αναλυτική & Διαφορική Γεωμετρία

Τα θεωρητικά μαθηματικά υπάρχουν σε σημαντικό βαθμό και στις άλλες ΘΕ:

Στην Θεματική ενότητα ΜΣΜ 60 για την μελέτη των Διαφορικών και Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χρησιμοποιούνται τεχνικές απο την Κλασική Ανάλυση, την Ανάλυση Fourier, την θεωρία Τελεστών, την Συναρτησιακή Ανάλυση.

Στην Θεματική ενότητα ΜΣΜ 51 γίνεται συζήτηση για τα θεμέλια των μαθηματικών.

Στην ΜΣΜ 62 υπάρχουν ειδικά θέματα Εφαρμοσμένης Άλγεβρας, Ανάλυσης και Γεωμετρίας.

## 3. Τα θεωρητικά μαθηματικά στις διπλωματικές εργασίες.

Οι τομείς που οι φοιτητές του προγράμματος εκπονούν διπλωματικές εργασίες είναι πολλοί. Αναφέρουμε: Κλασική Ανάλυση, Συναρτησιακή Ανάλυση, Τοπολογία, Κρυπτογραφία, Διαφορική Γεωμετρία, Αλγεβρική Γεωμετρία, Ασαφή Σύνολα κα.

Στην συνέχεια παρουσιάζουμε θέματα που έχουν διαπραγματευτεί οι φοιτητές μας σε κάποιες διπλωματικές εργασίες.

Τις τελευταίες δεκαετίες έχει αναπτυχθεί μεγάλο ενδιαφέρον για την θεωρία των Fractals. Τα fractals είναι σύνολα που έχουν πολύπλοκη δομή και η γεωμετρία τους δεν μπορεί να περιγραφεί με κλασικούς όρους. Δεν υπάρχει απλός ορισμός των fractals. Ένα χαρακτηριστικό τους είναι η αυτοομοιότητα: πολλές φορές ένα fractal μπορεί να γραφεί σαν ένωση υποσυνόλων του που το καθένα από αυτά είναι ένα αντίτυπο του αρχικού συνόλου σε μικρότερη κλίμακα. Ένα άλλο χαρακτηριστικό τους είναι ότι αν προσπαθήσουμε να τους αποδώσουμε διάσταση με εύλογο τρόπο, τότε πολύ συχνά η διάσταση τους δεν είναι ακέραιος αριθμός. Το πρωτότυπο των fractals μπορεί να θεωρηθεί το σύνολο του Cantor, ενώ ένα πολύ γνωστό fractal είναι το σύνολο του Mandelbrot.

Στην εργασία της κας Μαγδαληνής Κοκκαλιάρη με θέμα «Fractals: Μαθηματική ανάλυση-Μελέτη-Εφαρμογές», 2009

παρουσιάζονται βασικά παραδείγματα fractals, με ιδιαίτερη αναφορά στο σύνολο Cantor, καθώς και οι χαρακτηριστικές τους ιδιότητες.

Το πρώτο μέρος είναι αφιερωμένο στη μαθηματική ανάλυση των fractals. Ορίζεται η διάσταση Hausdorff και η διάσταση box counting ενός συνόλου. Υπολογίζονται αυτές οι διαστάσεις σε παραδείγματα. Κατόπιν, παρουσιάζονται τεχνικές υπολογισμού της διάστασης Hausdorff. Παρουσιάζονται και μελετώνται τα γενικευμένα σύνολα Cantor καθώς και διάφορα άλλα παραδείγματα fractals.

Η Θεωρία Γραφημάτων είναι η μελέτη των γραφημάτων, δομών που χρησιμοποιούνται για να μοντελοποιήσουν διμερείς σχέσεις μεταξύ αντικειμένων από μια συλλογή. Ένα γράφημα είναι μια συλλογή κορυφών και μια συλλογή από πλευρές που συνδέουν ζεύγη κορυφών. Ένα γράφημα μπορεί να είναι κατευθυνόμενο ή όχι. Δηλαδή οι πλευρές να ξεκινούν από μια κορυφή και να καταλήγουν σε μια άλλη, η να μην γίνεται διάκριση μεταξύ αρχής και τέλους της πλευράς. Τα γραφήματα είναι βασικό αντικείμενο του κλάδου των διακριτών μαθηματικών.

Η θεωρία γραφημάτων έχει εφαρμογές στην Κοινωνιολογία, στην Βιολογία, στην Συγκοινωνιολογία κα

Επίσης έχει εφαρμογές στην Γεωμετρία, στην Τοπολογία, στην Θεωρία Κόμβων και στην Θεωρία Ομάδων.

Ο Άγγελος Ανανίας εκπόνησε διπλωματική εργασία με τίτλο «Θεωρία Γραφημάτων: Επίπεδα Γραφήματα-Χρωματισμοί-Θεωρία Ramsey», 2010.

Στην εργασία αυτή αφού δοθούν οι βασικοί ορισμοί, παρουσιάζονται διάσημα προβλήματα που συνέβαλαν στην εξέλιξη της Θεωρίας των Γραφημάτων. Οι γέφυρες του Königsberg, τα κυκλώματα Hamilton και το Πρόβλημα του Πλανόδιου Πωλητή είναι μερικά από αυτά.

Παρουσιάζονται και μελετώνται τα επίπεδα γραφήματα και ο χρωματισμός γραφημάτων και γίνεται παρουσίαση των θεωρημάτων των τεσσάρων και πέντε χρωμάτων.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται μια εισαγωγή στη θεωρία Ramsey, μια θεωρία δύσκολη με πολλά ανοικτά προβλήματα.

Τα ασαφή σύνολα εισήχθησαν από τον Zadeh την δεκαετία του 1960. Στα κλασικά σύνολα ένα στοιχείο ανήκει η δεν ανήκει στο σύνολο. Στην θεωρία των ασαφών συνόλων υπάρχουν διάφοροι βαθμοί ανήκειν. Αυτό γίνεται με την βοήθεια της συνάρτησης συμμετοχής που παίρνει τιμές στο διάστημα από μηδέν έως ένα. Αν η συνάρτηση παίρνει τιμές μόνον μηδέν ή ένα, έχουμε ένα κλασικό σύνολο. Οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις των κλασικών συνόλων είναι ειδική περίπτωση συναρτήσεων συμμετοχής.

Παράλληλα με την θεωρία των ασαφών συνόλων αναπτύσσεται και η θεωρία της ασαφούς λογικής. Πρόκειται για μια πλειότιμη λογική όπου οι μεταβλητές παίρνουν τιμές από μηδέν έως και ένα. Έτσι μια πρόταση μπορεί να έχει μια τιμή αλήθειας που είναι ένας αριθμός από μηδέν έως και ένα, ενώ στην κλασική λογική μπορεί να έχει μόνο μηδέν ή ένα. Η θεωρία αυτή έχει πολλές εφαρμογές ειδικά σε περιοχές όπου η πληροφορία δεν είναι πλήρης η ακριβής. Έχει επίσης εφαρμογές στην Θεωρία Ελέγχου, στην Τεχνητή Νοημοσύνη και στην Θεωρία Αποφάσεων.

Η Ζαφειρία Καταβόλου εκπόνησε διπλωματική εργασία με τίτλο «Ασαφής Θεωρία Αποφάσεων», 2011.

Στα προβλήματα του πραγματικού κόσμου πολλές φορές οι αποφάσεις λαμβάνονται σε συνθήκες αβεβαιότητας, δηλαδή έλλειψης ακριβούς πληροφορίας. Πηγές αβεβαιότητας αποτελούν τα ελλιπή δεδομένα καθώς και αντικειμενικοί περιορισμοί (οικονομικοί, χρονικοί). Η διαδικασία λήψης απόφασης πραγματοποιείται σε ένα ασαφές περιβάλλον και η Ασαφής Λογική αποτελεί το κύριο εργαλείο επίλυσης προβλημάτων απόφασης στα πλαίσια της Ασαφούς Θεωρίας Αποφάσεων.

Στην εργασία παρουσιάζονται οι βασικές αρχές της Ασαφούς Λογικής, η βασική μεθοδολογία μοντελοποίησης και επίλυσης προβλημάτων απόφασης και συγκεκριμένα μοντέλα επίλυσης προβλημάτων απόφασης.

Η Αντιγόνη Μασιαλά εκπόνησε διπλωματική εργασία με τίτλο «Ασαφείς εκτιμητές παραμέτρων συναρτήσεων πιθανότητας», 2009.

Στην εργασία αυτή συνδέεται η εκτιμητική από τη στατιστική με την εκτιμητική των ασαφών αριθμών έτσι ώστε να επιτευχθεί ακριβέστερη εκτίμηση για τις παραμέτρους των συναρτήσεων πιθανότητας. Περιγράφεται η κατασκευή ασαφών εκτιμητών και παρουσιάζεται ο έλεγχος ασαφών στατιστικών υποθέσεων.

Ο Δημήτριος Κόλκας εκπόνησε διπλωματική εργασία με τίτλο «Οι έννοιες του ασαφούς εγκλεισμού και της ασαφούς εντροπίας στην Ασαφή Θεωρία Συνόλων», 2010.

Στην εργασία παρουσιάζονται τρόποι παραγωγής μέτρων ασαφούς εγκλεισμού και ασαφούς εντροπίας από ασαφείς συνεπαγωγές.

Στα πρώτα δύο κεφάλαια παρουσιάζονται βασικές έννοιες της Κλασικής Θεωρίας Συνόλων και της Ασαφούς Θεωρία Συνόλων. Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι έννοιες του ασαφούς εγκλεισμού και της ασαφούς εντροπίας και πως συνδέονται μεταξύ τους. Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τρόποι παραγωγής μέτρων ασαφούς εγκλεισμού και ασαφούς εντροπίας από ασαφείς συνεπαγωγές.

Η Αλγεβρική Γεωμετρία είναι ο κλάδος των μαθηματικών ο οποίος συνδυάζει τεχνικές από την Άλγεβρα με την γλώσσα και τα προβλήματα της Γεωμετρίας. Έχει κεντρικό ρόλο στα σύγχρονα μαθηματικά και συνδέεται με την Μιγαδική Ανάλυση, την Τοπολογία και την Θεωρία Αριθμών. Κεντρικό αντικείμενο μελέτης της Αλγεβρικής Γεωμετρίας είναι οι αλγεβρικές πολλαπλότητες. Δηλαδή σύνολα λύσεων συστημάτων πολυωνυμικών εξισώσεων. Παραδείγματα πολλαπλοτήτων είναι οι καμπύλες δευτέρου βαθμού στο επίπεδο και οι επιφάνειες δευτέρου βαθμού στον χώρο. Αυτό που ενδιαφέρει είναι οι ιδιότητες του συνόλου των λύσεων (δηλαδή της πολλαπλότητας) και όχι η εύρεση κάποιων λύσεων. Η ιδέα του Descartes για την χρήση συντεταγμένων για την περιγραφή γεωμετρικών αντικειμένων στο επίπεδο είναι κεντρική στην Αλγεβρική Γεωμετρία.

Η Αλγεβρική Γεωμετρία είναι μια περιοχή των μαθηματικών με μεγάλη ερευνητική δραστηριότητα και τεχνική δυσκολία. Αξίζει να αναφέρουμε ότι ο A. Wiles στην απόδειξη του τελευταίου θεωρήματος του Fermat χρησιμοποιεί τεχνικές από την Αλγεβρική Γεωμετρία.

Η κα Ελένη Ταξίδου εκπόνησε διπλωματική εργασία με τίτλο «Εισαγωγή στην Αλγεβρική Γεωμετρία», 2010.

Στην εργασία μελετώνται το πρόβλημα της απαλοιφής της παραμέτρου (implicitization), το πρόβλημα του «ανήκειν» σε κάποιο ιδεώδες (ideal membership), και το πρόβλημα της παρεμβολής. Εισάγονται και μελετώνται οι βάσεις Groebner. Στο τρίτο κεφάλαιο αναπτύσσονται κριτήρια για το πότε ένα σύστημα εξισώσεων έχει λύση.

Στα σύγχρονα μαθηματικά πέρα από την μελέτη συναρτήσεων, δίνεται έμφαση στην μελέτη κλάσεων συναρτήσεων. Οι συναρτήσεις θεωρούνται σαν στοιχεία ενός συνόλου το οποίο πολύ συχνά έχει κάποια δομή. Για παράδειγμα είναι γραμμικός ή τοπολογικός χώρος. Η αλληλεπίδραση αυτών το δομών χαρακτηρίζει την Συναρτησιακή Ανάλυση.

Ο Νικόλαος Κοκαρίδας εκπόνησε διπλωματική εργασία με τίτλο «Τοπολογίες σε χώρους συναρτήσεων», 2011.

Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται τοπολογίες σε χώρους συναρτήσεων. Η προσέγγιση στηρίζεται στην θεωρία κατηγοριών και στην θεωρία συνεχών δικτυωτών. Μελετώνται οι point-open, set-open compact-open τοπολογίες στο χώρο των συνεχών συναρτήσεων από έναν τοπολογικό χώρο σε έναν άλλον. Επίσης μελετώνται οι splitting και οι jointly continuous τοπολογίες.

Το πέμπτο αίτημα του Ευκλείδη είναι ότι από σημείο εκτός ευθείας φέρεται μια ακριβώς ευθεία παράλληλη προς την δοθείσα ευθεία. Το πέμπτο αίτημα είναι η αιτία για μια συζήτηση που κράτησε είκοσι αιώνες κα συνέβαλε στην ανακάλυψη της Υπερβολικής Γεωμετρίας. Στην υπερβολική γεωμετρία μπορούμε από σημείο εκτός ευθείας να φέρουμε περισσότερες από μία ευθείες παράλληλες προς την δοθείσα ευθεία.

Η Παγώνα Πανκίδου εκπόνησε διπλωματική εργασία με θέμα «Το πέμπτο αίτημα του Ευκλείδη και η ανακάλυψη της Υπερβολικής Γεωμετρίας», 2010.

Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται οι σημαντικότεροι πρόδρομοι της Υπερβολικής Γεωμετρίας (Saccheri, Lambert, Legendre) και αναλύεται το έργο τους. Στην συνέχεια παρουσιάζονται οι θεμελιωτές της Υπερβολικής Γεωμετρίας (Gauss, Bolyai, Lobachevski) και οι βασικές αρχές της.

Η κρυπτογραφία είναι ένας κλάδος ο οποίος χρησιμοποιείται στς επικοινωνίες και χρησιμοποιεί ισχυρά μαθηματικά εργαλεία από την Θεωρία Αριθμών και την Θεωρία Αλγεβρικών Καμπυλών.

Ο Δημήτρης Παγουρτζής εκπόνησε διπλωματική εργασία με τίτλο «Βασικές Αρχές Κρυπτογραφίας», 2011.

Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται το μαθηματικό υπόβαθρο της θεωρίας, το κόστος υπολογισμού βασικών πράξεων, η θεωρία των κρυπτοσυστημάτων. Μελετώνται οι παράμετροι κρυπτοσυστημάτων δημόσιου κλειδιού και τα κρυπτοσυστήματα δημόσιου κλειδιού RSA και El Gamal.

Ο Γιώργος Μπούκης εκπόνησε διπλωματική εργασία με τίτλο «Η Γνωσιακή Επιστήμη των Ενσώματων Μαθηματικών», 2011.

Στο πρώτο μέρος της εργασίας γίνεται μια συνοπτική παρουσίαση του πλαισίου ιδεών της Γνωσιακής Επιστήμης των Ενσώματων Μαθηματικών. Το δεύτερο μέρος είναι αφιερωμένο στην πραγματεία του Αρχιμήδη περί Τετραγωνισμού της Παραβολής, όπου επιχειρείται να ανιχνευτούν οι ενσώματες όψεις της ευρετικής προσέγγισης του προβλήματος.

Συμπερασματικά μπορούμε να αναφέρουμε ότι υπάρχει αξιοσημείωτη ζήτηση από τους φοιτητές για εκπόνηση διπλωματικών εργασιών στα θεωρητικά μαθηματικά και μεγάλη ποικιλία στα θέματα.

Η εκτίμηση μας είναι ότι τα θέματα των διπλωματικών είναι απαιτητικά, η εκπόνηση τους απαιτεί μεγάλη ενέργεια και διάθεση από τους φοιτητές και το επίπεδο των διπλωματικών εργασιών είναι υψηλό.

*Open Education - The Journal for Open and Distance Education and Educational Technology*
*Volume 8, Number 1, 2012 Section one © Open Education ISSN: 1791-9312*

# Μια εισαγωγή στη θεωρία Ramsey

# An Introduction to Ramsey Theory

**Άγγελος Ανανίας**
Msc Μαθηματικός
Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο
Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας

**Περίληψη**

Η παρούσα εργασία επιχειρεί μια εισαγωγή στη θεωρία Ramsey. Στόχος της είναι να εκθέσει σύντομα πώς η θεωρία των γραφημάτων συναντά τη συνδυαστική δίνοντας κομψά και χρήσιμα αποτελέσματα.

Μετά από μια όχι και τόσο σύντομη εισαγωγή, παρουσιάζεται το θεώρημα του Turan, το θεώρημα του Ramsey και οι αποδείξεις τους. Συνεχίζοντας συναντάμε εφαρμογές αλλά και ιδέες για μελλοντικές εργασίες.

Ο προσανατολισμός της συγγραφής είναι περισσότερο εκπαιδευτικός παρά ερευνητικός. Επιχειρείται να κεντριστεί το ενδιαφέρον του αναγνώστη και να δοθεί ένα θεωρητικό υπόβαθρο χρήσιμο σε όποιον επιθυμεί να φτάσει σε υψηλότερο από αυτό το επίπεδο.

**Abstract**

This paper attempts an introduction to Ramsey Theory. Its purpose is to explain briefly, how the Graph Theory meets Compinatorics giving elegant and useful results.

After a not so brief introduction, the theorem of Turan and Ramsey's theorem with their proofs are presented. We also give some applications and ideas for future work.

The orientation of the writing is rather educational. It focuses to stimulate the interest of the reader and give a theoretical background useful for further study.

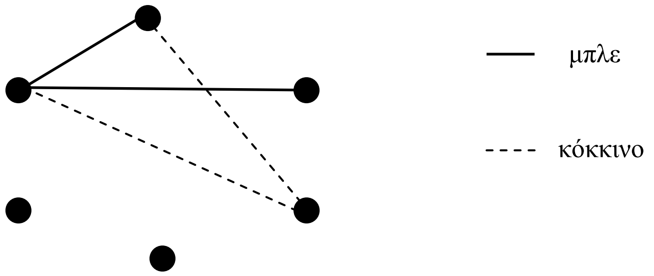
**Keywords**

*Graph Theory, Ramsey Theory, Combinatorics*

## Εισαγωγή – Το πρόβλημα του party

Το πρόβλημα που κίνησε τη δική μου περιέργεια όσον αφορά τη θεωρία γραφημάτων, διατυπώθηκε από τον καθηγητή μου στο πρώτο έτος του μεταπτυχιακού μου: «Μπορείτε να αποδείξετε ότι αν σε μία συγκέντρωση ατόμων, επιλέξουμε τυχαία έξι, τότε ανάμεσα σε αυτά θα υπάρχουν οπωσδήποτε είτε τρία άτομα που γνωρίζονται μεταξύ τους είτε τρία άτομα που κανένα δε γνωρίζει τα άλλα δύο;» Ιδιαίτερα το σχόλιό του: «… βέβαια αν γνωρίζεται θεωρία γραφημάτων αυτό δεν είναι κάτι δύσκολο να αποδειχθεί, αν όμως το καταφέρετε χωρίς να τη γνωρίζετε τότε… μπράβο σας» ήταν αρκετό να ωθήσει στην προσπάθεια οποιονδήποτε μαθηματικό.

Η λύση που είχα δώσει έμοιαζε κάπως έτσι:

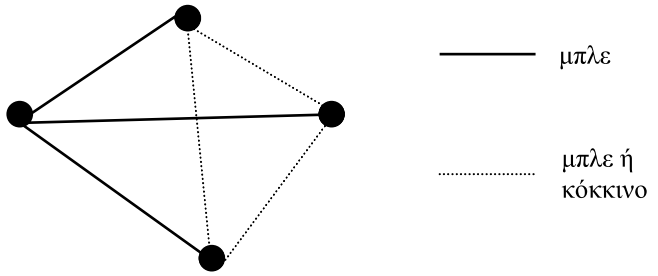



Σχήμα 1

απεικόνισα κάθε άτομο με ένα σημείο και ένωνα με μια μπλε γραμμή δύο άτομα που γνωρίζονταν μεταξύ τους και με μια κόκκινη γραμμή δύο άτομα που δε γνωρίζονταν μεταξύ τους. Έμενε να αποδείξω ότι σχηματιζόταν τουλάχιστον ένα μπλε ή ένα κόκκινο τρίγωνο.

Επιλέγοντας τυχαία ένα άτομο από τα έξι, υπάρχουν δύο περιπτώσεις:
*α) γνωρίζει τουλάχιστον τρεις από τους υπόλοιπους πέντε*
*β) γνωρίζει το πολύ δύο από τους υπόλοιπους πέντε.*

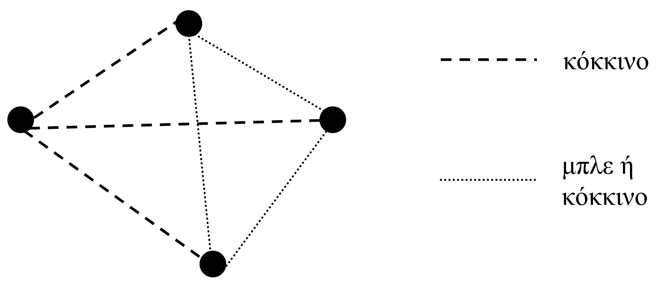
α) Αν γνωρίζει τουλάχιστον τρεις, τότε αν οποιοιδήποτε δύο από αυτούς τους τρεις γνωρίζονται μεταξύ τους, έχουμε ένα μπλε τρίγωνο: σχήμα 2.




Σχήμα 2

Αν κανείς από τους τρεις δε γνωρίζει τους άλλους δύο, έχουμε ένα κόκκινο τρίγωνο.

β) Αν γνωρίζει το πολύ δύο, τότε υπάρχουν τρεις που δε γνωρίζει. Αν οποιοιδήποτε δύο από αυτούς τους τρεις δε γνωρίζονται τότε έχουμε ένα κόκκινο τρίγωνο όπως φαίνεται στο σχήμα 3.




Σχήμα 3

Αν και οι τρεις γνωρίζονται έχουμε ένα μπλε τρίγωνο.

Στην πραγματικότητα το παραπάνω πρόβλημα δεν αποτελεί παρά μία μικρή ειδική περίπτωση σε ένα μεγάλο τμήμα της θεωρίας των γραφημάτων που είναι γνωστό ως θεωρία Ramsey. Γενικά η θεωρία Ramsey μελετά σχέσεις που αναπόφευκτα εμφανίζονται σε προβλήματα συνδυαστικής. Έτσι θα δούμε στη συνέχεια αν, όταν έχουμε ένα δεδομένο γράφημα, είναι δυνατόν να γνωρίζουμε από πριν ότι υπάρχουν p κορυφές που έχουν μια συγκεκριμένη ιδιότητα και q κορυφές που δεν την έχουν. Θα αναζητήσουμε, για την ακρίβεια, το ελάχιστο πλήθος των κορυφών του γραφήματος ώστε να είμαστε σίγουροι ότι αυτό συμβαίνει.

**Βασικές έννοιες**

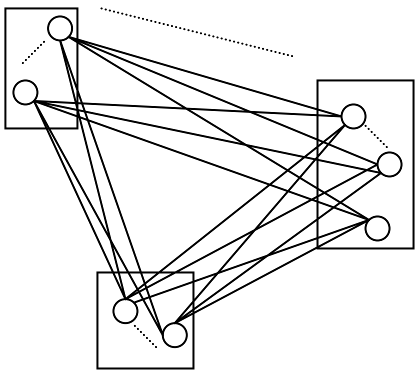
Για να αποσαφηνιστούν οι εκφράσεις και οι συμβολισμοί που χρησιμοποιούνται στη συνέχεια, διευκρινίζουμε εδώ ότι

- με $K_p$ συμβολίζουμε το πλήρες γράφημα που έχει p κορυφές. Δηλαδή ένα γράφημα που έχει p κορυφές οι οποίες συνδέονται ανά δύο με ακριβώς μία ακμή.
- Με $E_G$ συμβολίζουμε το σύνολο των ακμών, ενώ με $\varepsilon_G$ το πλήθος των ακμών ενός γραφήματος G.
- Επαγόμενο υπογράφημα ενός γραφήματος G, ονομάζουμε ένα γράφημα του οποίου το σύνολο των κορυφών, είναι υποσύνολο του συνόλου των κορυφών του G και οι ακμές του είναι όλες οι ακμές του G που προσπίπτουν στις κορυφές αυτές.

**Θεώρημα του TURAN**

Αρχικά θα αναλογιστούμε το πρόβλημα της εύρεσης μιας συνθήκης ώστε το $K_p$ να εμφανίζεται σε ένα γράφημα. Είναι φανερό ότι κάθε γράφημα περιέχει το $K_1$ και ότι οποιοδήποτε μη διακριτό γράφημα περιέχει το $K_2$.

**<u>Ορισμός 1</u>:** Ένα *πλήρες p – μερές γράφημα* αποτελείται από p διακριτά επαγόμενα υπογραφήματα $G_1, G_2, \ldots, G_p \subseteq G$ όπου $uv \in E_G$ αν και μόνο αν οι u και v ανήκουν σε διαφορετικά μέρη $G_i$ και $G_j$ με $i \neq j$.



πλήρες
p – μερές
γράφημα

Σχήμα 4

Ένα πλήρες p – μερές γράφημα είναι επαρκώς ορισμένο από τα διακριτά του μέρη $G_i$ με $i \in 1, 2, \ldots, p$ .

Έστω $p \geq 3$ και $H = H_{n,p}$ το πλήρες (p – 1) – μερές γράφημα τάξης n = t(p – 1) + r όπου $r \in 0, 1, 2, \ldots, p-2$ και $t \geq 0$ έτσι ώστε να υπάρχουν r μέρη $H_1, H_2, \ldots, H_r$ τάξης t + 1 (κανένα αν r = 0) και p – 1 – r μέρη $H_{r+1}, \ldots, H_{p-1}$ τάξης t. Προφανώς εδώ το r είναι το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του n με το p – 1 συνεπώς καθορίζεται από το n και το p.

Από τον ορισμό του H προκύπτει ότι $K_p \not\subseteq H$. Επίσης εύκολα μπορεί κάποιος να υπολογίσει ότι το πλήθος των ακμών του H είναι ίσο με:

$$T(n,p)=\frac{p-2}{2(p-1)}\cdot n^2-\frac{r}{2}\cdot\left(1-\frac{r}{p-1}\right) \qquad (1)$$

Το επόμενο αποτέλεσμα δείχνει ότι το παραπάνω όριο T(n , p) είναι βέλτιστο.

**Θεώρημα 1:** (Θεώρημα του TURAN)
Αν ένα γράφημα **G** τάξης **n** έχει **$\varepsilon_G$ > T(n , p)** ακμές τότε το G περιέχει ένα πλήρες υπογράφημα **$K_p$** με $p\geq 3$.

**Απόδειξη:** Αρκεί να αποδείξουμε ότι αν έχουμε ένα γράφημα G, με τον μέγιστο αριθμό ακμών ώστε αυτό να μην περιέχει το $K_p$, τότε ισχύει

$$\varepsilon_G\leq T(n,p) \qquad (2)$$

Είναι n = (p – 1)t + r με $t\in\mathbb{N}$ και r = 0, 1, …, p – 2. (3)
Τα t και r στην (3) ορίζονται με μοναδικό τρόπο από τα n και p ως πηλίκο και υπόλοιπο αντίστοιχα της *ευκλείδειας διαίρεσης* του n με το p – 1. Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε *επαγωγή* στο t.

**Αν t = 0**, είναι $n = r\neq 0$ και $n\leq p-2$. Το γράφημα G δεν περιέχει το $K_p$ και έχει πλήθος ακμών

$$\varepsilon_G\leq\binom{n}{2}=\frac{n\cdot(n-1)}{2} \qquad (4)$$

Τότε όμως: $$T(n,p)=\frac{p-2}{2(p-1)}\cdot n^2-\frac{n}{2}\cdot\left(1-\frac{n}{p-1}\right)=\frac{n\cdot(n-1)}{2} \qquad (5)$$

Από (4) , (5) είναι $\varepsilon_G\leq T(n,p)$ .

**Υποθέτοντας ότι η (2) ισχύει για το t – 1**, *θα δείξουμε ότι ισχύει και για το* $t\in\mathbb{N}^*$ ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη. Όπως έχουμε αναφέρει, το γράφημα G έχει τον μέγιστο αριθμό ακμών ώστε να μην περιέχει το $K_p$. Αυτό συνεπάγεται ότι το G περιέχει ένα πλήρες υπογράφημα $K_{p-1}$, που το ονομάζουμε A, γιατί αν δεν περιείχε θα μπορούσαμε να προσθέσουμε ακμές μέχρι να προκύψει ένα.

*Συνεχίζουμε εκτιμώντας το πλήθος των ακμών του G.* Οι ακμές του υπογραφήματος A, είναι

$$\varepsilon_A=\binom{p-1}{2}=\frac{(p-1)\cdot(p-2)}{2} \qquad (6)$$

Κάθε κορυφή **v** που δεν ανήκει στο A, πρόσκειται το πολύ σε p – 2 κορυφές του A αφού διαφορετικά $A\cup\{v\}=K_p$. Έτσι οι ακμές που συνδέουν τις κορυφές του A και τις *n – p + 1* κορυφές που δεν ανήκουν στο A, είναι

$$\varepsilon'\leq(n-p+1)\cdot(p-2) \qquad (7)$$

Αυτές οι *n – p + 1* κορυφές του G που δεν ανήκουν στο A, αποτελούν ένα επαγόμενο υπογράφημα του G. Είναι n – p + 1 = (t – 1)(p – 1) + r οπότε γι’ αυτές μπορούμε να εφαρμόσουμε την υπόθεση της επαγωγής. Έτσι <u>το πλήθος των ακμών στο υπογράφημα Β</u>, είναι:

$$\varepsilon_B \le T(n-p+1, p) \tag{8}$$

Από τις (6), (7), (8), προκύπτει ότι:

$$\varepsilon_G = \varepsilon_A + \varepsilon' + \varepsilon_B \le \frac{(p-1)\cdot(p-2)}{2} + (n-p+1)\cdot(p-2) + T(n-p+1, p) = T(n, p).$$

Όπως έπρεπε να δείξουμε.

Συνέπεια του θεωρήματος του Turan είναι και το παρακάτω.

**<u>Πόρισμα 1</u>:** Αν ένα γράφημα G έχει πλήθος ακμών $\varepsilon_G > \frac{1}{4}v_G^2$ τότε περιέχει τουλάχιστον ένα τρίγωνο $K_3$. □

**Θεωρία Ramsey**

Τι γίνεται αν η συνθήκη που θέλουμε να ελέγξουμε είναι λίγο πιο πολύπλοκη; Πως μπορούμε να είμαστε σίγουροι αν οι κορυφές ενός γραφήματος έχουν ή δεν έχουν μια συγκεκριμένη ιδιότητα; Το θεώρημα του Ramsey, σε μία απλή του έκφραση θα μπορούσε να διατυπωθεί ως εξής:

**<u>Θεώρημα 2</u>:** Για κάθε $p \in \mathbb{N}$, υπάρχει ένας ελάχιστος $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε κάθε γράφημα τάξης n να περιέχει είτε το πλήρες $K_p$ είτε το συμπληρωματικό του $\overline{K}_p$ ως επαγόμενο υπογράφημα. □

Μια γενικότερη έκφραση του θεωρήματος, θα δούμε παρακάτω. Πρώτα όμως:

**<u>Ορισμός 2</u>:** Έστω *α* ένας χρωματισμός ακμών ενός γραφήματος G. Ένα υπογράφημα $H \subseteq G$ καλείται **i – μονοχρωματικό**, αν όλες οι ακμές του έχουν το ίδιο χρώμα **i**.

Φτάνουμε λοιπόν σε αυτό που θεωρείται ως ένα από τα κοσμήματα της συνδυαστικής.

**<u>Θεώρημα 3 (Ramsey 1930)</u>:** Αν $p, q \ge 2$ οποιοιδήποτε ακέραιοι, τότε υπάρχει ***ένας ελάχιστος ακέραιος R(p , q)*** τέτοιος ώστε για κάθε $n \ge R(p, q)$ οποιοσδήποτε 2 – χρωματισμός ακμών του $K_n \to \{1, 2\}$ περιέχει τουλάχιστον ένα *1 – μονοχρωματικό $K_p$* ή ένα *2 – μονοχρωματικό $K_q$*. □

Ή ισοδύναμα:

**<u>Θεώρημα 4</u>:** Αν $p, q \ge 2$ οποιοιδήποτε ακέραιοι, τότε υπάρχει ένας ***ελάχιστος ακέραιος R(p , q)*** τέτοιος ώστε για κάθε $n \ge R(p, q)$ οποιοδήποτε γράφημα τάξης n περιέχει ένα *πλήρες υπογράφημα τάξης p* ή ένα *διακριτό υπογράφημα τάξης q*. □

Ο αριθμός **R(p , q)** είναι γνωστός ως **αριθμός Ramsey** για τους p και q. Προφανώς ισχύει R(p , 2) = p και R(2 , q) = q. Τα προηγούμενα θεωρήματα προκύπτουν από το επόμενο αποτέλεσμα.

**Θεώρημα 5 (Erdös και Szekeres 1935):** Ο αριθμός Ramsey υπάρχει για κάθε $p,q \geq 2$ και μάλιστα

$$R(p,q) \leq R(p,q-1) + R(p-1,q)$$

**Απόδειξη:** Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο p + q.

- Γνωρίζουμε ότι ο $R(p,q)$ υπάρχει για p = 2 ή q = 2, συνεπώς υπάρχει για $$p+q \leq 5.$$
- Δεχόμαστε ότι υπάρχει αριθμός Ramsey για άθροισμα p + q – 1.
- Θα δείξουμε ότι υπάρχει ο αριθμός Ramsey για άθροισμα p + q. Αρκεί να δείξουμε ότι, αν έχουμε ένα γράφημα G τάξης R(p , q – 1) + R(p – 1 ,q) τότε περιέχει είτε ένα πλήρες υπογράφημα τάξης p, είτε ένα διακριτό υπογράφημα τάξης q.

  Έστω $v \in G$ και $A = V_G \setminus (N_G(v) \cup \{v\})$ το σύνολο των κορυφών που δεν είναι γειτονικές στη v. Επειδή $|N_G(v)| + |A| + 1 = R(p,q-1) + R(p-1,q)$ είναι:

  $$|N_G(v)| \geq R(p-1,q) \quad \text{ή} \quad |A| \geq R(p,q-1).$$

  Έτσι:

  - Αν $|N_G(v)| \geq R(p-1,q)$, από τον ορισμό του αριθμού Ramsey, το $N_G(v)$ περιέχει ένα πλήρες υπογράφημα B τάξης p – 1 ή ένα διακριτό υπογράφημα τάξης q. Στην πρώτη περίπτωση το $B \cup \{v\}$ είναι ένα πλήρες $K_p$ στο G, ενώ στη δεύτερη περίπτωση το διακριτό γράφημα τάξης q είναι ένα υπογράφημα του G.
  - Αν $|A| \geq R(p,q-1)$ τότε το A περιέχει ένα πλήρες υπογράφημα τάξης p ή ένα διακριτό υπογράφημα S τάξης q – 1. Στην πρώτη περίπτωση το πλήρες υπογράφημα βρίσκεται στο G και στη δεύτερη περίπτωση το $S \cup \{v\}$ είναι ένα διακριτό υπογράφημα του G τάξης q.

  Όπως έπρεπε να δείξουμε.

$\square$

Γενικά ο προσδιορισμός του αριθμού Ramsey για δύο ακέραιους δε φαίνεται να είναι εύκολη υπόθεση. Το προηγούμενο θεώρημα αν και αποδεικνύει την ύπαρξή του δε δίνει μεγάλη βοήθεια στον προσδιορισμό του. Ένα περισσότερο ***συγκεκριμένο άνω φράγμα*** μας δίνει η επόμενη πρόταση.

**Θεώρημα 6 (Erdös και Szekeres 1935):** Για κάθε $p,q \geq 2$ έχουμε

$$R(p,q) \leq \binom{p+q-2}{p-1}$$

**Απόδειξη:** Για p = 2 ή q = 2 ο ισχυρισμός είναι προφανής. Χρησιμοποιούμε επαγωγή στο p + q για τη γενίκευση της πρότασης.

Έστω ότι $p,q \geq 3$. Από το θεώρημα 5.5 και την υπόθεση της επαγωγής, έχουμε:

$$R(p,q) \leq R(p,q-1) + R(p-1,q) \leq \binom{p+q-3}{p-1} + \binom{p+q-3}{p-2} = \binom{p+q-2}{p-1}$$

που είναι το ζητούμενο.

□

Στον πίνακα που ακολουθεί φαίνονται μερικές ***γνωστές τιμές και εκτιμήσεις*** των αριθμών Ramsey R(p , q):

**Αριθμοί Ramsey**

| p \ q | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | **6** | **9** | **14** | **18** | **23** | **28** | **36** | **40-43** |
| 4 | **9** | **18** | **25** | **35-41** | **49-61** | **55-84** | **69-115** | **80-149** |
| 5 | **14** | **25** | **43-49** | **58-87** | **80-143** | **95-216** | **121-316** | **141-442** |

Σχήμα 5

Όπως φαίνεται στον πίνακα του σχήματος 5, δεν έχουμε πολλές γνώσεις πάνω στους αριθμούς Ramsey. Ο πρώτος άγνωστος R(p , p) (με p = q) είναι για p = 5. Έχει διαπιστωθεί ότι:

$$43 \le R(5,5) \le 49$$

αλλά ο καθορισμός της ακριβούς τιμής του, παραμένει ανοικτό πρόβλημα.

**Γενικεύσεις**

Το θεώρημα του Ramsey μπορεί να γενικευθεί ως εξής:

**<u>Θεώρημα 7</u>:** Έστω $q_i \ge 2$ ακέραιοι με $i \in \{1,2,\dots,k\}$ και $k \ge 2$. Υπάρχει ακέραιος

$$R = R(q_1, q_2, \dots, q_k)$$

τέτοιος ώστε για κάθε $n \ge R$ **οποιοσδήποτε k – χρωματισμός ακμών** του $K_n$ **έχει τουλάχιστον ένα i – μονοχρωματικό** $K_{q_i}$ για κάποιο i. □

Από το θεώρημα 7 προκύπτει το παρακάτω.

**<u>Πόρισμα 2</u>:**

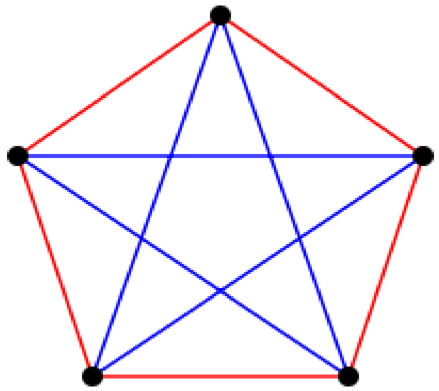
Έστω $k \ge 2$ και $H_1$, $H_2$, …, $H_k$ τυχαία γραφήματα. **Υπάρχει ένας ακέραιος $R(H_1, H_2, \dots, H_k)$** τέτοιος ώστε για κάθε γράφημα $K_n$ με $n \ge R(H_1, H_2, \dots, H_k)$ και για οποιονδήποτε k – χρωματισμό ακμών ***α*** του $K_n$, **το** $K_n^{\alpha}$ **να περιέχει τουλάχιστον ένα i – μονοχρωματικό υπογράφημα $H_i$** για κάποιο i.

□

Με άλλα λόγια **ο προηγούμενος ακέραιος από τον αριθμό Ramsey** των ακεραίων $q_1, q_2, \dots, q_k$ **είναι ο μέγιστος αριθμός κορυφών** που μπορούμε να έχουμε σε ένα πλήρες γράφημα, ώστε να υπάρχει ένας k – χρωματισμός ακμών του, **χωρίς i – μονοχρωματικό** $K_{q_i}$ για κάποιο i.

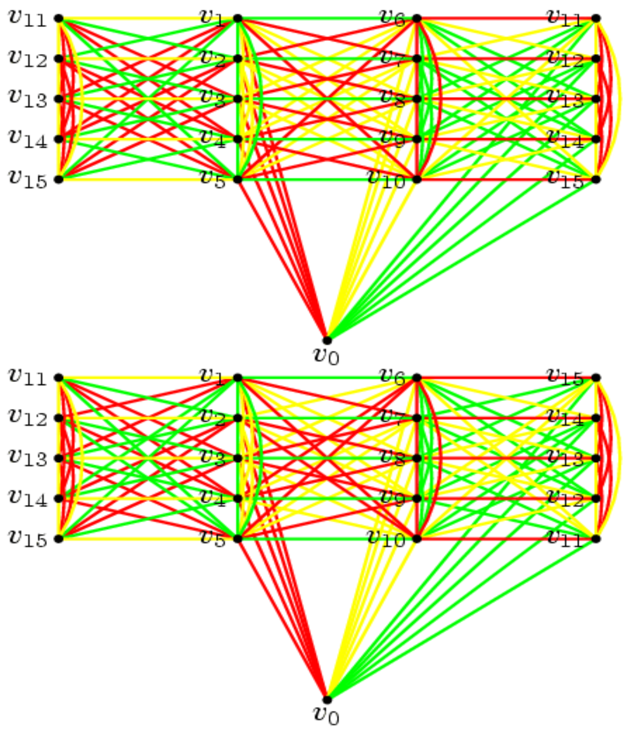
<u>Παράδειγμα 1</u>

Όπως υποψιαζόμαστε από την εισαγωγή του κεφαλαίου με το «πρόβλημα του party», είναι R(3 , 3) = 6. Η απόδειξη ολοκληρώνεται από το σχήμα 6 όπου φαίνεται πως αν έχουμε πέντε κορυφές σε ένα πλήρες γράφημα, μπορούμε να χρωματίσουμε τις ακμές του χρησιμοποιώντας δύο χρώματα χωρίς να σχηματιστεί μονοχρωματικό τρίγωνο.



Σχήμα 6

Ο υπολογισμός των αριθμών Ramsey για περισσότερους από δύο ακέραιους είναι ακόμα δυσκολότερος. Από τους γνωστούς γενικευμένους αριθμούς Ramsey είναι ο $R(3,3,3)=17$. Στο σχήμα 7 γίνεται προσπάθεια να δειχθεί ότι αν έχουμε δεκαέξι κορυφές σε πλήρες γράφημα και έναν 3 – χρωματισμό του γραφήματος είναι δυνατόν να μην υπάρχει μονοχρωματικό τρίγωνο.




Σχήμα 7

Αυτοί είναι οι δύο γνωστοί 3 – χρωματισμοί των δεκαέξι κορυφών $v_0$, $v_1$, …,$v_{15}$. Για καλύτερη τελική εικόνα στο σχήμα 7 οι κορυφές $v_{11}$, …, $v_{15}$ έχουν τοποθετηθεί δεξιά αλλά και αριστερά των υπόλοιπων.

Συνεχίζοντας την γενίκευση θα μπορούσαμε να δούμε αποτελέσματα της θεωρίας Ramsey στην θεωρία τυχαίων γραφημάτων, κάτι που θα το αποφύγουμε στην παρούσα εργασία.

**Εφαρμογές**

Το θεώρημα Ramsey και άλλα θεωρήματα του ίδιου τύπου (όπως το θεώρημα των Erdös και Szekeres), έχουν μεγάλο πλήθος εφαρμογών σε πολλούς κλάδους των Μαθηματικών όπως η Θεωρία Αριθμών, η Θεωρία Συνόλων και η Γεωμετρία. Ακόμα εφαρμογές τους συναντάμε στη Λογική, στη Θεωρητική Πληροφορική αλλά και στην Επιστήμη των Υπολογιστών. Επιλέγουμε εδώ δύο από τις πιο απλές, για να τις παρουσιάσουμε.

Εφαρμογή 1 – Γεωμετρία

Σαν συνέπεια του θεωρήματος *Erdös και Szekeres* προκύπτει ότι *αν έχουμε σημεία στο επίπεδο*, σε τυχαία θέση (όχι συνευθειακά ανά τρία), τότε *ο ελάχιστος αριθμός σημείων* που απαιτείται ώστε να είμαστε σίγουροι πως ανάμεσα σε αυτά υπάρχουν τουλάχιστον **n** *που ορίζουν ένα κυρτό n – γωνο*, μπορεί να εκτιμηθεί και συμβολίζεται **g(n)**. Αρχικά εικαζόταν ότι $g(n) = 2^{n-2} + 1$ κάτι που είναι αλήθεια για $n < 6$. Αποδείχθηκε όμως πως:

$$2^{n-2}+1 \leq g(n) \leq \binom{2n-4}{n-2}+1.$$

Το άνω φράγμα του g(n) δέχθηκε από τότε αρκετές βελτιώσεις (βλέπε: [5, 15, 24]). Το βέλτιστο άνω φράγμα που εμφανίζεται, είναι πλέον: $\binom{2n-5}{n-2}+2$.

Εφαρμογή 2 – Λογική, Πληροφορική

Στην Πληροφορική βρίσκουμε εφαρμογή του θεωρήματος Ramsey στην «Αυτοματοποιημένη Απόδειξη Θεωρήματος». Η ιδέα της αυτοματοποίησης της διαδικασίας απόδειξης ξεκινά ή τουλάχιστον διατυπώνεται με σαφήνεια από τον **Hilbert**. Είναι γνωστή η πεποίθησή του πως κάθε πρόταση στα Μαθηματικά μπορεί να αποδειχθεί και ο επιπλέον στόχος του να γίνει η απόδειξη μια διαδικασία τόσο τυποποιημένη, που θα μπορούσε να εκτελείται ακόμα και από μία μηχανή.

Η απόδειξη όλων των αληθών προτάσεων στα Μαθηματικά είναι κάτι που αποδείχθηκε ανέφικτο από τον **Gödel** με το *Θεώρημα της Μη Πληρότητας*. Σαν να μην έφτανε αυτό, ο **Turing** απέδειξε πως δεν υπάρχει γενικός αλγόριθμος που να αποφασίζει αν μία πρόταση αποδεικνύεται ή όχι. Το θεώρημα του Ramsey λοιπόν, ήταν στην πραγματικότητα ένα λήμμα [22] προς ένα θεώρημα που αποδείκνυε πως σε μία συγκεκριμένη κλάση *λογικής πρώτης τάξης*, όλες οι προτάσεις είναι αποκρίσιμες (μπορούμε δηλαδή να αποδείξουμε αν είναι αληθείς ή όχι).

Είναι ενδιαφέρον ότι χρησιμοποιώντας μια επέκταση στο θεώρημα του Ramsey [21], δόθηκε η πρώτη αναπόδεικτη πρόταση στην *πεπερασμένη Θεωρία Συνόλων* ή ισοδύναμα, στην *Αριθμητική του **Peano***. Αποδείξεις για αυτή την πρόταση μπορούμε να δούμε και στα [11, 14, 18, 19, 20].

Η «*Αυτοματοποιημένη Απόδειξης Θεωρήματος*» είναι ένα αναπτυσσόμενο πεδίο στην Πληροφορική και με τη βοήθειά της έχει επιτευχθεί μια βελτίωση της απόδειξης του *Θεωρήματος των τεσσάρων χρωμάτων* το 2005 (web: wikipedia – the free encyclopedia). Επίσης έχει μεγάλη επιτυχία στη συμβολική ολοκλήρωση *ορισμένου ολοκληρώματος* [1].

Γενικά οι εφαρμογές και τα παραδείγματα που μπορούν να αναφερθούν έχουν τόσο μεγάλο εύρος που όλα όσα γράφονται σε αυτή την εργασία μπορούν να θεωρηθούν μόνο ως διαφημιστικά μηνύματα για τη Θεωρία των Γραφημάτων και τη Θεωρία Ramsey.

**Διεθνής βιβλιογραφία**

1. Adams, A. A., Gottliebsen, H., Linton, S.A., And Martin, U., "A verifiable symbolic definite integral table look-up". In *Automated Deduction* – CADE – 16. Proceedings. Berlin: Springler. H. (Gandinger ed.), Lecture Notes Comput. Sci. vol. 1632, pp 112 – 126, 1999.
2. Appel Keneth; Haken Wolfgang; Koch John, "Every Planar Graph is Four Colorable", Illinois Journal of Mathematics 21, 439 – 567, 1997.
3. Bondy, J. A. and U. S. R. Morty, "Graph Theory with Applications", American Elsevier Publishing Company, New York, 1976.
4. Boolos, G.; Burgess, J. P.; Jeffrey, R., "Computability and Logic ($5^{th}$ ed.)", Cambridge: Cambridge University Press, ISBN 9780521877527, 2007.
5. Chunk, F. R. K., and Graham, R. L., "Forced convex n – gons in the plane", Discrete Comput. Geom. 19, 3, Special Issue 367 – 371, 1998.
6. Diestel, R., "Graph Theory", Electronic Edition, Springer – Verlag Heidelberg, New York, 2005.
7. Dijkstra, E. W., "A Note on Two Problems in Connexion with Graphs", *Numerische Mathematic*, 1, 269 – 271, 1959.
8. Erdös & Szekeres, "A Combinatorial Problem in Geometry", *Compotio Math.* 2, 463 – 470, 1935.
9. Euler Archive (The), commentary on publication and original text in Latin.
10. Fields, G. E., "Introduction to Graph Theory", Southern Connecticut State University, 2001.
11. Graham, R. L., Rothschild, B. L., and Spencer, J. H., "Ramsey Theory" second edition, Wiley – *Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization.* John Wiley & Sons Inc. New York, 1990.
12. Harary, F., "Graph Theory", Addison – Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1969.
13. Harju, Tero, "Lecture Notes on Graph Theory", University of Turku – Finland, 2007.
14. Ketonen J. and Solovay R., "Rapidly growing Ramsey functions", *Ann. of Math. (2)*, 113, 267 – 314, 1981.
15. Kleitman, D., and Pachter, L., "Finding convex sets among points in the plane". *Discrete Comput. Geom.* 19, 3, Special Issue, 405 – 410, 1998.
16. Kuratowski, Kazimierz, « Sur le problème des courbes gauches en topologie », Fund. Math. 15, 271 – 283, 1930.
17. Landman, B. M. & Robertson, A., "Ramsey Theory on the Integers", Student Mathematical Library, 24, Providence, RI: AMS ISBN 0821831992.
18. Loebl, M., "Unprovable combinatorial statements", *Discrete Math. 108*, 1 – 3, 333 – 342, 1992.
19. Loebl, M., and Nesetril, J., "An unprovable – type Ramsey theorem", *Proc. Amer. Soc. 116*, 3, 819 – 824, 1992.
20. Nesetril, J., "Ramsey theory", *Handbook of Compinatorics*, Vol. 1, 2, (Graham R. L. et al., eds) pp. 1331 – 1403, Elsevier, Amsterdam, 1995.
21. Paris, J., and Harrington, L., "A mathematical incompleteness in Peano Arithmetic", North – Holland Publishing Co, Amsterdam, 1977.
22. Ramsey, F. P., "On a problem of formal logic", *Proc. London Math. Soc*., 264 – 286, 1930.
23. Rosta Vera, "Ramsey Theory Applications" Dept. of Mathematics and Statistics, McGill University, Montreal, 2004.
24. Toth, G., and Valtr, P. "Note on the Erdös and Szekeres theorem", *Discrete Comput. Geom. 19*, 3, Special Issue, 457 – 459, 1998.
25. Wilson, Robin, "Four Color Suffice" Penguin Books, London, 2002.

**Βιβλιογραφία στα ελληνικά**

1. Liu, C.L., «Στοιχεία Διακριτών Μαθηματικών», Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2004.
2. Μαυρονικόλας, Μ., «Θεωρία Γράφων», Ε. Α. Π., Πάτρα 2002.

*Σημείωση*

*Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών «Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά» της Σχολής Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου και αποτελεί μέρος της διπλωματικής εργασίας του συγγραφέως, η οποία εκπονήθηκε υπό την επίβλεψη του Δρ. Ανούση Μιχάλη, Καθηγητή Πανεπιστημίου Αιγαίου, Τμήμα Μαθηματικών* (mano@aegean.gr).

*Open Education - The Journal for Open and Distance Education and Educational Technology*
*Volume 8, Number 1, 2012 Section one © Open Education ISSN: 1791-9312*

# Προβλήματα δυναμικού σε μη κυρτά χωρία

# Potential problems in non-convex domains

**Γεώργιος Μπαγάνης**
Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας
Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο
gbaganis@eap.gr

**Περίληψη**

Ο μετασχηματισμός Kelvin, γνωστός και ως αντιστροφή του Kelvin, είναι μία από τις παλαιότερες και πολύ γνωστές μαθηματικές μεθόδους, ο οποίος επιλύει ποικίλα προβλήματα δυναμικού. Η σπουδαιότητα και η ελκυστικότητα της τεχνικής αυτής, έγκειται στο γεγονός ότι η λύση ενός προβλήματος σε μία επιφάνεια του $\mathbf{R}^3$, παραμένει λύση του προβλήματος και για μία διαφορετική επιφάνεια, αυτή που είναι η εικόνα της αρχικής επιφάνειας μέσω της αντιστροφής του Kelvin (W. Thompson, 1845). Με την παρούσα εργασία, γίνεται αναφορά στην εφαρμογή της αντιστροφής του Kelvin στο $\mathbf{R}^2$, παρουσιάζοντας τη γεωμετρία και τις βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Kelvin στο $\mathbf{R}^2$ καθώς επίσης και τη διατύπωση του θεωρήματος του Kelvin στο επίπεδο (Baganis and Hadjinicolaou, 2009). Η μη γραμμικότητα του μετασχηματισμού σε συνδυασμό με το θεώρημα μας δίνουν τη δυνατότητα να εξασφαλίζουμε αναλυτικές λύσεις προβλημάτων συνοριακών τιμών για αρμονικές συναρτήσεις σε μη κυρτά χωρία. Μια ενδιαφέρουσα περίπτωση, είναι αυτή του εσωτερικού του ισόπλευρου τριγώνου στο οποίο η λύση της εξίσωσης Laplace με συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet ή τύπου Neumann έχει δοθεί από τους Dassios & Fokas (Dassios and Fokas, 2005). Το ισόπλευρο τρίγωνο μέσω της αντιστροφής του Kelvin ως προς τον περιγεγραμμένο κύκλο του, απεικονίζεται σε ένα συμμετρικό μη κυρτό σχήμα και μετά η εφαρμογή μιας σειράς βημάτων δίνει τη δυνατότητα κατασκευής αρμονικών συναρτήσεων, οι οποίες ικανοποιούν πλήρως τη γεωμετρία του χωρίου εξωτερικά του μη κυρτού σχήματος.

**Abstract**

Kelvin's transformation, also known as Kelvin inversion, is one of the earliest and well known mathematical methods for solving various potential problems. The attraction of the technique lay in the fact that once a problem is solved for one surface in $R^3$, then, with the transformation we have the solution of a problem for a different surface, the image of the original under the transformation (W. Thompson, 1845). The present work deals with Kelvin's inversion in $R^2$, by presenting first the geometry and the basic properties of the transformation in $\mathbf{R}^2$ and then the formulation of the Kelvin theorem in 2-D (Baganis and Hadjinicolaou, 2009). Since the Kelvin inversion transforms the boundaries in a nonlinear way, the Kelvin theorem in $R^2$ enables us to solve boundary value problems for harmonic functions when one, either the image or the pre-image domain accepts separable solutions. An interesting case is that of the interior of an equilateral triangle in which the solution of the Laplace equation respect to Dirichlet or Neumann boundary conditions has been given by

Dassios and Fokas (Dassios and Fokas, 2005). The equilateral triangle is mapped under Kelvin's transformation with respect to the circumscribe circle into a symmetric non-convex shape, and then, by applying a sequence of steps one can construct harmonic functions which satisfy completely the geometry of the exterior of this particular non-convex domain.

**Λέξεις κλειδιά**
*Αντιστροφή Kelvin, ισόπλευρο τρίγωνο, εξίσωση Laplace*

## 1. Εισαγωγή

Το περιεχόμενο της επιστολής του William Thompson (αργότερα Lord Kelvin) προς τον Liouville στις 8 Οκτωβρίου 1845, ήταν η περιγραφή μιας μη γραμμικής απεικόνισης στον $R^3$. Η απεικόνιση αυτή, γνωστή σήμερα ως μετασχηματισμός του Kelvin ή αντιστροφή του Kelvin ως προς μία σφαίρα στην περίπτωση του $R^3$ ή ως προς ένα κύκλο στην περίπτωση του $R^2$, παρέχει την σπουδαία ιδιότητα της διατήρησης της αρμονικότητας. Αυτό σημαίνει ότι αν η λύση της εξίσωσης Laplace είναι γνωστή σε ένα χωρίο, τότε η λύση της εξίσωσης Laplace είναι επίσης γνωστή και στην εικόνα του χωρίου που προκύπτει μέσω του μετασχηματισμού του Kelvin. Η ιδιότητα αυτή μας εφοδιάζει με μια μαθηματική τεχνική με την οποία μπορούμε να δίνουμε αναλυτικές λύσεις σε προβλήματα δυναμικού και η οποία έχει εφαρμοσθεί σε πολλές περιπτώσεις προβλημάτων με μη κυρτά και λεία σύνορα όπου η γνωστή μέθοδος «χωρισμός των μεταβλητών» δεν μπορεί να εφαρμοσθεί.

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται η αντιστροφή του Kelvin για την επίλυση ενός εξωτερικού προβλήματος δυναμικού σε ένα μη κυρτό χωρίο που είναι η εικόνα του ισόπλευρου τριγώνου μέσω της αντιστροφής του Kelvin ως προς το περιγεγραμμένο κύκλο. Αξίζει να σημειωθεί, ότι δεν υπάρχει καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων που να επιτρέπει το χωρισμό μεταβλητών για την εξίσωση Laplace στο ισόπλευρο τρίγωνο. Τελευταία όμως, μια νέα προσέγγιση για την εξασφάλιση λύσεων σε προβλήματα συνοριακών τιμών στο $R^2$ και για την εξίσωση Laplace σε κυρτά χωρία παρουσιάσθηκε από τους Dassios and Fokas (Dassios and Fokas, 2005). Η λύση εκφράζεται μέσω μιας ολοκληρωτικής αναπαράστασης συναρτήσει των *φασματικών συναρτήσεων* (*spectral functions*) οι οποίες ορίζονται από επικαμπύλια ολοκληρώματα πάνω σε κάθε πλευρά του συνόρου του κυρτού πολυγώνου. Οι φασματικές συναρτήσεις, ικανοποιούν μία εξίσωση την επονομαζόμενη από τον Fokas (Fokas, 2001) ως *global relation* ή από τον Shanin (Shanin, 1997) ως *functional equation*. Ανάλογα με τον τύπο του προβλήματος η ποσότητα προς ολοκλήρωση εκφράζεται συναρτήσει των γνωστών δεδομένων Dirichlet και των άγνωστων δεδομένων Neumann και αντίστροφα. Στην περίπτωση που έχουμε συνοριακές συνθήκες Dirichlet τα δεδομένα Neumann υπολογίζονται από την απεικόνιση *Dirichlet – to – Neumann* ενώ στην περίπτωση που έχουμε συνοριακές συνθήκες Neumann τα δεδομένα υπολογίζονται από την απεικόνιση *Neumann – to – Dirichlet* οι οποίες και οι δύο δίνονται από τους Dassios and Fokas (Dassios and Fokas, 2005).

Ο συνδυασμός της αντιστροφής του Kelvin και των ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων του Fokas μας παρέχουν την λύση της εξίσωσης Laplace σε ένα μη κυρτό χωρίο που είναι η εικόνα του ισόπλευρου τριγώνου.

Η δομή της εργασίας έχει ως εξής. Στην ενότητα 2 γίνεται αναφορά στη γεωμετρία, στις ιδιότητες του μετασχηματισμού του Kelvin στην επίδρασή του στους βασικούς διαφορικούς τελεστές και τέλος παρουσιάζεται η διατύπωση του θεωρήματος Kelvin στο $\mathrm{R}^2$ (Baganis and Hadjinicolaou, 2009). Στην τρίτη ενότητα γίνεται εφαρμογή της μεθόδου της αντιστροφής του Kelvin στο ισόπλευρο τρίγωνο ως προς τον περιγεγραμμένο κύκλο, και επίσης γίνεται περιγραφή της διαδικασίας εύρεσης της εικόνας του τριγώνου. Στην ενότητα 4 γίνεται συνοπτική αναφορά στις λύσεις δύο εξωτερικών προβλημάτων, το πρώτο είναι πρόβλημα Dirichlet με συνοριακή συνθήκη την άρτια συνιστώσα του αναπτύγματος της σειράς Fourier ενώ το δεύτερο είναι πρόβλημα Neumann με συνοριακή συνθήκη την περιττή συνιστώσα του αναπτύγματος της σειράς Fourier. Στην πέμπτη ενότητα παραθέτουμε κάποια σχόλια, για την αντιστροφή του Kelvin στο επίπεδο, καθώς επίσης και για τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τις δύο εφαρμογές.

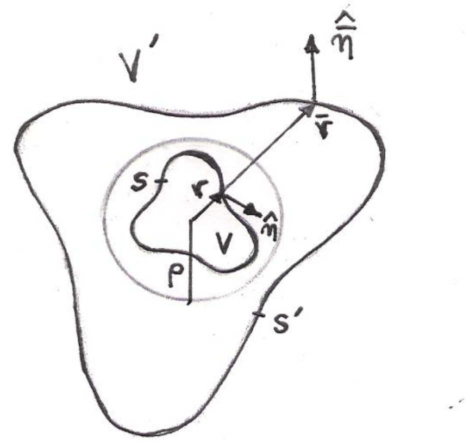
## 2. Γεωμετρία και ιδιότητες της αντιστροφής του Kelvin.

Έστω V το εσωτερικό μιας κλειστής, φραγμένης, λείας επιφάνειας S στο $\mathrm{R}^2$.
Παριστάνουμε το διάνυσμα θέσης με $\boldsymbol{r}$ και το αντίστοιχο μέτρο του με

$$|\boldsymbol{r}| = r \tag{2.1}$$

Επιλέγουμε τον κύκλο ακτίνας $\rho > 0$ και κέντρου (0,0) ως τον κύκλο αντιστροφής για τον μετασχηματισμό του Kelvin

$$K : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2,\ \bar{\boldsymbol{r}} := K(\boldsymbol{r}) := \frac{\rho^2}{r^2}\boldsymbol{r} \tag{2.2}$$



Σχ.1 Αντιστροφή. Kelvin

Άμεσα από τον ορισμό προκύπτει ότι

$$\bar{r}r = \rho^2 \tag{2.3}$$

που σημαίνει ότι τα μέτρα των δύο διανυσμάτων θέσης είναι αντιστρόφως ανάλογα επομένως το σημείο της αρχής απεικονίζεται στο άπειρο και η εικόνα της επιφάνειας S είναι μία λεία επιφάνεια S΄, που βρίσκεται έξω από τον κύκλο με εξωτερική επιφάνεια V΄ η οποία είναι η εικόνα του V (*σχ. 1*).

Ένα άλλο αποτέλεσμα που προκύπτει ευθέως από τον ορισμό είναι

$$\hat{\bar{\boldsymbol{r}}} = \hat{\boldsymbol{r}} \tag{2.4}$$

το οποίο δείχνει τη σχέση ανάμεσα στα δύο μοναδιαία διανύσματα.

Επίσης αξίζει να αναφέρουμε την επίδραση του μετασχηματισμού Kelvin στους διαφορικούς τελεστές:

**α**) Η σχέση η οποία συνδέει τις κλίσεις (gradients) στο αρχικό χωρίο και στην εικόνα του είναι

$$\bar{\nabla}_{\bar r}=\frac{\bar r^2}{\rho^2}\left(\nabla_r-2\hat{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) \qquad (2.5)$$

**β**) Η επίδραση της αντιστροφής του Kelvin στον τελεστή Laplace είναι

$$\bar{\Delta}(\bar{\boldsymbol r})=\frac{\bar r^4}{\rho^4}\Delta(\boldsymbol r) \qquad (2.6)$$

Από τη σχέση (2.6) απορρέει το ακόλουθο θεμελιώδες αποτέλεσμα το οποίο καλούμε στη συνέχεια θεώρημα Kelvin σε δύο διαστάσεις του οποίου η απόδειξη δίνεται από Baganis and Hadjinicolaou (Baganis and Hadjinicolaou, 2009).

**Θεώρημα Kelvin σε 2-Διαστάσεις**. *Έστω V είναι ένα φραγμένο χωρίο στον* $\mathbb{R}^2$ *και έστω V′ είναι η εικόνα του μέσω του μετασχηματισμού*

$$\bar{\boldsymbol r}=\frac{\rho^2}{r^2}\boldsymbol r. \qquad (2.7)$$

*Αν* $u(\boldsymbol r)$ *είναι μία λύση της* $\Delta u(\boldsymbol r)=0$, $\boldsymbol r\in V$ *τότε* $\bar u(\bar{\boldsymbol r})=u(\bar{\boldsymbol r})$ *είναι μία λύση της* $\bar\Delta\bar u(\bar{\boldsymbol r})=0$, $\bar{\boldsymbol r}\in V'$.

**3. Αντιστροφή Kelvin στο Ισόπλευρο τρίγωνο.**

Έστω V είναι το εσωτερικό χωρίο, φραγμένο από ένα ισόπλευρο τρίγωνο *S*. Υποθέτουμε ότι το μήκος κάθε πλευράς είναι *l* και οι κορυφές του τριγώνου είναι οι εικόνες, στο μιγαδικό επίπεδο, των μιγαδικών αριθμών

$$z_1=\frac{l}{\sqrt3}e^{\frac{i\pi}{3}},\; z_2=\bar z_1,\; z_3=-\frac{l}{\sqrt3} \qquad (3.1)$$

Τότε, οι πλευρές $(z_2,z_1)$, $(z_1,z_3)$ και $(z_3,z_2)$ του ισοπλεύρου τριγώνου περιγράφονται από τα διανύσματα θέσης $\boldsymbol r_1$, $\boldsymbol r_2$ and $\boldsymbol r_3$ αντίστοιχα.

$$\boldsymbol r_1(\theta_1)=\left(\frac{l}{2\sqrt3},\frac{l}{2\sqrt3}\tan\theta_1\right), \qquad -\frac{\pi}{3}\le\theta_1\le\frac{\pi}{3}$$

(3.2α)

$$\boldsymbol r_2(\theta_2)=\left(\frac{l\cos\theta_2}{3\sin\theta_2-\sqrt3\cos\theta_2},\frac{l\sin\theta_2}{3\sin\theta_2-\sqrt3\cos\theta_2}\right), \qquad \frac{\pi}{3}\le\theta_2\le\pi$$

(3.2β)

$$\boldsymbol r_3(\theta_3)=\left(-\frac{l\cos\theta_3}{3\sin\theta_3+\sqrt3\cos\theta_3},-\frac{l\sin\theta_3}{3\sin\theta_3+\sqrt3\cos\theta_3}\right), \qquad \pi\le\theta_3\le\frac{5\pi}{3} \qquad (3.2\gamma)$$

Εφαρμόζοντας την αντιστροφή Kelvin σε δύο διαστάσεις

$$\bar{\boldsymbol r}(\theta)=\left(\frac{\rho}{r(\theta)}\right)^2\boldsymbol r(\theta), \qquad (3.3)$$

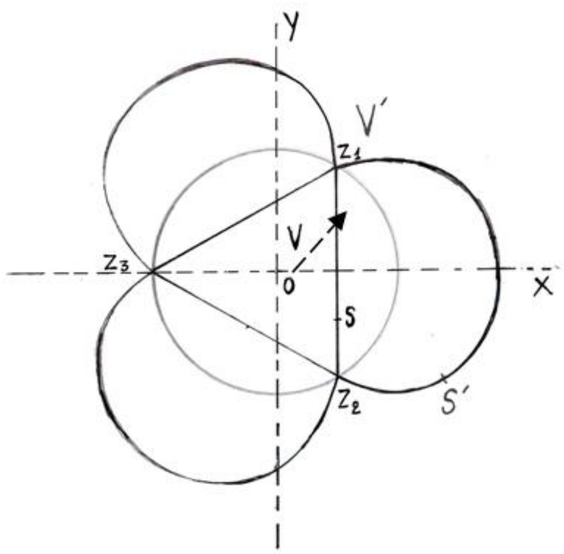
ως προς τον περιγεγραμμένο κύκλο του ισοπλεύρου τριγώνου δηλαδή τον κύκλο με ακτίνα $\rho=\frac{l}{\sqrt3}$ και κέντρο (0,0), τα παραπάνω διανύσματα μετασχηματίζονται στα ακόλουθα διανύσματα θέσης $\bar{\boldsymbol r}_j$, $j$ = 1, 2, 3.

$$\bar{\boldsymbol r}_1(\theta_1)=\left(\frac{2l}{\sqrt3}\cos^2\theta_1,\frac{l}{\sqrt3}\sin2\theta_1\right), \qquad -\frac{\pi}{3}\le\theta_1\le\frac{\pi}{3} \qquad (3.4\alpha)$$

$$\bar{\boldsymbol r}_2(\theta_2)=\left(\frac{l}{2}\sin2\theta_2-\frac{\sqrt3}{3}l\cos^2\theta_2,\; l\sin^2\theta_2-\frac{\sqrt3}{6}l\sin2\theta_2\right), \qquad \frac{\pi}{3}\le\theta_2\le\pi \qquad (3.4\beta)$$

$$[illegible], \quad \pi \le \theta_3 \le \frac{5\pi}{3}, \qquad (3.4γ)$$

Το σύνορο S´ είναι η εικόνα της περιμέτρου S και το εξωτερικό χωρίο V´ είναι η εικόνα του εσωτερικού V. (*σχ.2).*




Σχ. 2. Αντιστροφή Kelvin για το ισόπλευρο τρίγωνο..

## 4. Εφαρμογή

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζεται η μεθοδολογία και η λύση του εξωτερικού προβλήματος, πρώτον με συνοριακή συνθήκη Dirichlet και δεύτερον με συνοριακή συνθήκη Neumann. Και στις δύο περιπτώσεις αναζητούμε μία αρμονική συνάρτηση $u(\boldsymbol{r})$ που να ικανοποιεί την αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη και επιπλέον, για να είναι το πρόβλημα καλά τοποθετημένο, η $u(\boldsymbol{r})$ πρέπει να ικανοποιεί την ασυμπτωτική συνθήκη

$|u(\boldsymbol{r})| \le c$, όταν $\boldsymbol{r}$ τείνει στο άπειρο, (4.1)

για κάθε $\boldsymbol{r} \in \mathrm{V}'$ με $|\boldsymbol{r}| \ge R$, όπου $R$ είναι κάποιος θετικός αριθμός και $c$ είναι μία θετική σταθερά.

Τέλος, η σχέση που συνδέει τις κάθετες παραγώγους στα δύο σύνορα είναι

$$\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{3 r_i^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial n'}, \qquad (4.2)$$

όπου $\frac{\partial}{\partial n'}$ εκφράζει την κάθετη παράγωγο στο σύνορο S ενώ $\frac{\partial}{\partial \overline{n}'}$ εκφράζει την κάθετη παράγωγο στο σύνορο S´.

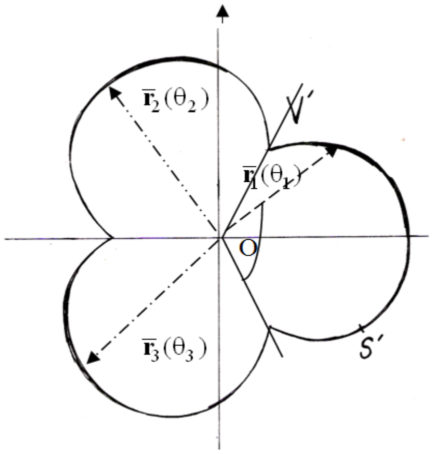
### 4.1 Πρόβλημα Dirichlet

Θεωρούμε το πρόβλημα Dirichlet:

$$\Delta u(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad \boldsymbol{r} \in \mathrm{V}', \qquad (4.3)$$

$$u(\boldsymbol{r}) = \overline{f}, \qquad \boldsymbol{r} \in \mathrm{S}' \qquad (4.4)$$

όπου V´ είναι το εξωτερικό χωρίο μιας κλειστής και λείας μη κυρτής επιφάνειας στο $\mathrm{R}^2$, φραγμένη από την καμπύλη S´ που διαγράφουν τα διανύσματα θέσης (3.4α), (3.4β) και (3.4γ), (*Σχ. 3)*. Ακόμη επιβάλλουμε την ίδια συνάρτηση $\overline{f} \in C^2(R)$ να ισχύει σε κάθε τμήμα της καμπύλης $S'$ και ειδικότερα την άρτια συνιστώσα του αναπτύγματος της σειράς Fourier




Σχ.. 3. Γεωμετρία του προβλήματος

$$\overline{f}(s_j) = \cos\frac{2m\pi s_j}{l} \;,\quad j=1,2,3 \;\text{ και }\; m \in \quad (4.5)$$

όπου

$$s_1 = \frac{3l\theta_1}{2\pi}, \qquad -\frac{\pi}{3} \le \theta_1 \le \frac{\pi}{3} \quad (4.6\alpha)$$

$$s_2 = \frac{3l\theta_2}{2\pi} - l, \qquad \frac{\pi}{3} \le \theta_2 \le \pi \quad (4.6\beta)$$

$$s_3 = \frac{3l\theta_3}{2\pi} - 2l, \qquad \pi \le \theta_3 \le \frac{5\pi}{3} \quad (4.6\gamma)$$

Για την επίλυση του προβλήματος εφαρμόζουμε την ακόλουθη μεθοδολογία που στηρίζεται σε τέσσερα αλγοριθμικά βήματα (Baganis and Hadjinicolaou, 2009):

**α)** Εφαρμόζουμε την αντιστροφή Kelvin στα δεδομένα Dirichlet του δοθέντος συνόρου για να υπολογίσουμε τις αντίστοιχες τιμές Dirichlet πάνω στο σύνορο του ισόπλευρου τριγώνου που είναι η εικόνα του αρχικού συνόρου.

**β)** Εφαρμόζουμε το “Dirichlet to Neumann map” και παράγουμε τα δεδομένα Neumann για το σύνορο του ισόπλευρου τριγώνου οπότε εξασφαλίζεται η ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης του αντίστοιχου προβλήματος Dirichlet για το εσωτερικό του ισόπλευρου τριγώνου (Dassios and Fokas, 2005).

**γ)** Εφαρμόζουμε αντιστροφή Kelvin για τα δεδομένα Neumann του συνόρου του ισόπλευρου τριγώνου που προέκυψαν στο (β) βήμα, οπότε αυτά μετασχηματίζονται στα αντίστοιχα δεδομένα Neumann για το αρχικό σύνορο.

**δ)** Η εφαρμογή του Θεωρήματος Kelvin στο $R^2$ μας επιτρέπει να μετασχηματίσουμε τη λύση του προβλήματος Dirichlet για το εσωτερικό του ισοπλεύρου τριγώνου (αυτή που προέκυψε στο (β) βήμα) στη λύση του ανάλογου εξωτερικού προβλήματος για την εικόνα της αντιστροφής του ισόπλευρου τριγώνου η οποία ικανοποιεί τις αρχικές συνοριακές συνθήκες.

Η λύση παρουσιάζεται αναλυτικά στο (Baganis and Hadjinicolaou, 2009) και είναι:

$$u(\bar{\boldsymbol{r}}) \ =$$

$$= -\frac{r_1^{'2}\sqrt{3}}{\pi l}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\left[ ln\frac{1}{\left|\bar{\boldsymbol{r}}-\bar{\boldsymbol{r}}_1^{'}\right|}\frac{-2\sqrt{3}}{l}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{-2in\pi s_1}{l}}\frac{(-1)^{n+m}n^2m^2}{n^4+n^2m^2+m^4}-\cos\frac{2m\pi s_1}{l}\frac{\partial}{\partial n'}ln\frac{1}{\left|\bar{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{r}_1^{'}\right|}\right]d\theta_1$$

$$-\frac{r_2^{'2}\sqrt{3}}{\pi l}\int_{\pi/3}^{\pi}\left[ ln\frac{1}{\left|\bar{\boldsymbol{r}}-\bar{\boldsymbol{r}}_2^{'}\right|}\frac{-2\sqrt{3}}{l}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{-2in\pi s_2}{l}}\frac{(-1)^{n+m}n^2m^2}{n^4+n^2m^2+m^4}-\cos\frac{2m\pi s_2}{l}\frac{\partial}{\partial n'}ln\frac{1}{\left|\bar{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{r}_2^{'}\right|}\right]d\theta_2$$

$$-\frac{r_3^{'2}\sqrt{3}}{\pi l}\int_{\pi}^{5\pi/3}\left[ ln\frac{1}{\left|\bar{\boldsymbol{r}}-\bar{\boldsymbol{r}}_3^{'}\right|}\frac{-2\sqrt{3}}{l}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{-2in\pi s_3}{l}}\frac{(-1)^{n+m}n^2m^2}{n^4+n^2m^2+m^4}-\cos\frac{2m\pi s_3}{l}\frac{\partial}{\partial n'}ln\frac{1}{\left|\bar{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{r}_3^{'}\right|}\right]d\theta_3$$

(4.7)

## 4.2 Πρόβλημα Neumann

Θεωρούμε το πρόβλημα Neumann :

$$\Delta u(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad \boldsymbol{r} \in \mathrm{V}', \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial \bar{n}} = \bar{f}, \qquad \boldsymbol{r} \in \mathrm{S}' \tag{4.9}$$

όπου V΄ είναι το εξωτερικό χωρίο μιας κλειστής και λείας μη κυρτής επιφάνειας στο $\mathrm{R}^2$, φραγμένη από την καμπύλη S΄, (*Σχ. 3)*. Ακόμη επιβάλλουμε την ίδια συνάρτηση $\bar{f} \in \mathrm{C}^2(\mathrm{R})$ να ισχύει σε κάθε τμήμα της καμπύλης S΄ και ειδικότερα την περιττή συνιστώσα του αναπτύγματος της σειράς Fourier:

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial \bar{n}} = \bar{f}(s_j) = \sin\frac{2\nu\pi s_j}{l} \tag{4.10}$$

όπου *j=1,2,3,* $\nu \in \mathbb{N}$ και $s_j$ ορίζονται από τις (4.6α), (4.6β) and (4.6γ).

Η μέθοδος επίλυσης στηρίζεται επίσης σε τέσσερα αλγοριθμικά βήματα (Baganis and Hadjinicolaou, 2010):

**α)** Μετασχηματίζουμε τις συνοριακές συνθήκες Neumann, του αρχικού εξωτερικού προβλήματος στις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες Neumann για το σύνορο του ισόπλευρου τριγώνου χρησιμοποιώντας την αντιστροφή του Kelvin.

**β)** Εφαρμόζουμε το “Neumann to Dirichlet map” οπότε υπολογίζουμε τα δεδομένα Dirichlet για το σύνορο του ισόπλευρου τριγώνου και επομένως εξασφαλίζεται η ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης της εξίσωσης Laplace στο εσωτερικό του ισόπλευρου τριγώνου.

**γ)** Αντιστρέφοντας τα δεδομένα Dirichlet που προέκυψαν στο βήμα (β) έχουμε τα αντίστοιχα δεδομένα Dirichlet για το σύνορο του αρχικού προβλήματος.

**δ)** Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Kelvin στη λύση του εσωτερικού προβλήματος Neumann οπότε προκύπτει η ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης του αρχικού εξωτερικού προβλήματος που είναι η εικόνα του ισόπλευρου τριγώνου μέσω της αντιστροφής του Kelvin.

Η παραπάνω μεθοδολογία μας δίνει τη λύση η οποία παρουσιάζεται αναλυτικά στο (Baganis and Hadjinicolaou, 2010) και είναι:

$$u(\bar{\boldsymbol{r}}) \ = -\frac{\sqrt{3}}{\pi l}\sum_{j=1}^{3} r_j^{'2}\int_{\frac{(2j-3)\pi}{3}}^{\frac{(2j-1)\pi}{3}}\left[ ln\frac{1}{\left|\bar{\boldsymbol{r}}-\bar{\boldsymbol{r}}_j^{'}\right|} f(s_j) - q(s_j)\frac{\partial}{\partial n'}ln\frac{1}{\left|\bar{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{r}_j^{'}\right|}\right]d\theta_j \tag{4.11}$$

Στην σχέση (4.11) οι συναρτήσεις $f(s_j)$ είναι τα δεδομένα Neumann για το σύνορο S και δίνονται από την σχέση

$$f(s_j) = -\frac{l^2}{3r_j'^2}\sin\frac{2\nu\pi s_j}{l} \tag{4.12}$$

ενώ $q(s_j)$ είναι τα δεδομένα Dirichlet για το σύνορο S

$$q(s_1) = \frac{1}{3l}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[N(k_{3n}) + e^{2i\pi s_1/3l}N(k_{3n-1}) + e^{4i\pi s_1/3l}N(k_{3n-2})\right]e^{-2i\pi n s_1/l}\ , \tag{4.13}$$

$$q(s_2) = \frac{1}{3l}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[N(k_{3n}) + \bar{\alpha}e^{2i\pi s_2/3l}N(k_{3n-1}) + \alpha e^{4i\pi s_2/3l}N(k_{3n-2})\right]e^{-2i\pi n s_2/l}\ , \tag{4.14}$$

$$q(s_3) = \frac{1}{3l}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[N(k_{3n}) + \alpha e^{2i\pi s_3/3l}N(k_{3n-1}) + \bar{\alpha}e^{4i\pi s_3/3l}N(k_{3n-2})\right]e^{-2i\pi n s_3/l}\ , \tag{4.15}$$

**Συμπεράσματα**

Στην εργασία αυτή γίνεται επισκόπηση της αντιστροφής του Kelvin στο επίπεδο παρουσιάζοντας πρώτα τη γεωμετρία και τις ιδιότητες και στη συνέχεια το θεώρημα Kelvin. Το εντυπωσιακό χαρακτηριστικό του μετασχηματισμού που απορρέει από το θεώρημα Kelvin είναι η διατήρηση της αρμονικότητας, επομένως η λύση ενός εσωτερικού προβλήματος δυναμικού μετασχηματίζεται στην αντίστοιχη λύση του ισοδύναμου εξωτερικού προβλήματος και αντίστροφα. Χρησιμοποιώντας την αντιστροφή Kelvin μπορούμε να ανάγουμε το πρόβλημα σε απλό ή ακόμα και σε γνωστό. Η αποτελεσματικότητα της μεθόδου αντιστροφής εξαρτάται από την επιλογή κατάλληλου κύκλου αντιστροφής. Αυτό φαίνεται πολύ καλά στην εφαρμογή που παρουσιάζεται σε αυτή την εργασία όπου με την επιλογή του περιγεγραμμένου κύκλου του ισοπλεύρου τριγώνου ως κύκλο αντιστροφής, παρατηρούμε ότι η εξωτερική επιφάνεια του προβλήματος είναι η εικόνα του εσωτερικού του ισοπλεύρου τριγώνου για το οποίο η λύση της εξίσωσης Laplace είναι γνωστή από Dassios and Fokas. Ένα άλλο χαρακτηριστικό της μεθόδου που πρέπει να επισημάνουμε είναι ότι, η αντιστροφή Kelvin είναι μία μονοδιάστατη ακτινική, σύμμορφη απεικόνιση επομένως τα δεδομένα Dirichlet στο αρχικό σύνορο αλλά και στο σύνορο της εικόνας παραμένουν αμετάβλητα. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο με τα δεδομένα Neumann. Στην περίπτωση αυτή, ένας αριθμητικός παράγοντας αντανακλά την απαιτούμενη διόρθωση που πρέπει να γίνει στο κάθετο διάνυσμα του αρχικού συνόρου ή του συνόρου της εικόνας, ώστε αυτά τα δύο να συμπίπτουν. Στο πρώτο πρόβλημα της εργασίας έχουμε ως συνοριακή συνθήκη Dirichlet την άρτια συνιστώσα του αναπτύγματος του Fourier, ενώ στο δεύτερο ως συνοριακή συνθήκη Neumann την περιττή συνιστώσα του Fourier. Οι παραπάνω δύο μορφές συνοριακών δεδομένων μαζί με την περίπτωση της περιττής συνιστώσας για δεδομένα Dirichlet και της άρτιας συνιστώσας για δεδομένα Neumann, παρέχουν την απαιτούμενη βάση για το ανάπτυγμα Fourier μιας οποιαδήποτε συνάρτησης που περιγράφει τη συνοριακή συνθήκη (Baganis and Hadjinicolaou,2009, 2010). Επομένως, σε περιπτώσεις που τα δεδομένα του συνόρου είναι σε μορφή τέτοια που δεν επιτρέπουν τον αναλυτικό υπολογισμό των αντιστοίχων ολοκληρωμάτων της ολοκληρωτικής αναπαράστασης, τότε υπάρχει η εναλλακτική λύση να χρησιμοποιήσουμε τα αναπτύγματα Fourier.

## Βιβλιογραφία

W. Thompson, Lord Kelvin, (1845). Papers on electrostatics and Magnetism, Mac Millan, London, 1982. First published in J. Math. Pures Appl.,10 (1845), p.364; 12(1847), p.256.

G. Baganis and M. Hadjinicolaou, (2009). Analytic solution of an exterior Dirichlet problem in a non-convex domain. IMA Journal of Applied Mathematics 74, pp. 668-684.

Dassios, G and Fokas A. S.,(2005). The basic elliptic equations in an equilateral triangle. Proc. Soc. A 461, pp. 2721-2748.

Fokas, A. S., (2001) Two-dimensional linear partial differential equations in a convex polygon. Proc. R. Soc. A, pp. 457, 371-393.

Shanin, A.,V., (1997). Excitation of wave field in a triangle with impedance boundary conditions. Journal of Mathematical Sciences, Springer, New York. Volume 102, Number 4/ December, 2000 pp. 4328-4338.

G. Baganis and M. Hadjinicolaou, (2010). Analytic solution of an exterior Neumann problem in a non-convex domain. Mathematical Methods in the Applied Sciences Vol 33, Issue 17, pp. 2067-2075.

*Σημείωση*

*Η παρούσα εργασία αποτελεί μέρος της διδακτορικής διατριβής του συγγραφέως, η οποία εκπονήθηκε υπό την επίβλεψη της Δρ. Χατζηνικολάου Μαρίας, Αναπληρώτριας Καθηγήτριας του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου, Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας* (hatzinik@eap.gr )

Open Education - The Journal for Open and Distance Education and Educational Technology
Volume 8, Number 1, 2012 Section one © Open Education ISSN: 1791-9312

# Έρπουσα ροή σε αξονοσυμμετρικά συστήματα συντεταγμένων

# Creeping flow in axisymmetric coordinate systems

**Ελευθέριος Πρωτοπαπάς**
Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο,
Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας.
lprotopapas@eap.gr

**Περίληψη**

Η παρούσα εργασία αναφέρεται στην επίλυση της έρπουσας ροής (ροή Stokes) σε αξονοσυμμετρικά συστήματα συντεταγμένων με έμφαση στο σφαιρικό και τα σφαιροειδή συστήματα συντεταγμένων. Αποδεικνύουμε την βασική εξίσωσή της ροής Stokes ($E^4\psi = 0$) και τη γενική λύση στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων (όπου ο τελεστής $E^4$ χωρίζει μεταβλητές) με τη μορφή σειρών. Στο επίμηκες σφαιροειδές σύστημα ο τελεστής $E^4$ δεν χωρίζει μεταβλητές, ενώ ο $E^2$ χωρίζει μεταβλητές. Για την επίλυση της έρπουσας ροής στο επίμηκες σφαιροειδές σύστημα εισάγεται η μέθοδος της ημιδιαχωρισιμότητας του τελεστή $E^4$, με την οποία παράγεται η γενική λύση στα σφαιροειδή συστήματα συντεταγμένων. Αυτό πραγματοποιείται με τη χρήση της γενικευμένης θεωρίας των ιδιοσυναρτήσεων, εκφράζοντας την λύση σαν άθροισμα δύο συναρτήσεων. Η μία εκφράζεται ως ανάπτυγμα σε ιδιοσυναρτήσεις του $\mathrm{Ker}E^2$ και η δεύτερη ως ανάπτυγμα γενικευμένων ιδιοσυναρτήσεων του $\mathrm{Ker}E^2$. Οι γενικευμένες ιδιοσυναρτήσεις εκφράζονται ως άθροισμα συγκεκριμένων γινομένων συναρτήσεων Gegenbauer διαφορετικής τάξης. Στη συνέχεια επαληθεύεται η μέθοδος του ημιδιαχωρισμού των μεταβλητών, αποδεικνύοντας ότι στα σφαιροειδή συστήματα η λύση ανάγεται στην γνωστή λύση του σφαιρικού συστήματος, όταν η ημιεστιακή απόσταση του σφαιροειδούς τείνει στο μηδέν. Τέλος, παρατίθενται τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την μελέτη και συγκρίνονται οι λύσεις ανάμεσα στο σφαιρικό και στα σφαιροειδή συστήματα συντεταγμένων.

**Λέξεις κλειδιά**

*Έρπουσα ροή, ημιδιαχωρισμός, αξονοσυμμετρική ροή*

**Abstract**

In the present work we present methods used for solving Stokes flow (creeping flow) in axisymmetric coordinate systems, mainly in the spherical and the spheroidal ones. We derive the governing equation for Stokes flow ($E^4\psi = 0$) and we obtain the general solution as a series expansion. We consider $E^4$ to be $E^2 o E^2$. In spherical coordinates both the operators $E^2$ and $E^4$ separate variables, while in spheroidal coordinates although the operator $E^2$ separates variables, the operator $E^4$ does not. Introducing the concept of semiseparation, we obtain the general solution of the equation $E^4\psi = 0$ by using the theory of the generalized eigenfunctions, and expressing the solution as the sum of two functions. The first one is expressed as a series of eigenfunctions of $\mathrm{Ker}E^2$ and the second one as a series of generalized

eigenfunctions of $KerE^2$. The generalized eigenfunctions are given through finite sums of specific products of Gegenbauer functions. Next we verify the semiseparation results, by showing that the solution in spheroidal coordinate system becomes the equivalent solution in spherical coordinate system as the semifocal length tends to zero. Finally, some concluding remarks of this work are presented and comparisons of the solution in the spherical and in the spheroidal coordinate systems are made.

**Keywords**
*Creeping flow, semiseparation, axisymmetric flow*

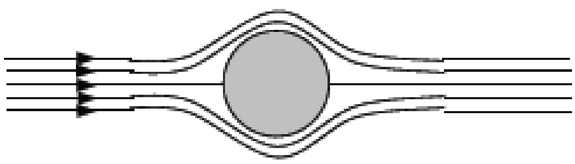
## Εισαγωγή

Ο τρόπος με τον οποίο κινείται ένα ρευστό ως προς ένα ή περισσότερα σωματίδια έχει ιδιαίτερη σημασία σε διάφορους τομείς της επιστήμης και της τεχνολογίας. Η ροή ενός ρευστού κατηγοριοποιείται ανάλογα με το ιξώδες, την πυκνότητα, την ταχύτητα. Στην εργασία αυτή θεωρούμε έρπουσα αξονοσυμμετρική ροή (Stokes, 1945, Stokes 1851, Happel, Brenner, 1991) στην οποία οι δυνάμεις αδρανείας είναι πολύ μικρότερες από τις ιξώδεις. Η παραδοχή αυτή γίνεται γιατί σε πολλά σωματιδιακά συστήματα οι κινήσεις είναι αρκετά αργές. Για να χαρακτηρίσουμε μια ροή ως έρπουσα χρησιμοποιούμε τον αριθμό Reynolds, ο οποίος είναι αδιάστατος και εξαρτάται από τη γεωμετρία του προβλήματος και ισούται με το λόγο των αδρανειακών δυνάμεων προς τις ιξώδεις.

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση Navier – Stokes και με τις παραδοχές της έρπουσας ροής βρίσκουμε την εξίσωση για τον υπολογισμό της συνάρτησης ροής στην έρπουσα ροή. Η εξίσωση αυτή είναι μια ΜΔΕ τέταρτης τάξης ελλειπτικού τύπου. Στην συνέχεια δίνουμε τη γενική λύση στο σφαιρικό (Happel, Brenner, 1991) και τα σφαιροειδή συστήματα συντεταγμένων (Dassios, Hadjinicolaou, Payatakes, 1994). Η γενική λύση στα σφαιροειδή συστήματα συντεταγμένων προκύπτει με τη μέθοδο της ημιδιαχωρισιμότητας (Dassios, Hadjinicolaou, Payatakes, 1994). Η ορθότητα του αποτελέσματος στα σφαιροειδή συστήματα συντεταγμένων ελέγχεται χρησιμοποιώντας την ιδιότητα του σφαιροειδούς να γίνεται σφαίρα όταν η ημιεστιακή απόσταση τείνει στο μηδέν. Τέλος παραθέτουμε συγκριτικά συμπεράσματα για τη γενική λύση στο σφαιρικό και τα σφαιροειδή συστήματα συντεταγμένων.

## Εξίσωση έρπουσας ροής

Ροή Stokes ή έρπουσα ροή (Stokes, 1851, Stokes 1945, Happel, Brenner, 1991) λέγεται ο τύπος της ροής που οι δυνάμεις αδράνειας είναι πολύ μικρότερες συγκρινόμενες με τις ιξώδεις, το οποίο έχει ως αποτέλεσμα ο αριθμός Reynolds, που χαρακτηρίζει το είδος της ροής, να είναι πολύ μικρότερος της μονάδας ($N_{Re} << 1$).



Ροή Stokes γύρω από σφαίρα ($N_{Re} << 1$)

Γνωρίζουμε ότι (Happel, Brenner, 1991) η εξίσωση Navier – Stokes που περιγράφει τη ροή ασυμπίεστου ρευστού, με σταθερό ιξώδες, εκφράζεται από τη σχέση

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{F}\rho - \nabla p + \mu \nabla^{2}\mathbf{v} \qquad (1)$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού, $\frac{D}{Dt}$ είναι η υλική παράγωγος και ισούται με $\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla$ , $\mathbf{v}$ είναι η ταχύτητα του ρευστού, $\mathbf{F}$ είναι η συνισταμένη των ιξωδών δυνάμεων, p η υδροστατική πίεση και μ είναι το ιξώδες.

Η εξίσωση αυτή προκύπτει από την αρχή διατήρησης της ορμής και εκφράζει τη θεώρηση ότι ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι ανάλογος της συνισταμένης των δυνάμεων που ασκούνται στο ρευστό.

Αν $\mathbf{F} = -\nabla g$, όπου $g = |\mathbf{g}|$ το μέτρο του διανύσματος της επιτάχυνσης της βαρύτητας και $P = p + g\cdot$ είναι η ολική πίεση, η σχέση (1) γίνεται

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla P + \mu \nabla^{2}\mathbf{v} \qquad (2)$$

Αν θεωρήσουμε τη ροή σταθερή (ανεξάρτητη του χρόνου) ισχύει $\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}$ και από την (2) προκύπτει

$$\rho\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} = -\nabla P + \mu \nabla^{2}\mathbf{v} \qquad (3)$$

Στη ροή Stokes οι όροι αδρανείας $\rho\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}$ είναι πολύ μικρότεροι συγκρινόμενοι με τους ιξώδεις όρους $\mu\nabla^{2}\mathbf{v}$, οπότε μπορούν να παραλειφθούν και η εξίσωση (3) παίρνει τη μορφή

$$\nabla^{2}\mathbf{v} = \frac{1}{\mu}\nabla P \qquad (4)$$

Αν θεωρήσουμε το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων $(\varpi, z, \phi)$, βρίσκουμε ότι η ταχύτητα δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{v} = -\nabla\times(\psi\nabla\phi) \qquad (5)$$

ενώ υπολογίζοντας το $\boldsymbol{\zeta} = \nabla\times\mathbf{v}$ βρίσκουμε ότι

$$\boldsymbol{\zeta} = \frac{E^{2}\psi}{\varpi}\mathbf{i}_{\varphi} \qquad (6)$$

όπου $\mathbf{i}_{\varphi}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στη $\phi$ διεύθυνση και $E^{2}$ είναι ο τελεστής Stokes με

$$E^{2} = \varpi\frac{\partial}{\partial\varpi}\left(\frac{1}{\varpi}\frac{\partial}{\partial\varpi}\right) + \frac{\partial^{2}}{\partial z^{2}} \qquad (7)$$

Επιπλέον αφού χρησιμοποιούμε αξονοσυμμετρικό σύστημα συντεταγμένων, ισχύει

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{\zeta}) = -\frac{E^{4}\psi}{\varpi}\mathbf{i}_{\varphi} \qquad (8)$$

όπου $E^{4}$ είναι η σύνθεση του τελεστή Stokes με τον εαυτό του, ενώ

$$\mathbf{v}\times\boldsymbol{\zeta} = \frac{E^{2}\psi}{\varpi^{2}}\nabla\psi \qquad (9)$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω βρίσκουμε ότι

$$-\frac{\partial\left(E^2\psi\right)}{\partial t}-\varpi\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\varpi}-\frac{\partial\psi}{\partial\varpi}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{E^2\psi}{\varpi^2}\right)+\nu E^4\psi=0 \qquad (10)$$

όπου $\nu$ είναι το κινηματικό ιξώδες.

Στην (10) παραλείπουμε τους όρους αδρανείας (είναι πολύ μικρότεροι από τους ιξώδεις στην έρπουσα ροή) και αφού θέλουμε γραμμική ροή, έχουμε ότι η εξίσωση για τη συνάρτηση ροής στη γραμμική έρπουσα ροή δίνεται από την σχέση

$$E^4\psi=0 \qquad (11)$$

η οποία είναι μια ΜΔΕ 4ης τάξης ελλειπτικού τύπου.

**Γενική λύση στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων**

Στο σφαιρικό σύστημα (Moon, Spencer, 1961) συντεταγμένων $(r,\theta,\phi)$ ο τελεστής Stokes (Happel, Brenner, 1991) παίρνει τη μορφή

$$E^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \qquad (12)$$

με $r\in[0,+\infty)$, $\theta\in[0,\pi]$, $\phi\in[0,2\pi)$ ή ισοδύναμα

$$E^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1-\zeta^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} \qquad (13)$$

αν $\zeta=\cos\theta$.

Θεωρούμε λύσεις της (11) με μορφή:

$$\psi=\psi^{(1)}+\psi^{(2)} \qquad (14)$$

όπου

$$E^2\psi^{(1)}=0 \qquad (15)$$

και

$$E^2\psi^{(2)}=W \qquad (16)$$

με

$$E^2W=0 \qquad (17)$$

Έστω

$$\psi^{(1)}=R(r)Z(\zeta) \qquad (18)$$

οπότε η (15) χρησιμοποιώντας την (13) γίνεται:

$$\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2}=-\frac{1-\zeta^2}{Z}\frac{d^2Z}{d\zeta^2} \qquad (19)$$

άρα

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}-\lambda R=0 \qquad (20)$$

και

$$(1-\zeta^2)\frac{d^2Z}{d\zeta^2}+\lambda Z=0 \qquad (21)$$

Η εξίσωση (20) είναι διαφορική εξίσωση Euler, οπότε δέχεται λύση της μορφής $R(r)=r^n$, $n\in N^*$. Τότε προκύπτει ότι:

$$\lambda=n(n-1) \qquad (22)$$

και η λύση της (20) είναι:

$$R(r)=a_nr^n+b_nr^{-n+1} \qquad (23)$$

όπου οι $a_n, b_n$ είναι σταθερές.

Επιπλέον η (21) λόγω της (22) γράφεται:

$$(1-\zeta^2)\frac{d^2Z}{d\zeta^2}+n(n-1)Z=0 \tag{24}$$

η οποία είναι η διαφορική εξίσωση του Gegenbauer (Lebedev, 1972) για m = –1 με βαθμό –½ και λύσεις τις συναρτήσεις Gegenbauer πρώτου και δεύτερου είδους, $G_n(x)$ και $H_n(x)$ αντίστοιχα. Επομένως η λύση της (24) είναι:

$$Z(\zeta)=v_n G_n(\zeta)+\delta_n H_n(\zeta) \tag{25}$$

όπου οι $v_n,\delta_n$ είναι σταθερές.

Συνεπώς από την (15) και τις (23) και (25) βρίσκουμε:

$$\psi^{(1)}(r,\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n+B_n r^{-n+1}\right)^{G_n}_{H_n}(\zeta) \tag{26}$$

όπου οι $A_n,B_n$ είναι σταθερές.

Αφού οι εξισώσεις (15) και (17) είναι πρακτικά οι ίδιες, τότε και η συνάρτηση W θα έχει τη μορφή της (26), οπότε:

$$W(r,\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(c_n r^n+d_n r^{-n+1}\right)^{G_n}_{H_n}(\zeta) \tag{27}$$

όπου οι $c_n,d_n$ είναι σταθερές.

Η εξίσωση (16) είναι η μη ομογενής μορφή των (15) και (17), οπότε λύνεται και αυτή με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών και με τη βοήθεια της αντικατάστασης

$$\psi^{(2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\pi_n(r)^{G_n}_{H_n}(\zeta) \tag{28}$$

Αντικαθιστώντας στην (16) την (28) και εκμεταλλευόμενοι ότι οι $G_n(x)$, $H_n(x)$ επαληθεύουν την εξίσωση Gegenbauer, βρίσκουμε:

$$E^2\psi^{(2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{d^2p_n(r)}{dr^2}-\frac{1}{r^2}n(n-1)p_n(r)\right]^{G_n}_{H_n}(\zeta) \tag{29}$$

οπότε λόγω της (27) βρίσκουμε

$$\frac{d^2p_n}{dr^2}-n(n-1)\frac{p_n}{r^2}=c_n r^n+d_n r^{-n+1} \tag{30}$$

η οποία έχει ειδική λύση

$$p_n(r)=\frac{c_n r^{n+2}}{2(2n+1)}-\frac{d_n r^{-n+3}}{2(2n-3)} \tag{31}$$

Επομένως από την (28) βρίσκουμε ότι:

$$\psi^{(2)}(r,\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(C_n r^{n+2}+D_n r^{-n+3}\right)^{G_n}_{H_n}(\zeta) \tag{32}$$

Η γενική λύση της (11) στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων είναι

$$\begin{aligned}\psi(r,\zeta)=&\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n+B_n r^{-n+1}+C_n r^{n+2}+D_n r^{-n+3}\right)G_n(\zeta)\\&+\sum_{n=2}^{\infty}\left(A'_n r^n+B'_n r^{-n+1}+C'_n r^{n+2}+D'_n r^{-n+3}\right)H_n(\zeta)\end{aligned} \tag{33}$$

**Γενική λύση στα σφαιροειδή συστήματα συντεταγμένων**

Στο επίμηκες σφαιροειδές (Dassios, Hadjinicolaou, Payatakes, 1994) σύστημα συντεταγμένων $(\tau,\zeta,\phi)$ ο τελεστής Stokes παίρνει τη μορφή

$$E^2 = \frac{1}{c^2\left(\tau^2 - \zeta^2\right)}\left[(\tau^2 - 1)\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + (1 - \zeta^2)\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right] \tag{34}$$

με $\tau \in [1,+\infty)$, $\zeta \in [-1,1]$, $\phi \in [0,2\pi)$.

Έστω

$$\psi(\tau, \zeta) = T(\tau)Z(\zeta) \tag{35}$$

οπότε από την (34) και για επαλήθευση της $E^2\psi = 0$ προκύπτει ότι:

$$\frac{T''}{T}(\tau^2 - 1) = -(1 - \zeta^2)\frac{Z''}{Z} \tag{36}$$

Συνεπώς:

$$(1 - \tau^2)T'' + \lambda T = 0 \tag{37}$$

και

$$(1 - \zeta^2)Z'' + \lambda Z = 0 \tag{38}$$

Δοκιμάζοντας λύσεις με τη μορφή σειράς και χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Frobenious επιλέγουμε

$$\lambda = n(n - 1) \tag{39}$$

με $n \in N^*$, οπότε οι (37), (38) γίνονται:

$$(1 - \tau^2)T'' + n(n - 1)T = 0 \tag{40}$$

και

$$(1 - \zeta^2)Z'' + n(n - 1)Z = 0 \tag{41}$$

οι οποίες είναι διαφορικές εξισώσεις Gegenbauer (Lebedev, 1972) για $m = -1$ με βαθμό $-½$ και με λύσεις τις αντίστοιχες συναρτήσεις πρώτου είδους $G_n(x)$ και δευτέρου είδους $H_n(x)$.

Ορίζουμε τις ιδιοσυναρτήσεις $\Theta_n(\tau,\zeta)$, i είδους (i = 1, 2, 3, 4) ως:

$$\Theta_n^{(1)}(\tau,\zeta) = G_n(\tau)G_n(\zeta) \tag{42}$$

$$\Theta_n^{(2)}(\tau,\zeta) = G_n(\tau)H_n(\zeta) \tag{43}$$

$$\Theta_n^{(3)}(\tau,\zeta) = H_n(\tau)G_n(\zeta) \tag{44}$$

$$\Theta_n^{(4)}(\tau,\zeta) = H_n(\tau)H_n(\zeta) \tag{45}$$

Κάθε μία από τις ιδιοσυναρτήσεις $\Theta_n(\tau,\zeta)$, i είδους επαληθεύει την εξίσωση $E^2\psi = 0$. Επομένως μια πλήρης αναπαράσταση του πυρήνα του $E^2$ δίνεται από την συνάρτηση

$$\psi(\tau,\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{4} A_n^i \Theta_n^{(i)}(\tau,\zeta) \tag{46}$$

όπου οι $A_n^i$ είναι σταθερές.

Κάθε μία από τις συναρτήσεις της μορφής (46) είναι λύση της εξίσωσης $E^4\psi = 0$, αλλά αυτές δεν αποτελούν το πλήρες σύνολο των λύσεών της. Αναζητούμε λοιπόν συνάρτηση $\tilde{\psi}(\tau,\zeta)$ που να ανήκει στον πυρήνα του $E^4$, αλλά όχι στον πυρήνα του $E^2$, δηλαδή

$$E^2\tilde{\psi}(\tau,\zeta) \in \operatorname{Ker}E^2 \tag{47}$$

και λόγω της (46) θα ισχύει ότι:

$$E^2\tilde{\psi}(\tau,\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{4} B_n^i \Theta_n^{(i)}(\tau,\zeta) \tag{48}$$

Θεωρούμε $\Omega_n^{(i)}(\tau,\zeta)$ την προεικόνα της ιδιοσυνάρτησης $\Theta_n^{(i)}(\tau,\zeta)$ για τον τελεστή $E^2$, δηλαδή, ισχύει:

$$c^2E^2\Omega_n^{(i)}(\tau,\zeta) = \Theta_n^{(i)}(\tau,\zeta) \tag{49}$$

Οι συναρτήσεις $\Omega_n^{(i)}(\tau,\zeta)$ είναι οι γενικευμένες ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή $E^2$ για τις μηδενικές ιδιοτιμές. Αντικαθιστώντας την (49) στην (48) βρίσκουμε ότι:

$$\tilde{\psi}(\tau,\zeta) = c^2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{4} B_n^i\Omega_n^{(i)}(\tau,\zeta) + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{4} A_n^i\Theta_n^{(i)}(\tau,\zeta) \tag{50}$$

Όμως αφού $\tilde{\psi}(\tau,\zeta) \in \mathrm{Ker}E^4$ και το δεύτερο μέλος της σχέσης (50) είναι άθροισμα δύο συναρτήσεων μιας που ανήκει στον ιδιόχωρο του $E^2$, η άλλη συνάρτηση ανήκει στον γενικευμένο ιδιόχωρο του $E^2$. Επομένως η σχέση (50) δίνει τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή, που είναι μια βάση του $\mathrm{Ker}E^4$, δηλαδή, δίνει μια πλήρη φασματική αποσύνθεση του συνόλου των λύσεων του $\mathrm{Ker}E^4$, αν οι γενικευμένες ιδιοσυναρτήσεις $\Omega_n^{(i)}(\tau,\zeta)$ του τελεστή $E^2$ είναι γνωστές.

Επίσης από την (49) βρίσκουμε:

$$\frac{\partial^2\Omega_n^{(i)}}{\partial\tau^2}(\tau^2-1)+(1-\zeta^2)\frac{\partial^2\Omega_n^{(i)}}{\partial\zeta^2} = \left(\tau^2-\zeta^2\right)\Theta_n^{(i)}(\tau,\zeta) \tag{51}$$

της οποίας η επίλυση είναι εφικτή αν γνωρίζουμε μια ειδική λύση της εξίσωσης

$$\left[(\tau^2-1)\partial_{\tau\tau}+(1-\zeta^2)\partial_{\zeta\zeta}\right]\psi(\tau,\zeta) = f_n(\tau)g_m(\zeta) \tag{52}$$

όπου $f_n$, $g_n$ είναι συναρτήσεις Gegenbauer 1ου ή 2ου είδους. Μια ειδική λύση της (52) είναι

$$\psi_{nm}(\tau,\zeta) = \frac{f_n(\tau)g_m(\zeta)}{(n-m)(n+m-1)} \tag{53}$$

για $n \neq m,\ n+m \neq 1,\ n \in N^*,\ m \in N^*$.

Επομένως η (51) μπορεί να λυθεί, άρα οι γενικευμένες ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή $E^2$ υπολογίζονται (Dassios, Hadjinicolaou, Payatakes, 1994) και η λύση της εξίσωσης $E^4\psi = 0$, είναι:

$$\psi(\tau,\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{4}\left[A_n^i\Theta_n^{(i)}(\tau,\zeta) + B_n^i\Omega_n^{(i)}(\tau,\zeta)\right] \tag{54}$$

όπου $\Omega_n^{(i)}(\tau,\zeta)$ είναι αθροίσματα γινομένων συναρτήσεων Gegenbauer (Dassios, Hadjinicolaou, Payatakes, 1994).

Από την (54) με αναδιάταξη και ομαδοποίηση όρων, βρίσκουμε μια μορφή της συνάρτησης ροής που είναι κατάλληλη για προβλήματα συνοριακών τιμών, την

$$\begin{aligned}\psi(\tau,\zeta) &= g_0(\tau)G_0(\zeta) + g_1(\tau)G_1(\zeta) \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty}\left[g_n(\tau)G_n(\zeta) + h_n(\tau)H_n(\zeta)\right]\end{aligned} \tag{55}$$

όπου $g_n(\tau),\ h_n(\tau)$ είναι αθροίσματα συναρτήσεων Gegenbauer παραπάνω (Dassios, Hadjinicolaou, Payatakes, 1994).

Επίσης δεδομένων των (54), (55) μπορούμε να βρούμε και τη γενική λύση στο πεπλατυσμένο σφαιροειδές $(\lambda,\zeta,\phi)$, αφού προκύπτει από το επίμηκες σφαιροειδές $(\tau,\zeta,\phi)$ από τον μετασχηματισμό

$$\begin{aligned}&\tau \to i\lambda \text{ και } c \to -ic \\ &c > 0,\ \tau > 1,\ \lambda > 0\end{aligned} \tag{56}$$

**Γεωμετρικός εκφυλισμός**

Ένας τρόπος για να επιβεβαιωθούν τα παραπάνω (Dassios, Hadjinicolaou, Payatakes, 1994) είναι να θεωρήσουμε την οριακή κατάσταση στην οποία το σφαιροειδές γίνεται σφαίρα, δηλαδή, όταν η ημιεστιακή απόσταση τείνει στο 0 ($c \to 0^+$).
Ισχύει

$$r = c\sqrt{\tau^2 + \zeta^2 - 1} \tag{57}$$

οπότε

$$\lim_{c \to 0^+} (c\tau) = r \tag{58}$$

και ο τελεστής $E^2$ γίνεται:

$$E^2 = \frac{1}{(c\tau)^2 - c^2\zeta^2}\left[\left[(c\tau)^2 - c^2\right]\frac{\partial^2}{\partial (c\tau)^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\cos\eta}{\sin\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\right] \tag{59}$$

άρα παίρνοντας το όριο όταν $c \to 0^+$, προκύπτει:

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\cos\eta}{\sin\eta}\frac{\partial}{\partial \eta} \tag{60}$$

που εκφράζει τον τελεστή $E^2$ στις σφαιρικές συντεταγμένες (34).

Χρησιμοποιώντας τις

$$c^n G_n(\tau) \to k_n r^n \tag{61}$$

$$\frac{1}{c^{n-1}} H_n(\tau) \to \frac{w_{n-1}}{r^{n-1}} \tag{62}$$

με $n \in N^*$, $k_n$, $w_n$ σταθερές και με βάθμωση των συντελεστών $A_n^i, B_n^i$, οι συναρτήσεις g, h της (55) όταν $c \to 0^+$ γίνονται:

$$g_n(\tau) \to G_n^1 r^n + G_n^2 \frac{1}{r^{n-1}} + G_n^3 r^{n+2} + G_n^4 \frac{1}{r^{n-3}},\ n \geq 0 \tag{63}$$

και

$$h_n(\tau) \to D_n^1 r^n + D_n^2 \frac{1}{r^{n-1}} + D_n^3 r^{n+2} + D_n^4 \frac{1}{r^{n-3}},\ n \geq 2 \tag{64}$$

όπου $G_n^i, D_n^i$ (i = 1, 2, 3, 4) είναι σταθερές.

Αντικαθιστώντας τις $g_n(\tau)$, $h_n(\tau)$ στην (55) προκύπτει η αναπαράσταση της συνάρτησης ροής στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων (33).

## Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία παρουσιάστηκε μια μελέτη της ροής Stokes (έρπουσα ροή) σε αξονοσυμμετρικά συστήματα συντεταγμένων και ειδικά στο σφαιρικό και στα σφαιροειδή συστήματα συντεταγμένων. Η διαφορική εξίσωση ελλειπτικού τύπου που λύνουμε για να υπολογίσουμε τη συνάρτηση ροής ψ είναι η $E^4\psi = 0$. Η ελλειπτικότητα του τελεστή $E^4$ αντανακλάται στο γεγονός ότι η ροή είναι μόνιμη, δηλαδή, η μορφή της δεν εξελίσσεται χρονικά.

Στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων είδαμε ότι ο τελεστής $E^4$ χωρίζει μεταβλητές. Στα σφαιροειδή συστήματα συντεταγμένων ο τελεστής $E^4$ δεν χωρίζει μεταβλητές, παρόλο που ο τελεστής $E^2$ χωρίζει μεταβλητές. Για να επιτευχθεί η πλήρης αναπαράσταση του πυρήνα του $E^4$, υπολογίζουμε τις λύσεις της εξίσωσης $E^4\psi = 0$, οι οποίες δεν ανήκουν στον πυρήνα του $E^2$. Αυτό πραγματοποιείται με τη χρήση της γενικευμένης θεωρίας των ιδιοσυναρτήσεων, εκφράζοντας την λύση σαν άθροισμα δύο συναρτήσεων. Η μία εκφράζεται ως ανάπτυγμα με ιδιοσυναρτήσεις του $E^2$ και η δεύτερη ως ανάπτυγμα γενικευμένων ιδιοσυναρτήσεων του $E^2$. Οι

*Open Education - The Journal for Open and Distance Education and Educational Technology*
*Volume 8, Number 1, 2012 Section one © Open Education ISSN: 1791-9312*

γενικευμένες ιδιοσυναρτήσεις εκφράζονται σαν όροι αθροίσματος γινομένων συναρτήσεων Gegenbauer.

Αρχικά η πλήρης αναπαράσταση του διανυσματικού χώρου των λύσεων της $E^2\psi = 0$ δίνεται με τη μορφή ιδιοσυναρτήσεων του $E^2$. Ακολούθως, η πλήρης αναπαράσταση του διανυσματικού χώρου των λύσεων της $E^4\psi = 0$ παριστάνεται με τη μορφή γενικευμένων ιδιοσυναρτήσεων του $E^2$. Παράγουμε έτσι ένα πλήρες σύνολο γενικευμένων ιδιοσυναρτήσεων, κάθε μία από τις οποίες δίνεται σε κλειστή μορφή με τη βοήθεια συναρτήσεων Gegenbauer πρώτου και δευτέρου είδους. Παριστάνουμε έτσι κάθε συνάρτηση ροής ως άθροισμα των σειρών των ιδιοσυναρτήσεων και των γενικευμένων ιδιοσυναρτήσεων του $E^2$.

Για $n < 4$ οι γενικευμένες ιδιοσυναρτήσεις (Dassios, Hadjinicolaou, Payatakes, 1994) δεν έχουν κάποιο συγκεκριμένο τρόπο εξάρτησης των δεικτών των συναρτήσεων Gegenbauer. Αντιθέτως, για n □ 4 οι γενικευμένες ιδιοσυναρτήσεις αποτελούνται από συναρτήσεις Gegenbauer με αντίστοιχους δείκτες εξάρτησης $n - 2$, $n$, $n + 2$, όταν $n \geq 4$. Συνεπώς οι γενικευμένες ιδιοσυναρτήσεις προκύπτουν από τον εννιαδιάστατο υπόχωρο που δημιουργούν οι συναρτήσεις Gegenbauer πρώτου και δευτέρου είδους. Κοιτάζοντας πιο προσεκτικά τις γενικευμένες ιδιοσυναρτήσεις για n □ 4 και ξεχωριστά για κάθε $i = 1, 2, 3, 4$ παρατηρούμε ότι χρησιμοποιούνται μόνο οι τέσσερις διαστάσεις από τις εννέα, αφού:

- ✓ οι $n - 2$ δείκτες της τ εξάρτησης συνδέονται με τους n δείκτες της εξάρτησης από το ζ,
- ✓ οι n δείκτες της τ εξάρτησης συνδέονται με τους $n - 2$ δείκτες της εξάρτησης από το ζ,
- ✓ οι $n + 2$ δείκτες της τ εξάρτησης συνδέονται με τους n δείκτες της εξάρτησης από το ζ,
- ✓ οι n δείκτες της τ εξάρτησης συνδέονται με τους $n + 2$ δείκτες της εξάρτησης από το ζ.

Επιπλέον μπορούμε να δούμε ότι καθώς το n αυξάνεται (ανά δύο) κάποιες ιδιοδιευθύνσεις δεν προκύπτουν για πρώτη φορά, αλλά δύο παραμένουν ίδιες και εισάγονται δύο νέες, δηλαδή εκτός από τη σύνδεση των ιδιολύσεων έχουμε και σύνδεση των ιδιοχώρων μεταξύ τους.

Επίσης παρατηρούμε ότι παρόλο που κάθε όρος της λύσης $\psi(\tau, \zeta)$ δεν επαληθεύει την εξίσωση $E^4\psi = 0$, η εξάρτηση από το ζ δεν υπεισέρχεται από τις συναρτήσεις Gegenbauer μεικτής τάξης, αλλά κάθε όρος της περιλαμβάνει ένα πεπερασμένο πλήθος συναρτήσεων Gegenbauer μεικτής τάξης. Αυτό σημαίνει ότι ο τελεστής $E^4$, καταστρέφει τη διαχωρισιμότητα κυρίως λόγω της σύνθεσης και όχι λόγω της διαφορικής του δομής. Επιπλέον, ο μη χωρισμός των μεταβλητών οφείλεται κυρίως στον αλγεβρικό παράγοντα του γινομένου που ορίζει τον $E^4$ και όχι στον διαφορικό παράγοντα του τελεστή.

Το πλεονέκτημά της μεθόδου της ημιδιαχωρισιμότητας είναι ότι επειδή η λύση είναι πλήρης και γενική, μπορούμε να την χρησιμοποιούμε σε εσωτερικά και εξωτερικά προβλήματα ροής, καθώς και σε προβλήματα σφαιροειδούς κυττάρου με ή χωρίς ιδιομορφίες στον άξονα συμμετρίας.

Παράλληλα, παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $g_n(\tau)$ πολλαπλασιάζονται με τις $G_n(\zeta)$, όπου οι συναρτήσεις $h_n(\tau)$ πολλαπλασιάζονται με τις $H_n(\zeta)$ και δεδομένου ότι οι συναρτήσεις $h_n(\tau)$ και $g_n(\tau)$ δεν συμπίπτουν, η εξίσωση $E^4\psi = 0$ δεν δέχεται γενικά χωρισμό λύσεων. Όμως φαίνεται ότι η λύση επιδέχεται κάποιο είδος διαχωρισμού, ο οποίος ονομάζεται ημιδιαχωρισμός.

Η ονομασία ημιδιαχωρισμός αιτιολογείται και με άλλον τρόπο. Ο τελεστής $E^2$ είναι το γινόμενο ενός αλγεβρικού και ενός διαφορικού παράγοντα. Τα στοιχεία του πυρήνα του $E^2$ δέχονται χωρισμένη μορφή, αφού ο αλγεβρικός παράγοντας απαλείφεται για να λυθεί η εξίσωση $E^2\psi = 0$, ενώ είναι ο ίδιος αλγεβρικός παράγοντας είναι αυτός που δεν επιτρέπει τη χωρισμένη μορφή της εξίσωσης $E^4\psi = 0$. Αυτό σημαίνει ότι ο μη διαχωρισμός του τελεστή $E^4$ δεν προκύπτει από «σοβαρή επιπλοκή», το οποίο είναι αληθές, αφού οι γενικευμένες λύσεις δεν κατασκευάζονται από νέες συναρτήσεις, αλλά παράγονται ακολουθώντας συγκεκριμένη διαδικασία και εμπλέκουν τις συναρτήσεις Gegenbauer που χρησιμοποιούμε για να πάρουμε χωρισμένες λύσεις.

Όλα τα παραπάνω χρησιμοποιούνται και εφαρμόζονται στην έρευνα προβλημάτων των φυσικών επιστημών και των βιοεπιστημών. Ένα τέτοιο παράδειγμα, αφορά στη μαθηματική μοντελοποίηση της ροής του πλάσματος του αίματος γύρω από το ερυθρό αιμοσφαίριο. Η ροή του πλάσματος του αίματος, εξαιτίας των φυσικών χαρακτηριστικών της, θεωρείται έρπουσα και ασυμπίεστη, οπότε μπορεί να θεωρηθεί της ως ροή Stokes. Το ερυθρό αιμοσφαίριο έχει σχήμα αμφίκοιλου δίσκου, οπότε μια ικανοποιητική περιγραφή του είναι εκείνη του αντίστροφου επιμήκους σφαιροειδούς, του οποίου ο άξονας συμμετρίας βρίσκεται παράλληλα στη ροή του πλάσματος του αίματος. Η έρευνα αυτή είναι σε εξέλιξη.

## Ενδεικτική βιβλιογραφία

Stokes G. G. (1945). On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion and the Equilibrium and Motion of Elastic Solids, *Trans. Camp. Phil. Soc*, **8**, 287 – 319.

Stokes G. G. (1851). On the Effect of the Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums, *Trans. Camp. Phil. Soc*, **8**, 8 – 106.

Happel J., Brenner H. (1991) *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, Kluwer Academic Publishers.

Dassios G., Hadjinicolaou M., Payatakes A. C. (1994). Generalized Eigenfunctions and Complete Semiseparable Solutions for Stokes Flow in Spheroidal Coordinates, *Quarterly of Applied Mathematics*, Volume **LII**, Number I, (157 – 191) Brown University.

Moon P., Spencer D. E. (1961). *Field Theory Handbook*, Springer-Verlag.

Lebedev N. N. (1972) *Special Functions and Their Applications*, Dover Publications.

*Σημείωση*

*Η παρούσα εργασία αποτελεί μέρος της διδακτορικής διατριβής του συγγραφέως, η οποία εκπονείται υπό την επίβλεψη της Δρ. Χατζηνικολάου Μαρίας, Αναπληρώτριας Καθηγήτριας του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου, Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας* (hatzinik@eap.gr )

# 3η ΕΝΟΤΗΤΑ «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ»

Open Education - The Journal for Open and Distance Education and Educational Technology
Volume 8, Number 1, 2012 Section one © Open Education ISSN: 1791-9312

# Εφαρμογές των Μαθηματικών στην Ανοικτή εξ Αποστάσεως Εκπαίδευση

# Applied Mathematics in Open Distance Education

**Φωτεινή Καριώτου**
Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο
Επίκ. Καθηγήτρια
kariotou@eap.gr

**Περίληψη**

Το αντικείμενο των εφαρμοσμένων μαθηματικών είναι η διατύπωση, η αυστηρή θεμελίωση, η επίλυση και η αξιολόγηση μαθηματικών προτύπων για προβλήματα που προκύπτουν στις επιστήμες και στην τεχνολογία καθώς και η ανάπτυξη μαθηματικών μεθόδων για την αναλυτική ή υπολογιστική αντιμετώπισή τους.

Η κατεύθυνση των εφαρμοσμένων μαθηματικών εξυπηρετεί διττά το πρόγραμμα των «Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά» του Ε.Α.Π.

Κατ' αρχήν έχει σκοπό την ενίσχυση της εμπειρίας των φοιτητών στη σύνδεση της αποκτούμενης , μέσα από το πρόγραμμα, γνώσης με τα φαινόμενα της φυσικής πραγματικότητας και κατ' επέκταση στην καλλιέργεια της επιστημονικής διερευνητικής σκέψης τόσο στους φοιτητές όσο και στους μαθητές τους.

Επιπλέον η κατεύθυνση των εφαρμοσμένων μαθηματικών στοχεύει στην ενίσχυση του ερευνητικού έργου του προγράμματος, σε τομείς αιχμής της επιστήμης και της τεχνολογίας, μέσα από τις εκπονούμενες διπλωματικές εργασίες και διδακτορικές σπουδές που άπτονται της κατεύθυνσης αυτής.

Η Ανοικτή εξ αποστάσεως εκπαίδευση στην υπηρεσία της κατεύθυνσης αυτής ενισχύει την αυτοδυναμία της μελέτης, μέσα από ηλεκτρονικές πηγές και μέσα, επιτρέποντας τη σύγχρονη και ασύγχρονη συνεργασία μεταξύ φοιτητή και επιβλέποντα ή /και της ερευνητικής ομάδας στην οποία το αντικείμενο έρευνάς του εντάσσεται.

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζονται βασικές περιοχές έρευνας στο πλαίσιο της κατεύθυνσης των εφαρμοσμένων μαθηματικών του προγράμματος ΜΣΜ, και ενδεικτικά περιγράφονται ερευνητικές εργασίες που έχουν εκπονηθεί από φοιτητές του προγράμματος στα έτη 2009-2011.

**Abstract**

Applied Mathematics concerns the formulation, the strict foundation, the study and the validation of mathematical models that describe physical problems arising in Science and Technology. Also, the applied mathematics include the development of mathematical methods for the analytical or computational treatment of such problems. The program "Graduate Studies in Mathematics" in HOU provides a route of courses directed to the Applied Mathematics.

Following this route, the students connect the mathematical knowledge acquired from their study with the physical phenomena and they cultivate the scientific thinking that wonders, seeks for interpretations and apply mathematics eligibly in

order to find answers. This critical thinking is eventually transferred to their students, as the program is mainly referred to mathematicians working mainly in second grade education.

On the other hand the applied mathematics route enhances the research work within the program, in critical scientific and technological areas, through research works made in the frame of MSc dissertations or Phd theses in related subjects.

The open distance education applied in such direction strengthens the autonomous work of the potential researcher and at the same time provides the means for a synchronous and asynchronous cooperation between the student, the tutor and the research group activated in the same area.

In the present work we introduce the main research areas of Applied Mathematics that are studied in "Graduate Studies in Mathematics" in HOU, and we indicatively refer to some MSc theses that have been made during the academic years 2009-2011.

**Key-words**
*applied mathematics, mathematical modelling, graduate studies in HOU.*

## Εισαγωγή

Το αντικείμενο των εφαρμοσμένων μαθηματικών είναι η διατύπωση, αυστηρή θεμελίωση, επίλυση και αξιολόγηση μαθηματικών προτύπων για προβλήματα που προκύπτουν στις επιστήμες και στην τεχνολογία καθώς και η ανάπτυξη μαθηματικών μεθόδων για την αναλυτική ή υπολογιστική αντιμετώπισή τους.

Η κατεύθυνση των εφαρμοσμένων μαθηματικών εξυπηρετεί με δύο τρόπους το πρόγραμμα των «Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά» του Ε.Α.Π. Ο ένας τρόπος αφορά την επίδραση που μπορεί να έχει στους φοιτητές που την επιλέγουν, και ο άλλος τρόπος αφορά την μακροχρόνια επίδραση που μπορεί να έχει στο ίδιο το πρόγραμμα και στο ίδρυμα που το φιλοξενεί.

### Επίδραση στους φοιτητές

Οι φοιτητές που θα ειδικευθούν σε εφαρμογές των μαθηματικών στις επιστήμες και στην τεχνολογία εξοικειώνονται με τη διαδικασία της μαθηματικής προτυποποίησης των φυσικών φαινομένων. Η διαδικασία αυτή τους παρέχει την οπτική των φαινομένων μέσα από το πρίσμα των φυσικών αρχών που διέπουν το φαινόμενο και τη μαθηματική διατύπωση των νόμων αυτών. Τέτοιοι νόμοι είναι για παράδειγμα η αρχή διατήρησης της μάζας, του φορτίου, της ενέργειας, της ορμής, ο νόμος ψύξεως του Fourier για τη θερμότητα, η αντίστοιχη διατύπωση σε άλλες περιοχές που εμπλέκουν φαινόμενα διάχυσης και άλλοι. Η χρήση των τελεστών ως μαθηματικές οντότητες οι οποίοι χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν φυσικούς τελεστές-διαδικασίες, και αντίστροφα, είναι η οπτική που προσφέρεται μέσω της κατεύθυνσης των εφαρμοσμένων μαθηματικών και ανοίγει τη σύνδεση της απτής καθημερινότητας των φοιτητών με τη διανοητική πραγματικότητα του πεδίου των μαθηματικών.

Στη συνέχεια η εμπλοκή των φοιτητών σε συγκεκριμένα πρότυπα είτε με τη μορφή αυτόνομων εργασιών είτε σε επιλεγμένες σειρές ασκήσεων, προσφέρουν την ευκαιρία για καλλιέργεια μιας σειράς δεξιοτήτων που αφ ενός χτίζουν το γνωστικό επιστημονικό υπόβαθρο κα αφ ετέρου καλλιεργούν τη διανοητική στάση ενός εκκολαπτόμενου ερευνητή. Ειδικότερα, το πρόγραμμα σπουδών είναι σχεδιασμένο κατά τρόπο ώστε προοδευτικά να καλύπτεται το βασικό γνωστικό περιεχόμενο που είναι απαραίτητο για να εργαστεί κάποιος ερευνητικά σε κάποιον από τους τομείς ενδιαφέροντος που άπτεται των εφαρμοσμένων μαθηματικών, τόσο μέσω της μαθηματικής ανάλυσης όσο και μέσω της αριθμητικής ανάλυσης και υπολογιστικών τεχνικών.

Η ανάλυση των προτύπων γίνεται σε διάφορες γεωμετρίες που επιδέχονται αναλυτική είτε αριθμητική επεξεργασία, ώστε ο φοιτητής να αποκτήσει την ευχέρεια και την ευρύτητα επιλογής του γεωμετρικού πλαισίου στο οποίο θα περιγράψει βέλτιστα το φαινόμενο που αντιμετωπίζει. Διδάσκεται τις πιο χρήσιμες από τις μαθηματικές μεθόδους επίλυσης των σχετικών προβλημάτων αλλά και τις κύριες αρχές μοντελοποίησης, οι οποίες επιβάλλουν την εισαγωγή του στην διαστατική ανάλυση, ασυμπτωτική ανάλυση και θεωρία διαταρραχών.

Η αντιμετώπιση συγκεκριμένων προβλημάτων που εμφανίζονται σε μαθηματικά πρότυπα των φυσικών επιστημών του παρέχει τις γνωστικές δεξιότητες και την ευχέρεια στο χειρισμό των μαθηματικών εργαλείων.

Η προσωπική εμπλοκή του φοιτητή στη διαδικασία μοντελοποίησης καλλιεργεί την ευρύτητα της σκέψης και τη διεπιστημονικότητα της προσέγγισης ενός φαινομένου. Η αντιμετώπιση των προκλήσεων που προκύπτουν τόσο στη μοντελοποίηση όσο και στην επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων που έπονται, καλλιεργούν την ευελιξία και την πρωτοτυπία στη σκέψη, συγχρόνως με τη συνέπεια και τη διάκριση στις επιλογές. Η εξοικείωση με τις υπολογιστικές τεχνικές και τα συμβολικά πακέτα παρέχει τη δυνατότητα της περαιτέρω επεξεργασίας είτε των μοντέλων καθ' εαυτών, είτε των αποτελεσμάτων σε διάφορα στάδια της εργασίας πάνω σε ένα μοντέλο, οπτικοποιώντας τις μαθηματικές οντότητες, προβάλλοντας ποιοτικά χαρακτηριστικά των αποτελεσμάτων, βοηθώντας στην ποιοτική ή ποσοτική αξιολόγηση του μελετώμενου μοντέλου.

Τέλος, ο φοιτητής, μέσα από τη δυνατότητα να εκπονήσει ερευνητική διπλωματική εργασία στην κατεύθυνση των εφαρμοσμένων μαθηματικών έχει τη ευκαιρία της αυτόνομης αναμέτρησης με την διερευνητική σκέψη και με την εφαρμογή της αποκτημένης γνώσης στην αποκάλυψη νέων εφαρμογών τόσο στο επίπεδο των μαθηματικών μεθόδων όσο και των εφαρμογών τους.

Η προσωπική συμμετοχή του φοιτητή στην εφαρμογή των μαθηματικών στην αντιμετώπιση συγκεκριμένου προβλήματος της άμεσης πραγματικότητας, θα επιφέρει εσωτερική αλλαγή ως προς την ίδια την προσέγγιση της γνώσης. Η αλλαγή αυτή θα μεταλαμπαδευτεί σε κάποιο βαθμό στους δικούς του μαθητές, καθώς το πρόγραμμα δέχεται φοιτητές οι οποίοι κυρίως δραστηριοποιούνται στη μέση εκπαίδευση. Έτσι, η κατεύθυνση των εφαρμοσμένων μαθηματικών στοχεύει μακροπρόθεσμα στην καλλιέργεια της κριτικής εκείνης στάσης που συνδέει την αποκτούμενη διανοητικώς γνώση με την εφαρμογή και τη χρησιμότητά της στον φυσικό κόσμο που μας περιβάλλει.

Επίδραση στην ερευνητική παραγωγή του ΠΣ

Η άλλη πλευρά στην οποία η κατεύθυνση των εφαρμοσμένων μαθηματικών στοχεύει είναι η ενίσχυση του ερευνητικού έργου του προγράμματος, σε τομείς αιχμής της επιστήμης και της τεχνολογίας, μέσα από τις εκπονούμενες διπλωματικές εργασίες και διδακτορικές διατριβές που άπτονται της κατεύθυνσης αυτής.

Ειδικότερα, στο πλαίσιο του προγράμματος σπουδών Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά , εκπονούνται από τους φοιτητές επιστημονικές εργασίες σε επίπεδο μεταπτυχιακής διπλωματικής και διδακτορικής διατριβής στις παρακάτω ερευνητικές περιοχές των εφαρμοσμένων μαθηματικών.

Α1. Εφαρμογές των Μαθηματικών στη Βιοϊατρική Τεχνολογία

Η βιοϊατρική βασική έρευνα και τεχνολογία αποτελεί αιχμή επιστημονικού ενδιαφέροντος καθώς η συσσωρευμένη γνώση και η εφαρμοσμένη επιστήμη προσφέρουν πλήθος δυνατοτήτων στην πειραματική έρευνα, στη βάση της βιολογίας, της φυσικής και της χημείας διεργασιών που εμπλέκονται σε ασθένειες, οι οποίες μαστίζουν τον ανθρώπινο πληθυσμό στην εποχή μας. Το πλήθος των παραγόμενων αποτελεσμάτων και η πολυπλοκότητα των βιολογικών φαινομένων κάνουν αναγκαία την διεπιστημονική προσέγγιση των φαινομένων, ώστε διαφορετικές πλευρές να εξετάζονται υπό το πρίσμα κάθε επιστήμης και η κατανόηση να βαθαίνει και να γίνεται πολύπλευρη, ώστε και η αντιμετώπιση της ασθένειας γίνεται πιο αποτελεσματική. Τα μαθηματικά πρότυπα έχουν να συνεισφέρουν στην έρευνα αυτή, τόσο με την ακρίβεια και την προβλεψιμότητα των αναλυτικών μοντέλων όσο και με την προσαρμοστικότητα και την ευελιξία επιλογής των εμπλεκομένων παραμέτρων των υπολογιστικών προσεγγιστικών μοντέλων. Στην περιοχή αυτή εκπονούνται εργασίες που μελετούν:

1. Μαθηματική προτυποποίηση της ροής πλάσματος γύρω από ερυθρά αιμοσφαίρια μέσω της έρπουσας Ροής Stokes
2. Μαθηματική προτυποποίηση της ανάπτυξης καρκινικών όγκων
3. Μαθηματική θεωρία των απεικονιστικών τεχνικών του εγκεφάλου, της Ηλεκτροεγκεφαλογραφίας και της Μαγνητοεγκεφαλογραφίας

Α2. Εφαρμογές των Μαθηματικών στη θεωρία Σκέδασης Ακουστικών και Ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

Η θεωρία της σκέδασης κατέχει σημαντικό ρόλο στη μαθηματική φυσική. Από την εξήγηση του λόρδου Rayleigh για το γαλάζιο χρώμα του ουρανού, μέχρι την ανακάλυψη του Ratherford για τον πυρήνα του ατόμου, αλλά και στις σύγχρονες εφαρμογές στην ιατρική, όπως στις απεικονιστικές τεχνικές με τη χρήση υπερήχων, ή της ηλεκτρονικής τομογραφίας με την εκπομπή ποζιτρονίων, η θεωρία της σκέδασης αποτελεί πόλο ενδιαφέροντος για τους επιστήμονες και ειδικά τους μαθηματικούς για περισσότερο από εκατό χρόνια. Αποτελεί κορμό της προτυποποίησης διαγνωστικών μη παρεμβατικών μεθόδων στην ιατρική φυσική αλλά και σε μεθόδους μη καταστροφικού ελέγχου.

Α3. Εφαρμογές των Μαθηματικών στην Πληροφορική και αντιστρόφως

Η μελέτη και εφαρμογή των μαθηματικών μοντέλων των βιολογικών νευρωνικών δικτύων οδήγησε στην ανάπτυξη των τεχνητών νευρωνικών δικτύων, τα οποία αποτελούν πολύπλοκα συστήματα επεξεργασίας πληροφοριών. Αποτελούνται από μεγάλο πλήθος συνδεδεμένων μονάδων οι οποίες επεξεργάζονται και προωθούν την διερχόμενη πληροφορία, με βάση από πριν ορισμένη συνάρτηση βάρους η οποία επιδέχεται ανατροφοδότηση και επαναπροσδιορισμό και λειτουργούν έτσι και προς την αποθήκευση και απόδοση της εμπειρικής γνώσης. Έχουν μεγάλο πλήθος εφαρμογών, από την αεροπλοΐα, την βιολογία, την ιατρική , τη βιοπληροφορική αλλά και τη μετεωρολογία.

**Η κατεύθυνση των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών στο πρόγραμμα ΜΣΜ του ΕΑΠ**

Στο πλαίσιο του προγράμματος σπουδών Μεταπτυχιακές σπουδές στα μαθηματικά, η κατεύθυνση των εφαρμοσμένων μαθηματικών θεραπεύεται μέσω δύο υποχρεωτικών θεματικών ενοτήτων, της ΜΣΜ60 και ΜΣΜ61 και μιας ΘΕ επιλογής, της ΜΣΜ62.

Ειδικότερα, η ΘΕ ΜΣΜ 61 με αντικείμενο ***Υπολογιστικές Μέθοδοι & Λογισμικό στα Μαθηματικά,*** όσο αφορά την κατεύθυνση των εφαρμοσμένων μαθηματικών, παρέχει στο φοιτητή την εξοικείωση με τα βασικά εργαλεία που θα χρησιμοποιηθούν στην αντιμετώπιση σχετικών θεμάτων. Παράλληλα δίνονται εργαλεία απαραίτητα για την ανάπτυξη εκπαιδευτικού λογισμικού, που εξυπηρετούν την παιδαγωγική κατεύθυνση του προγράμματος. Μελετώνται αριθμητικές μέθοδοι και υπολογιστικά-συμβολικά πακέτα που αφορούν τη μελέτη Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων οι οποίες προκύπτουν στην μαθηματική προτυποποίηση και επίλυση ρεαλιστικών προβλημάτων. Επίσης μελετώνται στοιχειωδώς η αναλυτική αντιμετώπιση μερικών διαφορικών εξισώσεων και προβλημάτων συνοριακών τιμών, μέσω της θεωρίας Sturm Liouville και της ανάπτυξης σε ιδιοσυναρτήσεις καθώς και οι βασικές αρχές διαστατικής και ασυμπτωτικής ανάλυσης και του λογισμού των μεταβολών.

Στη συνέχεια η ΘΕ ΜΣΜ60, με αντικείμενο ***Μαθηματικά Πρότυπα στις Φυσικές Επιστήμες,*** εμβαθύνει στις μαθηματικές μεθόδους που χρησιμοποιούνται στην αναλυτική επίλυση των προβλημάτων που προκύπτουν από την προτυποποίηση των φυσικών φαινομένων, αλλά και που βρίσκονται ως υπόβαθρο πίσω από τις αριθμητικές μεθόδους οι οποίες επιτρέπουν την προσεγγιστική αλλά περισσότερο ρεαλιστική αντιμετώπιση των προβλημάτων αυτών. Έτσι, παρέχεται εις βάθος μελέτη της θεωρίας των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων και των Ολοκληρωτικών Εξισώσεων που συναντώνται στην πλειοψηφία των φαινομένων της φυσικής, στη γραμμικοποιημένη προσέγγισή τους, ώστε η μελέτη να μην ξεφεύγει από τους στόχους του μεταπτυχιακού προγράμματος. Επιπροσθέτως μελετάται η θεωρία τελεστών, υπό το πρίσμα της συναρτησιακής ανάλυσης, ώστε να παρέχεται επαρκές θεωρητικό υπόβαθρο για την εξασφάλιση των συνθηκών που απαιτούνται για την ύπαρξη, μοναδικότητα και ευστάθεια των λύσεων των προβλημάτων που προτυποποιούν τα υπό μελέτη φαινόμενα, όχι μόνον για τους τελεστές δυναμικού, διάχυσης και του κυματικού τελεστή, οι οποίοι αναλύονται διεξοδικά, αλλά και κάθε γραμμικού συνεχούς και φραγμένου τελεστή. Η ανάλυση αυτή προσφέρει στον μελετητή μία οπτική συνολική της σχετικής ύλης και συνδέει τις μαθηματικές μεθόδους υπό το πρίσμα της θεωρίας τελεστών, με συμπυκνωμένο και συμπαγή τρόπο, εκτιμητέο από κάθε άνθρωπο που γοητεύεται από τα μαθηματικά ως ποιητικό δημιούργημα.

Τέλος, η ΘΕ ΜΣΜ62, με αντικείμενο ***Ειδικά Θέματα Μαθηματικών ,*** παρέχει στο φοιτητή που θα την επιλέξει, μία εισαγωγή στην ερευνητική διαδικασία, συγχρόνως με εις βάθος μελέτη σε εξειδικευμένες επιστημονικές περιοχές. Ειδικότερα, γίνεται εισαγωγή στη μαθηματική θεωρία της μηχανικής ρευστών, με έμφαση στις βιοϊατρικές εφαρμογές. Επίσης γίνεται μελέτη της μαθηματικής θεωρίας σκέδασης ακουστικών, ηλεκτρομαγνητικών και ελαστικών κυμάτων από ομαλό σκεδαστή, με μεγάλο εύρος τεχνολογικών εφαρμογών, από την περιοχή της διαγνωστικής ιατρικής, μέχρι της αμυντικής πολεμικής τεχνολογίας. Τέλος, γίνεται διεξοδική μελέτη προβλημάτων ελευθέρου συνόρου, που περιλαμβάνουν σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων (διάχυσης αντίδρασης) και συνήθους διαφορικής εξίσωσης , σε χωρίο με ελευθερο σύνορο, δηλαδή όχι σταθερό στο χρόνο. Η έμφαση δίνεται στην χρήση αυτών των προβλημάτων στην μαθηματική προτυποποίηση και μελέτη προβλημάτων που σχετίζονται με την ανάπτυξη καρκινικών όγκων σε ανθρώπινο ιστό.

Η μελέτη γίνεται μέσα από έγκυρα συγγράμματα αλλά και από δημοσιευμένα άρθρα σε διεθνή περιοδικά με κριτές, καταξιωμένα και ευρέως μελετημένα από την επιστημονική κοινότητα που δραστηριοποιείται στην εν λόγω περιοχή. Η μελέτη μέσα από δημοσιεύεις παρέχει, εκτός από την επικαιροποιημένη γνώση της περιοχής, την εκπαίδευση στην εξόρυξη γνώσης μέσα από την μελέτη ενός επιστημονικού άρθρου πυκνού στη γραφή καθώς και πρακτική εμπειρία στη μελέτη και κατ' επέκταση στη συγγραφή μίας επιστημονικής εργασίας. Η εμπειρία αυτή είναι πολύτιμη για την εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας από το φοιτητή, που είτε έπεται χρονικά, είτε λαμβάνει χώρα σε παράλληλο με τη ΘΕ αυτή χρόνο.

**Διπλωματικές εργασίες**

Ενδεικτικά αναφέρουμε πρόσφατες διπλωματικές εργασίες που έχουν εκπονηθεί στο πλαίσιο της κατεύθυνσης αυτής του προγράμματος ΜΣΜ στα έτη 2009-2011.

*Προτυποποίηση προβλημάτων έρπουσας ροής, με εφαρμογές σε ροή βιολογικών ρευστών*

- Μελέτη της ροής Stokes σε αξονοσυμμετρικά συστήματα συντεταγμένων. (Πρωτοπαππάς Ελευθέριος, 2009, επιβλ. Χατζηνικολάου Μ., ΜΣΜ60)

Στη διπλωματική αυτή γίνεται η πλήρης μαθηματική μελέτη των τελεστών που περιγράφουν τη ροή Stokes και ειδικά στην περιοχή της έρπουσας ροής, στο σφαιρικό και σφαιροειδές σύστημα συντεταγμένων. Περιγράφεται η εφαρμογή της θεωρίας σε συγκεκριμένα προβλήματα συνοριακών τιμών, τα οποία εμφανίζονται κατά την προτυποποίηση της ροής βιολογικών ρευστών . Έτσι τα αποτελέσματα της εργασίας αυτής αποτελούν υπόβαθρο ευρύτερης εργασίας πάνω στη μοντελοποίηση της ροής πλάσματος γύρω από τα ερυθρά αιμοσφαίρια στο ανθρώπινο κυκλοφορικό σύστημα.

*Προτυποποίηση προβλημάτων που η φυσική τους επιβάλλει μη αντιστρεπτή διαδικασία, οπότε περιγράφονται με μερικές διαφορικές εξισώσεις παραβολικού τύπου.*

- Προτυποποίηση προβλημάτων με παραβολικές μερικές διαφορικές εξισώσεις (Γρηγορίου Μαρία, 2010, Γκιντίδης, ΜΣΜ61)
- Μαθηματικά μοντέλα προβλημάτων αντίδρασης- διάχυσης (Δουκάκης Παναγιώτης, 2010, επιβλ. Βλάμος Π., ΜΣΜ51)

Στις παραπάνω διπλωματικές γίνεται μελέτη της θεωρίας των παραβολικών μερικών διαφορικών εξισώσεων και των ιδιοτήτων των λύσεων αντιστοίχων προβλημάτων συνοριακών και αρχικών τιμών . Οι εργασίες αυτές αποτελούν το θεωρητικό υπόβαθρο για τη μελέτη μαθηματικών προτύπων για φαινόμενα που εξελίσσονται στη φύση με μη αντιστρεπτό τρόπο στο χρόνο, όπως αυτά στα οποία αναφέρονται οι παρακάτω διπλωματικές εργασίες.

- Μαθηματική προτυποποίηση μέσω προβλημάτων ελεύθερου συνόρου (Τζελέπης Αλκιβιάδης, 2010, επιβλ. Χατζηνικολάου Μ. ΜΣΜ60)
- Προβλήματα ελευθέρου συνόρου στην ανάπτυξη και αντιμετώπιση καρκινικών όγκων (Βάγια Αργυρούλα, 2011, επιβλ. Χατζηνικολάου Μ., ΜΣΜ60)

Οι παραπάνω εργασίες μελετούν την προτυποποίηση προβλημάτων που εκτυλίσσονται σε διαφορετικές κλίμακες χρόνου, οπότε κάποιες από τις ποσότητες που περιγράφουν μεγέθη του φαινομένου περιγράφονται με ΜΔΕ ελλειπτικού τύπου και κάποια άλλα μεγέθη με ΜΔΕ παραβολικού τύπου είτε με ΣΔΕ ως προς τη μεταβλητή του χρόνου. Μαθηματικά πρότυπα με τέτοιου τύπου προβλήματα συνοριακών τιμών σε ελεύθερο σύνορο συναντώνται στη μελέτη της ανάπτυξης καρκινικών όγκων σε ανθρώπινο ιστό. Μια σειρά διπλωματικών εργασιών αναφέρεται στη μελέτη της μη αγγειακής φάσης ανάπτυξης, τόσο βιβλιογραφικά, όσο και μέσω της ανάπτυξης και μελέτης συγκεκριμένων σχετικών προτύπων.

- Η Μαθηματική προτυποποίηση της ανάπτυξης καλοήθων καρκινικών όγκων από τον $20^{o}$ στον $21^{o}$ αιώνα (Παραθυρά Μαρία, 2010, επιβλ. Καριώτου Φ. , ΜΣΜ60)
- Μελέτη της μη αγγειακής καρκινικής ανάπτυξης σε επιμήκη σφαιροειδή γεωμετρία (Κουνή Στυλιανή, 2011, επιβλ. Καριώτου Φ., ΜΣΜ60)
- Η επίδραση της πεπλατυσμένης σφαιροειδούς γεωμετρίας στη μαθηματική προτυποποίηση της μη αγγειακής καρκινικής ανάπτυξης (Γραικού Αικατερίνη, 2011, επιβλ. Καριώτου Φ.,ΜΣΜ60)

Η γεωμετρία των προβλημάτων που μελετώνται αναφέρεται σε καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων, τα οποία περιγράφουν φυσικά συστήματα με ακτινική συμμετρία, οπότε η περιγραφή απαιτεί το σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων, είτε αξονική συμμετρία, οπότε χρησιμοποιείται το επίμηκες σφαιροειδές ή το πεπλατυσμένο σφαιροειδές σύστημα. Ωστόσο, η περιγραφή κάποιου φυσικού συστήματος μπορεί να απαιτεί λιγότερο τετριμμένη γεωμετρία, οπότε επιβάλλεται η χρήση του δισφαιρικού συστήματος συντεταγμένων, είτε του ελλειψοειδούς συστήματος συντεταγμένων

- Το δισφαιρικό σύστημα συντεταγμένων σε στατικά προβλήματα συνοριακών τιμών (Καλαπόδης Ανδρέας, 2009, επιβλ. Χατζηνικολάου Μ.)

*Προτυποποίηση κυματικών προβλημάτων με υπερβολικές μερικές διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες στη θεωρία των χαμηλών συχνοτήτων ανάγεται στη μελέτη προβλημάτων δυναμικού.*

- Σκεδαση ακουστικων κυματων απο ομαλους σκεδαστες-εφαρμογη στη mathematica (Μανωλόπουλος Μιχαήλ, 2009, επιβλ. Γκιντίδης Δ., ΜΣΜ61)
- Η συνεισφορά της επίπεδης και της σημειακής ακουστικής διέγερσης στην αποτύπωση των χαρακτηριστικών σφαιρικού σκεδαστή (Σαραφοπούλου Χαρίκλεια, 2011, επιβλ. Καριώτου Φ., ΜΣΜ60)

Στις παραπάνω εργασίες αναλύεται το φυσικό φαινόμενο της διάδοσης και σκέδασης ακουστικών κυμάτων σε συνεχές μέσο όπου παρεμβάλλεται φυσικό εμπόδιο ή χωρική ασυνέχεια. Το φαινόμενο περιγράφεται μαθηματικά μέσω της κυματικής εξίσωσης και συνοριακών τιμών που εξαρτώνται από τις φυσικές ιδιότητες του εμποδίου-σκεδαστή και από τη γεωμετρία του. Γίνεται εκτενής αναφορά και εφαρμογή της θεωρίας σκέδασης στην περίπτωση που το μήκος κύματος είναι πολύ μεγαλύτερο από τη χαρακτηριστική διάσταση του σκεδαστή, δηλαδή της θεωρίας χαμηλών συχνοτήτων και τέλος γίνεται αναφορά στην χρήση των αποτελεσμάτων της θεωρίας στην αντίστροφη σκέδαση, δηλαδή στην ταυτοποίηση του σκεδαστή, όταν είναι γνωστό το προσπίπτον και το σκεδασμένο ακουστικό πεδίο.

*Χρήση υπολογιστικού πακέτου Mathematica*

Μια σειρά εργασιών παρέχουν επιπλέον το υπολογιστικό υπόβαθρο για την αριθμητική προσέγγιση των παραπάνω προβλημάτων , με εφαρμογές από τη χρήση του υπολογιστικού πακέτου Mathematica.

- Αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης ιδιόμορφων ολοκληρωτικών εξισώσεων (Ελευθερίου Παναγιώτα, 2010, επιβλ. Γκιντίδης, ΜΣΜ61)
- Εφαρμογή των μερικών διαφορικών εξισώσεων στην προτυποποίηση προβλημάτων με τη χρήση Mathematica (Χανιωτάκης Σταύρος, 2011, επιβλ. Γκιντίδης, ΜΣΜ61)
- Εισαγωγή σε μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις- Υπολογιστικές εφαρμογές με το Mathematica (Θυμιοπούλου Ηλιάνα, 2010, επιβλ. Γκιντίδης,ΜΣΜ61)
- Υπολογιστική επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων με το Mathematica (Παπαχρήστος Ηλίας, 2011, επιβλ. Γκιντίδης, ΜΣΜ61)

*Εφαρμογές των Μαθηματικών στην πληροφορική*
Αριθμητικές μέθοδοι για την βελτιστοποίηση μη γραμμικών συναρτήσεων με μεγάλο πλήθος μεταβλητών καθώς και η εφαρμογές των μαθηματικών στον σχεδιασμό και στην εκπαίδευση νευρωνικών δικτύων και η χρήση αυτών στην βιοϊατρική τεχνολογία, μελετώνται στις παρακάτω εργασίες.

- Καμπυλόγραμμη και γραμμική αναζήτηση για προβλήματα βελτιστοποίησης μεγάλης κλίμακας (Μπουραζάνα Δήμητρα, 2011, επιβλ. Δ. Σωτηρόπουλος, ΜΣΜ61)
- Νευρωνικά δίκτυα προσομοίωσης του ανθρώπινου εγκεφάλου (Πλέρου Αντωνία, 2009, επιβλ. Βλάμος Π. ΜΣΜ51)
- Εξόρυξη πληροφοριών από βιοϊατρικά δεδομένα με χρήση νευρωνικών δικτύων (Ιορδανίδης Φώτιος, 2011, επιβλ. Δ. Σωτηρόπουλος, ΜΣΜ61).

**Συμπεράσματα**
Η κατεύθυνση των εφαρμοσμένων μαθηματικών απευθύνεται σε εκείνους τους φοιτητές του προγράμματος «Μεταπτυχιακές σπουδές στα μαθηματικά», του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου, οι οποίοι έχουν ενδιαφέρον στη μαθηματική προτυποποίηση και στην εφαρμογή των μαθηματικών στις φυσικές επιστήμες και στην τεχνολογία. Μέσα από την ειδίκευσή αυτή εμβαθύνουν στη γνώση και χρήση ισχυρών μαθηματικών μεθόδων και τεχνικών, προσεγγίζουν ειδικές περιοχές της φυσικής ή της βιολογίας μέσα από τη μελέτη φαινομένων της βιωματικής πραγματικότητας, των φυσικών νόμων που τα διέπουν και της μαθηματικής διατύπωσής τους . Τους παρέχεται η δυνατότητα να παράγουν νέα αποτελέσματα, συνεισφέροντας έτσι σε κάποιο βαθμό στην επιστημονική γνώση της περιοχής ενδιαφέροντός τους. Η εμπειρία που αποκτούν καταγράφεται στον τρόπο σκέψης και αντιμετώπισης τόσο των μαθηματικών καθ εαυτών όσο και της σύνδεσής τους με την εμπειρώμενη πραγματικότητα. Η κριτική και συνδυαστική σκέψη η οποία καλλιεργείται μεταφέρεται μέσω της εκπαιδευτικής διαδικασίας αβίαστα στους μαθητές των φοιτητών μας, μέσα από την επαγγελματική τους πορεία.

Η πορεία του προγράμματος μέσα από την κατεύθυνση των εφαρμοσμένων μαθηματικών είναι σε δυναμική θετική εξέλιξη καθώς τα αποτελέσματα στα οποία αναφερθήκαμε στην παρούσα εργασία αφορούν μόλις τα πρώτα χρόνια λειτουργίας του προγράμματος και το ενδιαφέρον προκύπτει αυξανόμενο και διευρυνόμενο.

**Βιβλιογραφία**
Colton D., Coyle J. and Monk P., (2000). Recent developments in inverse acoustic scattering theory. *SIAM Rev., 42,* pp. 369-414
Dyn C.L. (2004). *Principles of Mathematical Modeling*, Elsevier Academic Press
Fowler A.C. (1998). *Mathematical Models in the Applied Sciences*, Cambridge University Press
Happel J., Brenner H., (1981), *Low Reynolds numbers Hydrodynamics*,Springer
Jones D.S., Sleeman B.D.(2003), *Differential Equations and Mathematical Biology*, Chapman & Hall/CRC

*Open Education - The Journal for Open and Distance Education and Educational Technology*
*Volume 8, Number 1, 2012 Section one © Open Education ISSN: 1791-9312*

# Αναζήτηση στο Διαδίκτυο με Χρήση Μεθόδων Γραμμικής Άλγεβρας

# Internet Search using methods of Linear Algebra

**Ανδρέας Αρβανιτογεώργος**
Πανεπιστήμιο Πατρών
Επίκουρος Καθηγητής
arvanito@math.upatras.gr

**Περίληψη**

Τα τεχνολογικά προβλήματα που παρουσιάζονται στο σύγχρονο κόσμο είναι ιδιαίτερα περίπλοκα και προκειμένου να κατανοηθούν πληρέστερα, συχνά απαιτούν μια μαθηματική περιγραφή. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η αναζήτηση ιστοσελίδων στο διαδίκτυο με τέτοιον τρόπο, ώστε να παρουσιάζονται στο χρήστη οι ιστοσελίδες που τον αφορούν περισσότερο. Ο τεράστιος όγκος της διαθέσιμης πληροφορίας απαιτεί μια συντονισμένη μαθηματική προσέγγιση και μια τέτοια μαθηματική μέθοδος χρησιμοποιείται από τη μηχανή αναζήτησης Google. Στην παρούσα εργασία παρουσιάζουμε τη θεμελίωση της μεθόδου αυτής χρησιμοποιώντας γραμμική άλγεβρα, καθώς και μερικές δυσκολίες που προκύπτουν κατά την εφαρμογή της.

**Abstract**

The success of several internet search machines derives in large part from various information retrieval (IR) methods that have been developed. The most frequently cited Web IR methods are the HITS (Hypertext Induced Topic Search), PageRank, and SALSA (Stochastic Approach for Link Structure Analysis). These methods use a vector space model, in particular finding an eigenvector with corresponding eigenvalue 1 of an 8 billion by 8 billion matrix. In the present work we give the mathematical formulation of the PageRank method.

## 1. Keywords

*information retrieval, pagerank, linear algebra*

## 2. Εισαγωγή

Η αναζήτηση πληροφοριών από το διαδίκτυο αποτελεί εδώ και καιρό μια βασική δραστηριότητα των περισσότερων ανθρώπων. Οι πληροφορίες αυτές βρίσκονται εντελώς διάσπαρτες και εκτός του ότι δεν υπόκεινται σε κάποια διαδικασία κρίσης, πολλές από αυτές είναι άχρηστες στο χρήστη. Για το σκοπό αυτό έχουν αναπτυχθεί διάφορες μέθοδοι, οι οποίες έχουν ως στόχο να παρουσιάζουν, ανάλογα με τις λέξεις-κλειδιά που χρησιμοποιεί κάποιος, τις ιστοσελίδες σε φθίνουσα σειρά ενδιαφέροντος. Οι μέθοδοι αυτές είναι γνωστές ως "μέθοδοι ανάκτησης πληροφορίας" (information retrieval methods) και οι περισσότερες από αυτές χρησιμοποιούν ως κεντρική μαθηματική δομή την έννοια του διανυσματικού χώρου, η οποία αποτελεί το βασικό αντικείμενο μελέτης της γραμμικής άλγεβρας. Παραπέμπουμε στο άρθρο (Berry, et al 1999) για μια ανασκόπηση των μεθόδων γραμμικής άλγεβρας στην ανάκτηση πληροφορίας.

Για συλλογές που αποτελούνται από σχετικά μικρό αριθμό αρχείων, η πιο συνηθισμένη μέθοδος ανάκτησης πληροφορίας είναι η μέθοδος LSI (Latent Semantic Indexing) (Bonato, 2008). Η μέθοδος όμως αυτή έχει περιορισμένη αποτελεσματικότητα όταν εφαρμοστεί στον τεράστιο όγκο πληροφοριών του παγκόσμιου ιστού (World Wide Web). Το 1998 οι Larry Page και Sergey Brin, θεμελιωτές της μηχανής αναζήτησης Google, στην εργασία (Brin, et al 1998). ανέπτυξαν έναν αλγόριθμο (γνωστός ως PageRank algorithm) σύμφωνα με τον οποίο, σε κάθε ιστοσελίδα ενός δικτυακού τόπου (Web) δίνεται ένας δείκτης βαρύτητας, μέσω μια διαδικασίας "ψηφοφορίας" από άλλες ιστοσελίδες. Αποτέλεσμα αυτού είναι ότι όταν ο χρήστης αναζητήσει μια πληροφορία στον δικτυακό τόπο, οι πιο σχετικές πληροφορίες εμφανίζονται στην οθόνη του σε πρώτη κατάταξη. Για εκτενή περιγραφή της μεθόδου παραπέμπουμε στα άρθρα (Bryan , et al 2006), (Langville et al, 2005) και στο βιβλίο (Bonato, 2008). Άλλοι αλγόριθμοι αναζήτησης είναι οι HITS (Hypertext Induced Topic Search) (Kleinberg, 1999) και SALSA (Stochastic Approach for Link Structure Analysis) (Lempel, et al 2000).

Στην παρούσα εργασία θα παρουσιάσουμε τις μαθηματικές αρχές του προσδιορισμού του δείκτη βαρύτητας των ιστοσελίδων ενός δικτυακού τόπου, καθώς και διάφορες μαθηματικές δυσκολίες που προκύπτουν από τη διαδικασία αυτή. Για μια βαθύτερη κατανόηση συστημάτων κατάταξης από πολλές απόψεις παραπέμπουμε στο βιβλίο (Langville, et al 2010).

Είναι ενδιαφέρον και σε ένα βαθμό απροσδόκητο, το γεγονός ότι ένα πρακτικό πρόβλημα του διαδικτύου οδηγεί όχι μόνο σε ενδιαφέροντα μαθηματικά προβλήματα, αλλά και σε αποδείξεις συγκεκριμένων θεωρημάτων, κάτι το οποίο αναδεικνύει την διεπιστημονική αξία των μαθηματικών.

## 3. Χαρακτηριστικά των μηχανών αναζήτησης.

Ένα από τα πιο βασικά χαρακτηριστικά μιας μηχανής αναζήτησης στο διαδίκτυο (π.χ. Google, Yahoo, Alta Vista) είναι η δυνατότητά της να ταξινομεί όλες τις διαθέσιμες ιστοσελίδες με τέτοιον τρόπο, ώστε να παρουσιάζονται στο χρήστη εκείνες οι σελίδες που του είναι πιο χρήσιμες. Αυτή τη στιγμή υπάρχουν στο διαδίκτυο περίπου 25 δισεκατομμύρια ιστοσελίδες, συνεπώς είναι καίριας σημασίας το ερώτημα το πώς μια μηχανή αναζήτησης θα παρουσιάσει τις ιστοσελίδες σε φθίνουσα σειρά ενδιαφέροντος. Για παράδειγμα, ας φανταστούμε τη δυσκολία που θα είχαμε αν αναζητούσαμε μια πληροφορία σε μια βιβλιοθήκη, η οποία να περιέχει 25 δισεκατομμύρια πηγές, αλλά να μην έχει ούτε κεντρική οργάνωση ούτε βιβλιοθηκάριους.

Μια μηχανή αναζήτησης έχει συνήθως τρεις αποστολές:

α) Πλοήγηση στο διαδίκτυο για αναζήτηση όλων των ιστοσελίδων που έχουν ελεύθερη πρόσβαση.

β) Ταξινόμηση των δεδομένων του α) με τρόπο ώστε να μπορούν να αναζητηθούν χρησιμοποιώντας λέξεις ή φράσεις-κλειδιά.

γ) Δημιουργία ενός "δείκτη βαρύτητας" για κάθε ιστοσελίδα του δικτυακού τόπου, ώστε όταν εντοπιστούν διάφορες ιστοσελίδες σχετικές με κάποια αναζήτηση, οι σελίδες να εμφανίζονται στην οθόνη σε φθίνουσα σειρά βαρύτητας.

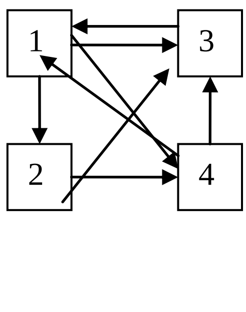
Στην παρουσίαση αυτή θα επικεντρωθούμε στο (γ). Συγκεκριμένα, θα παρουσιάσουμε έναν αλγόριθμο προσδιορισμού ενός δείκτη βαρύτητας ιστοσελίδων (PageRank algorithm), ο οποίος χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τη μηχανή αναζήτησης Google. Αποτέλεσμα του αλγορίθμου αυτού είναι η συγκεκριμένη μηχανή αναζήτησης, να παρουσιάζει τις ιστοσελίδες που αφορούν το χρήστη σε σειρά φθίνουσας σημασίας. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η μαθηματική πλευρά του προσδιορισμού του δείκτη βαρύτητας ιστοσελίδων και αυτό είναι το σημείο που θα επικεντρωθούμε. Αν και τα απαιτούμενα μαθηματικά είναι απλή γραμμική άλγεβρα, έχει αξία να παρατηρήσουμε πώς συγκεκριμένα προβλήματα που αφορούν την τεχνολογία μεταφέρονται σε σαφή μαθηματικά ερωτήματα, των οποίων οι απαντήσεις οδηγούν στη διατύπωση και απόδειξη προτάσεων.

## 4. Προσδιορισμός του δείκτη βαρύτητας ιστοσελίδων.

Θα παρουσιάσουμε έναν τρόπο "βαθμολόγησης" κάθε ιστοσελίδας ενός δικτυακού τόπου (Web) αντιστοιχίζοντας σε κάθε ιστοσελίδα έναν μη αρνητικό αριθμό, ο οποίος θα ονομάζεται *δείκτης βαρύτητας* (δ.β.) της ιστοσελίδας. Η βασική ιδέα του προσδιορισμού του δείκτη αυτού, είναι ότι αυτός θα προκύπτει από τον αριθμό των αναφορών που δέχεται η συγκεκριμένη ιστοσελίδα από άλλες ιστοσελίδες, αλλά και από το πόσο σημαντικές είναι οι ιστοσελίδες αυτές. Με άλλα λόγια, ο δ.β. θα προσδιοριστεί από μια διαδικασία "ψηφοφορίας" μεταξύ των ιστοσελίδων.

Ας υποθέσουμε ότι ένας δικτυακός τόπος αποτελείται από $n$ ιστοσελίδες, όπου η κάθε μια προσδιορίζεται από έναν ακέραιο $k, 1 \le k \le n$. Στο παρακάτω Παράδειγμα 1 παρουσιάζεται ένας δικτυακός τόπος που περιέχει $n = 4$ ιστοσελίδες. Κάθε βέλος από την ιστοσελίδα Α στην ιστοσελίδα Β δηλώνει ότι η Α αναφέρει την Β. Συμβολίζουμε με $x_k$ τον δ.β. της ιστοσελίδας $k$. Συνεπώς, όταν η ιστοσελίδα $j$ είναι πιο σημαντική από την ιστοσελίδα $k$, θα πρέπει να ισχύει $x_k \ge 0$ και $x_j > x_k$. Η πιο απλοϊκή προσέγγιση είναι να ορίσουμε ως $x_k$ να είναι ο συνολικός αριθμός των αναφορών που δέχεται η ιστοσελίδα $k$.

**Παράδειγμα 1**. Θεωρούμε τον δικτυακό τόπο του παρακάτω σχήματος. Τα βέλη δείχνουν τις αναφορές των ιστοσελίδων μεταξύ τους, π.χ. η ιστοσελίδα 1 αναφέρεται από τις ιστοσελίδες 3 και 4. Άρα οι δείκτες βαρύτητας είναι $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 3$ και $x_4 = 2$, το οποίο σημαίνει ότι η πιο σημαντική είναι η ιστοσελίδα 3 και ακολουθούν οι ιστοσελίδες 1 και 4 (σε ισοβαθμία), με την ιστοσελίδα 2 να είναι η λιγότερο σημαντική.




Η παραπάνω όμως προσέγγιση δεν λαμβάνει υπόψη μια σημαντική παράμετρο. Συγκεκριμένα, θα πρέπει η αναφορά που δέχεται η ιστοσελίδα $k$ από μια σημαντική ιστοσελίδα να συνεισφέρει στον δείκτη βαρύτητας της $k$ περισσότερο από το αν δεχόταν αναφορά από μια ασήμαντη ιστοσελίδα. Στο Παράδειγμα 1 οι σελίδες 1 και 4 έχουν δύο αναφορές, αλλά η δεύτερη αναφορά της σελίδας 1 προέρχεται από τη σελίδα 3, η οποία φαίνεται να είναι η πιο σημαντική, ενώ η δεύτερη αναφορά της σελίδας 4 προέρχεται από τη σελίδα 2, ο οποία δεν είναι ιδιαίτερα σημαντική.

Έτσι λοιπόν, ας ορίσουμε προσωρινά τον δείκτη βαρύτητας της ιστοσελίδας $j$ ως το άθροισμα των δεικτών βαρύτητας όλων των ιστοσελίδων οι οποίες αναφέρουν την $j$. Για το παράδειγμά μας, θα είναι $x_1 = x_3 + x_4, x_2 = x_1, x_3 = x_1 + x_2 + x_4$ και $x_4 = x_1 + x_2$. Αν και φαίνεται ότι η διαδικασία αυτή έχει αυτοαναφορικό χαρακτήρα, είναι η κατάλληλη για τον τελικό προσδιορισμό του δ.β.

Θα χρειαστούμε μόνο μια τελική τροποποίηση. Επιθυμούμε να έχουμε έναν αλγόριθμο κατά τον οποίο ο δ.β μιας ιστοσελίδας να μην κερδίζει επιπλέον επιρροή όταν συνδέεται με πολλές άλλες ιστοσελίδες. Έτσι λοιπόν, αν η ιστοσελίδα $j$ έχει $n_j$ συνδέσεις σε άλλες ιστοσελίδες, μία από τις οποίες είναι προς τη σελίδα $k$, τότε η συνεισφορά στον δ.β. της σελίδας $k$ θα είναι $\frac{x_j}{n_j}$ αντί για $x_j$. Με τον τρόπο αυτό κάθε ιστοσελίδα ουσιαστικά λαμβάνει μία μόνο "ψήφο".

Γενικά, έστω $n$ το πλήθος των ιστοσελίδων σε έναν δικτυακό τόπο και $L_k \subset \{1,\ldots,n\}$ το σύνολο των ιστοσελίδων που αναφέρονται στην ιστοσελίδα $k$. Τότε για κάθε $k = 1,\ldots,n$ απαιτούμε να ισχύει η σχέση

$$x_k = \sum_{j \in L_k} \frac{x_j}{n_j}, \qquad (1)$$

όπου $n_j$ είναι ο αριθμός των συνδέσεων που "φεύγουν" από την ιστοσελίδα $j$. Σημειώνουμε ότι $n_j > 0$ δεδομένου ότι αν $j \in L_k$, τότε η σελίδα $j$ συνδέεται τουλάχιστον με τη σελίδα $k$.

Εφαρμόζοντας τη διαδικασία αυτή στο Παράδειγμα 1, λαμβάνουμε τελικά ότι οι δείκτες βαρύτητας των ιστοσελίδων 1,2,3 και 4 πρέπει να ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$x_1 = \frac{x_3}{1} + \frac{x_4}{2}, x_2 = \frac{x_1}{3}, x_3 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_4}{2}, x_4 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2}.$$

Οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να εκφραστούν ισοδύναμα ως $A\vec{x} = \vec{x}$, όπου $\vec{x} = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4)^T$ και

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Ο πίνακας $A$ ονομάζεται *πίνακας σύνδεσης των ιστοσελίδων.* Έτσι λοιπόν το πρόβλημα του προσδιορισμού των δεικτών βαρύτητας των ιστοσελίδων ενός δικτυακού τόπου ανάγεται σε πρόβλημα προσδιορισμού ενός ιδιοδιανύσματος $x$ ενός τετραγωνικού πίνακα με αντίστοιχη ιδιοτιμή 1. Τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα (2) με αντίστοιχη ιδιοτιμή 1 είναι όλα τα πολλαπλάσια του διανύσματος $(12\ 4\ 9\ 6)^T$. Αν κανονικοποιήσουμε τις συντεταγμένες ώστε να έχουν άθροισμα μονάδα, παίρνουμε τελικά ότι $x_1 = \frac{12}{31} \cong 0{,}387, x_2 = \frac{4}{31} \cong 0{,}129, x_3 = \frac{9}{31} \cong 0{,}290$ και $x_4 = \frac{6}{31} \cong 0{,}194$. Η κατάταξη αυτή διαφέρει ελαφρώς από την προηγούμενη. Η ιστοσελίδα 3, αν και αναφέρεται από όλες τις άλλες ιστοσελίδες, δεν είναι η πιο σημαντική στην κατάταξη αυτή. Για να γίνει αυτό κατανοητό, παρατηρούμε ότι η σελίδα 3 αναφέρει μόνο τη σελίδα 1, οπότε υπό μία έννοια η ψήφος της "καταναλώνεται" προς τη σελίδα αυτή. Σε συνδυασμό με την ψήφο της σελίδας 2, τελικά η σελίδα 1 λαμβάνει την υψηλότερη κατάταξη.

## 5. Μαθηματική θεμελίωση του προβλήματος

Θα αποδείξουμε ότι αν ο πίνακας $A$ ενός δικτυακού τόπου δεν περιέχει "αιωρούμενες" ιστοσελίδες (dangling nodes) (δηλ. ιστοσελίδες από τις οποίες να μην "φεύγει" κανένα βέλος), τότε αυτός έχει πάντα ως ιδιοτιμή το 1.

**Ορισμός.** *Ένας τετραγωνικός πίνακας ονομάζεται στοχαστικός εάν όλα τα στοιχεία του είναι μη αρνητικά και το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης του ισούται με 1.*

**Πρόταση 1.** *Εάν ο πίνακας $A$ ενός δικτυακού τόπου δεν περιέχει αιωρούμενες ιστοσελίδες, τότε είναι στοχαστικός.*

**Απόδειξη.** Από τον τρόπο κατασκευής του πίνακα $A$, εάν η ιστοσελίδα $j$ συνδέεται με την ιστοσελίδα $i$ τότε το $(i,j)$- στοιχείο του είναι το $a_{ij} = 1/n_j$ , διαφορετικά $a_{ij} = 0$. Συνεπώς, η $j$-στήλη του $A$ περιέχει $n_j$ το πλήθος μη μηδενικά στοιχεία, το κάθε ένα από τα οποία ισούται με $1/n_j$ , άρα το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης είναι 1.

**Πρόταση 2.** *Κάθε στοχαστικός πίνακας έχει το 1 ως ιδιοτιμή.*

**Απόδειξη.** Έστω $A$ ένας $n \times n$ στοχαστικός πίνακας και $e = (1 \cdots 1)^t \in \mathbb{R}^n$. Επειδή ο $A$ είναι στοχαστικός έχουμε ότι $A^t e = e$, δηλ. το 1 είναι ιδιοτιμή του $A^t$, άρα ως γνωστόν είναι ιδιοτιμή και του $A$.

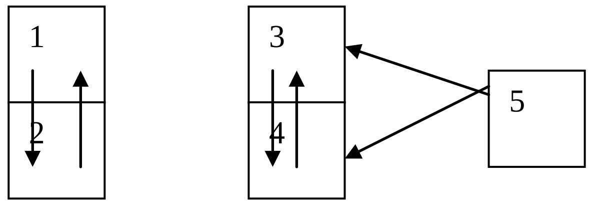
Συμβολίζουμε με $E_1(A)$ τον ιδιόχωρο του πίνακα $A$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1. Η χρήση του τύπου (1) παρουσιάζει διάφορες δυσκολίες, δύο από τις οποίες είναι οι εξής:

1) Οι δείκτες βαρύτητας των ιστοσελίδων ενός δικτυακού τόπου δεν προσδιορίζονται κατά μοναδικό τρόπο.
2) Η ύπαρξη "αιωρούμενων" ιστοσελίδων σε έναν δικτυακό τόπο.

Αποτέλεσμα της δυσκολίας 2) είναι να υπάρχουν στήλες του πίνακα $A$ με όλα τα στοιχεία μηδέν. Αυτό μπορεί να ξεπεραστεί με διαφόρους τρόπους (βλ. για παράδειγμα (Bryan, et al 2006: 5). Ο πιο απλοϊκός είναι να θέσουμε όλα τα στοιχεία της στήλης αυτής ίσα με $1/n$, οπότε ο πίνακας γίνεται στοχαστικός.

Σχετικά με το 1), προκειμένου να υπάρχει μοναδικό ιδιοδιάνυσμα $x = (x_1 \cdots x_n)^t$ ώστε $\sum x_i = 1$ (το οποίο θα προσδιορίζει τους δείκτες βαρύτητας των ιστοσελίδων κατά μοναδικό τρόπο), θα πρέπει να ισχύει $\dim E_1(A) = 1$. Ο πίνακας (2) ικανοποιεί αυτή τη συνθήκη αλλά όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα, αυτό δεν ισχύει γενικά.

**Παράδειγμα 2**. Θεωρούμε το διακτυακό τόπο του παρακάτω σχήματος.




Ο αντίστοιχος πίνακας σύνδεσης των ιστοσελίδων είναι ο $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, όπου $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ και $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ο ιδιόχωρος $E_1(A)$ έχει διάσταση 2 (π.χ. $E_1(A) = \text{span}\{x = (1/2, 1/2, 0, 0, 0)^t, y = (0, 0, 1/2, 1/2, 0)^t\}$.

Επειδή οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $x, y$ είναι ένα στοιχείο του $E_1(A)$, δεν υπάρχει μοναδικός προσδιορισμός του δείκτη βαρύτητας από ένα και μόνο ιδιοδιάνυσμα του $E_1(A)$. Ισχύει λοιπόν το εξής:

**Πρόταση 3.** *Εάν ένας δικτυακός τόπος W με πίνακα σύνδεσης $A$ αποτελείται από $r$ συνεκτικές συνιστώσεις (δηλ. μικρότερους δικτυακούς τόπους), οι οποίες δεν συνδέονται μεταξύ τους, τότε* $\dim E_1(A) \geq r$.

**Απόδειξη.** Έστω ότι ο ιστότοπος W αποτελείται από $n$ ιστοσελίδες οι οποίες δεν συνδέονται μεταξύ τους και έστω $W_1, \ldots, W_r$ οι $r$ συνεκτικές συνιστώσες. Αν $n_i$ είναι ο αριθμός των ιστοσελίδων του δικτυακού τόπου $W_i$, αριθμούμε τις ιστοσελίδες του W ώστε από 1 έως $n_1$ να είναι οι ιστοσελίδες του $W_1$, από $n_1 + 1$ έως $n_1 + n_2$ να είναι οι ιστοσελίδες του $W_2$, από $n_1 + n_2 + 1$ έως $n_1 + n_2 + n_3$ του $W_3$, κ.ο.κ.. Τότε, ο πίνακας σύνδεσης $A$ του δικτυακού τόπου W θα έχει τη μορφή

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_r \end{pmatrix},$$

όπου $A_i$ ο πίνακας σύνδεσης του δικτυακού τόπου $W_i$. Κάθε $n_i \times n_i$ πίνακας $A_i$ είναι στοχαστικός, άρα έχει ένα ιδιοδιάνυσμα $v^i \in \mathbb{R}^{n_i}$ με αντίστοιχη ιδιοτιμή 1. Για κάθε $1 \leq i \leq r$ θεωρούμε το διάνυσμα $w^i \in \mathbb{R}^n$ με $w^i = (0 \cdots 0\ v^i\ 0 \cdots 0)^t$. Τότε, επειδή $Aw^i = A(0 \cdots 0\, v^i\ 0 \cdots 0)^t = w^i$, τα $w^i$ $1 \leq i \leq r$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $A$ με αντίστοιχες ιδιοτιμές 1, συνεπώς $\dim E_1(A) \geq r$.

Δεδομένου ότι το διαδίκτυο αποτελείται από δισεκατομμύρια ιστοσελίδες με πάρα πολλές μη συνεκτικές συνιστώσες από μικρότερους δικτυακούς τόπους, είναι σημαντικό να ξεπεραστεί η δυσκολία ότι $\dim E_1(A) \geq 1$. Εργαζόμαστε ως εξής:

Υποθέτουμε ότι ένας δικτυακός τόπος αποτελείται από $n$ μη αιωρούμενες ιστοσελίδες. Έστω $S$ ο $n \times n$ πίνακας με όλα τα στοιχεία ίσα με $\frac{1}{n}$. Τότε ο $S$ είναι στοχαστικός και $\dim E_1\; S\; =1$. Θεωρούμε τον πίνακα

$$M = \; 1-m \; A + mS\,,\; 0 \leq m \leq 1 \quad (3).$$

Θα αποδείξουμε ότι αν $m \in (0,1]$ τότε $\dim V_1\; M\; =1$, άρα ο πίνακας $M$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μοναδικότητα του προσδιορισμού του δείκτη βαρύτητας. Εάν $m=1$ τότε $M=S$ και το μόνο ιδιοδιάνυσμα $x$ με ιδιοτιμή 1 έχει όλες τις συντεταγμένες ίσες με $\frac{1}{n}$ οπότε όλες οι ιστοσελίδες έχουν την ίδια βαρύτητα.

**Ορισμός.** *Ένας πίνακας $M$ ονομάζεται θετικός εάν $m_{ij} > 0$ για κάθε $i, j$.*

*Επειδή ο $M$ είναι στοχαστικός* ισχύει $E_1\; M\; \neq \varnothing$. Θα χρειαστούμε δύο λήμματα, η απόδειξη των οποίων παρατίθεται στο τέλος της εργασίας.

**Λήμμα 1.** *Εάν ο πίνακας $M$ είναι θετικός και στοχαστικός, τότε οι συντεταγμένες κάθε ιδιοδιανύσματος του $E_1\; M$ είναι είτε όλες θετικές είτε όλες αρνητικές.*

**Λήμμα 2.** *Έστω $v, w$ δύο γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbf{R}^m$, $m \geq 2$. Τότε υπάρχουν $s, t \in \mathbf{R}$ όχι και οι δύο μηδέν, ώστε οι συντεταγμένες του διανύσματος $x = sv + tw$ να είναι ταυτόχρονα θετικές και αρνητικές.*

Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε το κεντρικό αποτέλεσμα.
**Θεώρημα 1.** *Εάν ο πίνακας $M$ είναι θετικός και στοχαστικός τότε* $\dim E_1\; M\; =1$.

**Απόδειξη.** Υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $v, w \in E_1\; M$ και θα οδηγηθούμε σε άτοπο. Για κάθε $s, t \in \mathbf{R}$ όχι και τα δύο μηδέν, το διάνυσμα $x = sv + tw$ ανήκει στον $E_1\; M$ και από το Λήμμα 1 έχει όλες τις συντεταγμένες του είτε θετικές είτε αρνητικές. Αλλά αυτό αντιβαίνει στο Λήμμα 2, οπότε ο ιδιόχωρος $E_1\; M$ δεν μπορεί να περιέχει δύο γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα, άρα $\dim E_1\; M\; =1$.

Δεδομένου ότι το διαδίκτυο αποτελείται από τουλάχιστον οκτώ δισεκατομμύρια ιστοσελίδες, τίθεται το ερώτημα πώς υπολογίζουμε το ιδιοδιάνυσμα ενός $n \times n$ πίνακα, όπου $n = 8.000.000.000$. Αυτό γίνεται με τη χρήση της μεθόδου της δύναμης (βλ. για παράδειγμα ένα από τα (Meyer, et al 2000), (Strang, 2006) και αποδεικνύεται ότι με τις υποθέσεις που έχουμε η μέθοδος συγκλίνει. Έχουμε λοιπόν καταλήξει στο ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 2.** Έστω *$M$ ο πίνακας που αντιστοιχεί σε έναν δικτυακό τόπο χωρίς αιωρούμενες ιστοσελίδες, όπως δίνεται στη σχέση (3). Τότε ο $M$ είναι ένας* *στοχαστικός πίνακας άρα υπάρχει μοναδικό διάνυσμα* $\vec{q}$, *τέτοιο ώστε* $M\vec{q} = \vec{q}$ *και* $\sum_i q_i = 1$ *. Το διάνυσμα* $\vec{q}$ *είναι δυνατόν να υπολογιστεί ως το όριο της επαναληπτικής διαδικασίας* $\vec{x}_k = (1-m)Ax_{k-1} + mS$, *για οποιοδήποτε αρχικό διάνυσμα* $x_0$ *με θετικές συντεταγμένες και μέτρου 1 (ως προς το μέτρο* $|\vec{x}|_1 = \sum_i x_i$ *).*

Συμπερασματικά, η ανάκτηση πληροφορίας από το διαδίκτυο απαιτεί νέες μαθηματικές τεχνικές, λόγω του όγκου των πληροφοριών που είναι διάσπαρτες σε αυτό. Παραδοσιακές μέθοδοι όπως η LSI εμφανίζουν αδυναμίες. Οι απαραίτητοι υπολογισμοί ανοίγουν νέους δρόμους για εφαρμογή γνωστών μαθηματικών θεωριών, αλλά και διατυπώνουν προτάσεις προς απόδειξη.

## 6. Παράρτημα.

Δίνουμε εδώ τις αποδείξεις των λημμάτων 1 και 2.

**Απόδειξη Λήμματος 1.** Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα $x \in E_1\ M$ με συντεταγμένες θετικές και αρνητικές. Τότε από τη σχέση $x = Mx$ προκύπτει ότι $x_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_j$ $i = 1,..,n$ . Επειδή $m_{ij} > 0$ οι όροι $m_{ij} x_j$ έχουν ανάμεικτα πρόσημα. Χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα έχουμε ότι $|x_i| = |\sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_j| < \sum_{j=1}^{n} m_{ij} |x_j|$. Αθροίζουμε από $i = 1$ έως $i = n$ και εναλλάσσουμε τους δείκτες *i* και *j*. Επειδή ο *M* είναι στοχαστικός, τότε για κάθε $j = 1,\ldots,n$ προκύπτει ότι $\sum_i m_{ij} = 1$, άρα

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} |x_j| = \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{n} m_{ij} \right) |x_j| = \sum_{j=1}^{n} |x_j|, \text{ άτοπο.}$$

Άρα το διάνυσμα $x$ δεν μπορεί να έχει ταυτόχρονα θετικές και αρνητικές συντεταγμένες. Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση όπου $x_i \geq 0$ για κάθε $i$ (αλλά όχι όλα τα $x_i$ μηδέν). Τότε επειδή $x_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_j$ και $m_{ij} > 0$ προκύπτει ότι $x_i > 0$. Ανάλογα δείχνουμε ότι αν $x_i \leq 0$, τότε $x_i < 0$ για κάθε $i$ .

**Απόδειξη Λήμματος 2.** Λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας τα *v* και *w* είναι μη μηδενικά διανύσματα. Έστω $v = v_1,..,v_m$ , $w = w_1,..,w_m$ και $d = \sum_{i=1}^{m} v_i$ . Εάν $d = 0$, τότε οι συντεταγμένες του $v$ έχουν θετικό και αρνητικό πρόσημο, οπότε για $s = 1$ και $t = 0$ λαμβάνουμε το αποτέλεσμα. Εάν $d \neq 0$, τότε θέτουμε $s = -\frac{\sum_{i=1}^{m} w_i}{d}$ , $t = 1$. Επειδή τα $v, w$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, το διάνυσμα $x = sv + tw$ είναι μη μηδενικό. Επίσης $\sum x_i = 0$, συνεπώς το διάνυσμα $x$ περιέχει θετικές και αρνητικές συντεταγμένες.

Δίνουμε ένα παράδειγμα εφαρμογής του Λήμματος 2.

**Παράδειγμα 3.** Έστω $v = -1,3,2$ , $w = 7,-4,-5 \in \mathbf{R}^3$. Τότε $d = 4 \neq 0$, $s = -\frac{-2}{4} = \frac{1}{2}$ και το διάνυσμα $x = \frac{1}{2}\ -1,3,2\ +1\ 7,-4,-5\ = \left(\frac{13}{2}, \frac{-5}{2}, -4\right)$ έχει την επιθυμητή ιδιότητα..

## Chapter 1 Βιβλιογραφία

Berry, M.W. and Browne, M. (2005). *Understanding Search Engines: Mathematical Modeling and Text Retrieval*, 2nd ed., SIAM, Philadelphia.

Berry, M.W., Drmac, Z. and Jessup, E.R. (1999). Matrices, vector spaces, and information retrieval, *SIAM Review, 41*, pp. 335-362.

Brin, S. and Page, L. (1998). Anatomy of a large-scale hypertextual web search engine, in *Proceedings of the 7th Intern. World Wide Web Conference*.

Bryan, K. and Leise, T. (2006). The $25,000,000 eigenvector: The linear algebra behind google, *SIAM Review 48(3)* pp. 569-581.

Bonato, A. (2008). *A Course on the Web Graph*, American Math. Society, Graduate Studies in Mathematics 89, Rhode Island.

Dumais, S.T. (1991). Improving the retrieval of information from external sources, *Behavior Research Methods, Instruments and Computers*, *23*, pp. 229-236.

Kleinberg, J. (1999). Authoritative sources in a hyperlinked environment, *J. of the ACM*, *46*, pp. 604-632

Langville, A.N. and Meyer, C.D. (2005). A survey of eigenvector methods of web information retrieval, *SIAM Review*, *47*, pp. 135-161.

Langville, A.N. and Meyer, C.D. (2005). Deeper inside PageRank, *Internet Math.*, *1*, pp. 335-380.

Langville, A.N. and Meyer, C.D. (2010). *Η Μέθοδος PageRank της Google και άλλα Συστήματα Κατάταξης,* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

R. Lempel, P. and Moran, S. (2000). The stochastic approach for link-structure analysis (SALSA) and the TKC effect, in *The Ninth International World Wibe Web Conference*, New York, ACM Press.

Meyer, C.D. (2000). *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*¸ SIAM, Philadelphia.

Rogers, I. The Google Pagerank algorithm and how it works, http://www.iprcom.com/papers/pagerank

Strang, G. (2006): *Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα*, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.

*Open Education - The Journal for Open and Distance Education and Educational Technology*
*Volume 8, Number 1, 2012 Section one © Open Education ISSN: 1791-9312*

# Τεχνητά νευρωνικά δίκτυα προσομοίωσης του ανθρωπίνου εγκεφάλου

# Artificial neural networks simulating human brain

**Αντωνία Πλέρου**
Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο
Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας
Υποψήφια Διδάκτωρ
Τμήμα Πληροφορικής, Ιόνιο Πανεπιστήμιο
tplerou@ionio.gr

**Περίληψη**
Η παρούσα εργασία πραγματεύεται τον κλάδο της επιστήμης που ασχολείται με τα νευρωνικά δίκτυα. Ξεκίνησε με σκοπό να δώσει απαντήσεις σε ερωτήματα σχετικά με το τι είναι νευρωνικά δίκτυα ώστε να γίνει συσχέτιση τους με τον εγκέφαλο και να εντοπιστούν κάποια από τα προβλήματα τα οποία μπορούν να λυθούν με την βοήθεια τους. Έπειτα από σύντομη εισαγωγή στην γνωσιακή επιστήμη αναφέρθηκαν οι διαφορές και ομοιότητες μεταξύ υπολογιστή και ανθρώπινου εγκεφάλου. Με αφορμή την περιγραφή της δομής ενός τεχνητού νευρώνα έγινε σύγκριση με τα βιολογικά νευρωνικά δίκτυα και δόθηκε η περιγραφή του μοντέλου του τεχνητού νευρώνα. Στο τέλος της εργασίας αναφέρθηκαν επιγραμματικά κάποιες από τις σημαντικότερες εφαρμογές των νευρωνικών δικτύων.

**Λέξεις κλειδιά**
*Τεχνητά νευρωνικά δίκτυα, εγκέφαλος, προσομοίωση*

**Abstract**
This paper discusses the industry of science that deals with neural networks. He started to give answers to questions about what are neural networks to make their relationship with the brain and to identify some of the problems can be solved with their help. After a brief introduction to cognitive science reported the differences and similarities between computer and human brain. Prompted by the description of the structure of an artificial neuron compared with biological neural networks and provided the description of the model of artificial neuron. At the end of the work mentioned briefly some of the most important applications of neural networks.

**Keywords**
*Artificial neural networks, brain, simulation*

## 1.1.Γενικά

Η αναπαράσταση της γνώσης και η προσαρμογή των σημασιολογικών περιγραφών αποτελεί πεδίο έρευνας τα τελευταία χρόνια και πολλά συστήματα έχουν προταθεί για το σκοπό αυτό. Οι δομικές διαφορές υπολογιστή και εγκεφάλου δεν εμποδίζουν την προσπάθεια να υποκατασταθούν κάποιες νοητικές λειτουργίες του εγκέφαλου από υπολογιστικό σύστημα όπως έχει ήδη γίνει για τους αριθμητικούς υπολογισμούς. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει η δυνατότητα αποδοτικότερης εργασίας με την χρήση ενός δυνατού εργαλείου που απαλλάσσει τον ανθρώπινο εγκέφαλο από χρονοβόρες νοητικές λειτουργίες επιτυγχάνοντας έτσι μεγαλύτερη ταχύτητα λογισμού. Στα πλαίσια αυτής της λογικής ξεκίνησε η πρόοδος του κλάδου της επιστήμης υπολογιστών ο οποίος ασχολείται με τη σχεδίαση και την υλοποίηση υπολογιστικών συστημάτων δηλαδή συστημάτων που επιδεικνύουν χαρακτηριστικά που σχετίζονται με τη νοημοσύνη στην ανθρώπινη συμπεριφορά και ονομάστηκε τεχνητή νοημοσύνη. Έτσι μέσα σε μια περίοδο τεχνολογικής ανάπτυξης άρχισε να υλοποιείται η ιδέα να κατασκευαστούν μηχανές, οι οποίες θα υιοθετούσαν ανθρώπινες συμπεριφορές και θα λειτουργούσαν με λογική σκέψη (Hassoun,1995).

**1.2.Γνωσιακή επιστήμη**

Η ιδέα ότι ο ανθρώπινος νους είναι ένας υπολογιστής, την λειτουργία του οποίου γίνεται κατανοητή μέσα από μια διαδικασία αντίστροφης μηχανής έχει φέρει στο προσκήνιο της γνωσιακής επιστήμης μια σειρά από θέματα που έχουν να κάνουν με την εξελικτική θεωρία και φυσικά την εξέλιξη του νου. Η εξελικτική θεωρία υποστηρίζει ότι τα ζωντανά ειδή δεν παραμένουν αμετάβλητα και σταθερά αλλά ότι αλλάζουν μέσα στο χρόνο (Haykin,1994). Οι λειτουργίες του εγκεφάλου φαίνεται να έχουν τροποποιηθεί με το πέρασμα του χρόνου μέσα από αλλεπάλληλες προσαρμοστικές μετατροπές. Πολλοί ψυχολόγοι και γνωσιακοί επιστήμονες πιστεύουν ότι η εξελικτική προσέγγιση συμβάλει στη κατανόηση της κατασκευαστικής δομής του ανθρώπινου εγκεφάλου κάνοντας με αυτό τον τρόπο δυνατή την κατασκευή της αντίστροφης μηχανής του νου.

Μια βασική μέθοδος έλεγχου θεωριών νοητικών λειτουργικών με τον υπολογιστή είναι η προσομοίωση (simulation). Η μέθοδος της προσομοίωσης προϋποθέτει τον προγραμματισμό ενός υπολογιστή ώστε να συμπεριφέρεται κατά το δυνατό πλησιέστερα προς ένα φυσικό σύστημα όπως ο εγκέφαλος όταν εκτελεί μια πνευματική ή νοητική λειτουργία. Το πρόγραμμα προσομοίωσης ονομάζεται και υπολογιστικό πρότυπο ή μοντέλο. Ένα υπολογιστικό πρότυπο μπορεί να προέρχεται από την υλοποίηση ενός μαθηματικού συστήματος εξισώσεων ή ενός αλγορίθμου. Με βάση τα παραπάνω πρότυπα έχουν γίνει διάφορες προσπάθειες κατασκευής ηλεκτρονικών συστημάτων που έχουν δομή ανάλογη με εκείνη του εγκεφάλου. Τα πλέον διαδεδομένα από αυτά τα συστήματα είναι τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα (State, Cocianu,Vlamos 2002).

**1.3.Διαφορές υπολογιστή και ανθρώπινου εγκεφάλου**

Πολλά από τα στοιχεία λειτουργίας του ανθρώπινου νου που έχουν γίνει έως τώρα γνωστά χρησιμοποιήθηκαν για τη προσομοίωση του ανθρώπινου εγκεφάλου από συστήματα τεχνητής νοημοσύνης. Το σημαντικότερο όμως εμπόδιο στην προσπάθεια προσομοίωσης του ανθρωπίνου εγκεφάλου από ένα λειτουργικό σύστημα είναι οι διαφορές στην αρχιτεκτονική και στην δομή αυτών των δυο συστημάτων.

- Μια από τις διαφορές των δυο συστημάτων είναι ότι υπάρχει διαφορετική ηλεκτρική λειτουργία και συνδεσιμότητα όπως επίσης και διαφορά ως προς την υλική κατασκευή.
- Επίσης υπάρχει διαφοροποίηση όσον αφορά την αναγνώριση προτύπων. Στον υπολογιστή η αναγνώριση γίνεται με βάση το περίγραμμα των αντικειμένων. Ειδικότερα ο υπολογιστής δεν διαθέτει σύστημα αναγνώρισης εικόνων συγκρίσιμο με το ανθρώπινο οπτικό σύστημα. Χαρακτηριστικό είναι ότι ο

ανθρώπινος εγκέφαλος μπορεί να εκτελέσει αναγνώριση προτύπων ή αλλιώς να αναγνωρίσει γνωστά πρόσωπα σε άγνωστα περιβάλλοντα χρειάζεται περίπου 100-200 χιλιοστά του δευτερολέπτου, ενώ ένας πολύ ισχυρός υπολογιστής θα χρειαζόταν ίσως ολόκληρες μέρες για να εκτελέσει μια τέτοια διαδικασία.

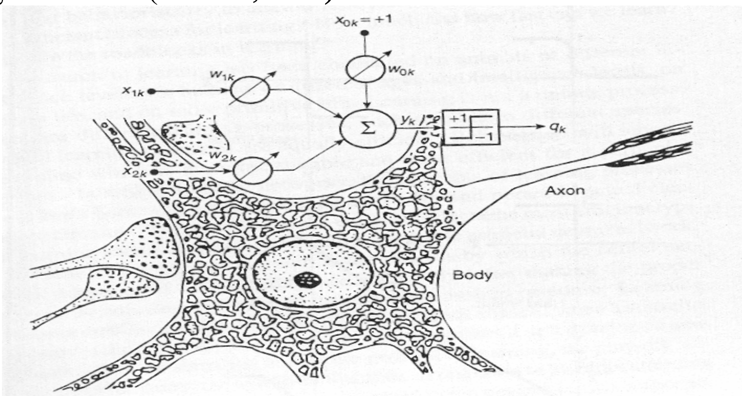
- Μια ακόμα διαφορά είναι ότι η καταχώρηση και η επεξεργασία πληροφοριών εκτελούνται στον υπολογιστή από σαφώς διακριτά συστήματα δηλαδή την μνήμη και την κεντρική μονάδα επεξεργασίας σε αντίθεση με τον εγκέφαλο.
- Επιπλέον ο υπολογιστής έχει την δυνατότητα πλήρους διαγραφής όλων των πληροφοριών από την μνήμη και την αποθήκευση νέων στοιχείων και προγραμμάτων σε αντίθεση με τον ανθρώπινο εγκέφαλο στον οποίο δεν θα ήταν ποτέ δυνατή μια τέτοια διαδικασία (Fausett, 1996).
- Τέλος ο υπολογιστής επιδεικνύει πολύ μεγάλη ακρίβεια εκτέλεσης αριθμητικών διαδικασιών και χαρακτηρίζεται από λειτουργική σταθερότητα σε αντίθεση με τον εγκέφαλο ο οποίος επηρεάζεται από οργανικούς, ψυχολογικούς αλλά και συναισθηματικούς παράγοντες. Έτσι ένα υπολογιστικό μηχάνημα δεν διαθέτει ούτε θα αποκτήσει λόγω αδυναμίας της σημερινής τεχνολογικής γνώσης ανθρώπινη συνείδηση.

## 2.Νευρωνικά δίκτυα

### 2.1.Από τα βιολογικά στα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα

Τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα ενώ προέρχονται ως φιλοσοφία από τα βιολογικά νευρωνικά δίκτυα είναι πιο απλοϊκά λόγο ανεπάρκειας τεχνολογιών. Τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα παρέχουν ένα εναλλακτικό μοντέλο το οποίο είναι εμπνευσμένο από τα βιολογικά μοντέλα σύμφωνα με το οποίο οι υπολογισμοί γίνονται παράλληλα και μαζικά και η εκπαίδευση αντικαθιστά την ανάπτυξη προγράμματος. Είναι μια προσπάθεια προσομοίωσης με την βοήθεια υπολογιστών του ανθρώπινου νευρικού συστήματος. Μελετώντας τα βιολογικά νευρωνικά δίκτυα που υπάρχουν στον ανθρώπινο εγκέφαλο παρατηρούμε ότι αποτελούνται επίσης από νευρώνες. Ο νευρώνας είναι το μικρότερο τμήμα του εγκεφάλου που είναι ικανό να επεξεργαστεί πληροφορίες και η ύπαρξη του διαφοροποιεί τα ζώα από τα φυτά (τα φυτά δεν έχουν νευρώνες). Τυπικά η επεξεργασία στους νευρώνες γίνεται 5 με 6 τάξεις μεγέθους πιο αργά από ότι στις σύγχρονες ψηφιακές λογικές πύλες. Ο χρόνος για τις ψηφιακές λογικές πύλες μετριέται σε δισεκατομμυριοστά του δευτερολέπτου (nanoseconds), ενώ για τους νευρώνες σε χιλιοστά του δευτερολέπτου (milliseconds) (Amit,1989). Όμως ο εγκέφαλος αντισταθμίζει την σχετικά αργή ταχύτητα λειτουργίας νευρώνων με τον πραγματικά τεράστιο αριθμό των μεταξύ τους συνδέσεων. Υπολογίζεται ότι υπάρχουν 10 δισεκατομμύρια νευρώνες και 60 τρισεκατομμύρια συνδέσεις στον φλοιό του ανθρώπινου εγκεφάλου, γεγονός που αποτελεί βασικό λόγο ανεπάρκειας του υπολογιστή για την απόλυτη προσομοίωση του με τον εγκέφαλο (Minsky,1969).

Οι βιολογικοί νευρώνες αποτελούνται από τρία βασικά τμήματα που είναι το σώμα, ο άξονας και οι δενδρίτες. Αναλυτικότερα οι δενδρίτες, λαμβάνουν σήματα από γειτονικούς νευρώνες. Τα σήματα αυτά είναι ηλεκτρικοί παλμοί που διαδίδονται μεταξύ του άξονα του νευρώνα πομπού και των δενδριτών του νευρώνα δέκτη με την βοήθεια χημικών διεργασιών. Το σημείο των χημικών διεργασιών, όπου ο άξονας ενός νευρώνα μεταδίδει το σήμα στους δενδρίτες του επόμενου λέγεται σύναψη. Αναφορικά αυτές οι διεργασίες μεταβάλλουν τα εισερχόμενα σήματα αλλάζοντας τη συχνότητα τους. Στην συνέχεια το σώμα αθροίζει τα εισερχόμενα σήματα και όταν αρκετά σήματα έχουν ληφθεί αποστέλλει το επεξεργασμένο σήμα στους γειτονικούς του νευρώνες μέσω του άξονα. Έτσι κάθε νευρώνας δέχεται πολλά σήματα ως είσοδο και μετά την επεξεργασία τους διαδίδει μόνο ένα σε όλους τους νευρώνες με τους οποίους συνδέεται (Golden,1996).




*Σχήμα 2.2.Αναλογία με το βιολογικό δίκτυο*

## 2.2.Τεχνητά νευρωνικά δίκτυα

Τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα αποτελούν μια προσπάθεια προσέγγισης της λειτουργίας του ανθρώπινου εγκεφάλου από μια μηχανή και έχουν την ικανότητα να εκτελούν υπολογισμούς με μαζικό παράλληλο τρόπο (Hopfield,1985). Το τεχνητό νευρωνικό δίκτυο είναι ένα μοντέλο επεξεργασίας πληροφοριών εμπνευσμένο από τον τρόπο με τον οποίο βιολογικά νευρικά συστήματα, όπως ο εγκέφαλος, επεξεργάζονται πληροφορίες. Το βασικό στοιχείο αυτού του μοντέλου είναι η πρωτότυπη δομή του συστήματος επεξεργασίας πληροφοριών. Τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα είναι μια συλλογή μεγάλου αριθμού συνδεδεμένων στοιχείων επεξεργασίας που ονομάζονται νευρώνες (Processing Units, Pus) οι οποίοι συνδέονται μεταξύ τους, λειτουργούν αρμονικά και είναι οργανωμένοι σε στρώματα (Layers). Κάθε PUs έχει πολλές εισόδους (Inputs) αλλά μόνο μια έξοδο (Output) η οποία με την σειρά της μπορεί να αποτελέσει είσοδο για άλλες PUs. Οι συνδέσεις μεταξύ των PUs διαφέρουν μεταξύ τους και η σπουδαιότητα τους προσδιορίζεται από τον συντελεστή βάρους για κάθε σύναψη. Η συνεργασία PUs καθορίζεται από την συνάρτηση μεταφοράς η οποία καθορίζει την κάθε έξοδο σε σχέση με τις εισόδους και τους συντελεστές βάρους. Η επεξεργασία κάθε νευρώνα καθορίζεται από την συνάρτησης ενεργοποίησης η οποία καθορίζει την έξοδο σε σχέση με τις εισόδους και τους συντελεστές βάρους (State, Vlamos 2000).

Για να χρησιμοποιηθεί ένα δίκτυο πρέπει αρχικά να περάσει την διαδικασία εκπαίδευσης. Η μάθηση περιλαμβάνει αλλαγές στις συναπτικές σχέσεις (βάρη) που περιέχονται μεταξύ των νευρώνων. Συγκεκριμένα ένα μέρος της εκπαίδευσης αποτελεί τη διαδικασία προσδιορισμού των καταλλήλων συντελεστών βάρους το οποίο πραγματοποιείται με την βοήθεια καταλλήλων αλγορίθμων. Έπειτα από αυτή την διαδικασία το ΤΝΔ είναι σε θέση να εκτελεί τους κατάλληλους υπολογισμούς για τους οποίους εκπαιδεύτηκε χρησιμοποιώντας έτσι την εμπειρική γνώση που απέκτησε. Ο ρόλος των συντελεστών μάθησης μπορεί να ερμηνευτεί ως αποθήκευση γνώσης, η οποία παρέχεται στο σύστημα με την βοήθεια παραδειγμάτων κάτι που ισχύει και στα βιολογικά νευρωνικά δίκτυα. Με αυτό τον τρόπο τα ΤΝΔ μαθαίνουν το περιβάλλον τους, ή με άλλα λόγια το φυσικό μοντέλο που παρέχει τα δεδομένα. Συνοψίζοντας καταλήγουμε στον παρακάτω ορισμό σύμφωνα με τους Aleksander και Morton (Aleksander,1990).

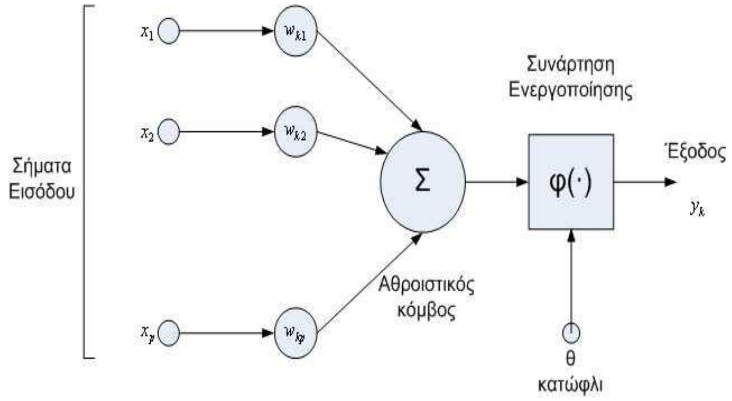
**Ορισμός :** Τεχνητό Νευρωνικό Δίκτυο είναι ένας παράλληλος κατανεμημένος επεξεργαστής που έχει μια φυσική κλίση στην αποθήκευση και απόδοση εμπειρικής γνώσης.

Μοιάζει με τον εγκέφαλο στα εξής:

1. Η γνώση λαμβάνεται από το δίκτυο μέσω μιας διαδικασίας εκπαίδευσης.
2. Η αποθήκευση της γνώσης γίνεται μέσω των βαρών που υπάρχουν στις συνδέσεις μεταξύ των νευρώνων (Amit,1989).

## 2.3.Το μοντέλο του τεχνητού νευρώνα

Ένας νευρώνας είναι μια μονάδα επεξεργασίας πληροφορίας, που είναι θεμελιακή για την λειτουργία ενός νευρωνικού δικτύου. Το σχήμα 2.3.1 δείχνει το μοντέλο ενός νευρώνα.




*Σχήμα 2.3.1. Η μορφή του τεχνητού νευρώνα (Amit,1989)*

Τα τρία βασικά στοιχεία αυτού του μοντέλου είναι:

1. Ένα σύνολο από συνάψεις ή συνδετικούς κρίκους, κάθε μια από τις οποίες χαρακτηρίζεται από ένα βάρος ή δύναμη. Συγκεκριμένα, ένα σήμα $x_j$ στην είσοδο της σύναψης j που συνδέεται στον νευρώνα k, πολλαπλασιάζεται με το συναπτικό βάρος $w_{kj}$. Ο πρώτος υποδείκτης αναφέρεται στον εν λόγο νευρώνα και ο δεύτερος στην είσοδο της σύναψης όπου αναφέρεται το βάρος. Το βάρος $w_{kj}$ είναι θετικό αν η σύναψη είναι διεγερτική δηλαδή ωθεί τον νευρώνα να αποκριθεί στη διέγερση ενώ αρνητικό αν η σύναψη είναι απαγορευτική δηλαδή αποτρέπει τον νευρώνα να παράγει μια απόκριση.
2. Ένας αθροιστικός κόμβος για την πρόσθεση των σημάτων εισόδου, που παίρνουν βάρος από την αντίστοιχη σύναψη. Αυτές οι λειτουργίες αποτελούν το γραμμικό συνδυαστή $u_k$.
3. Μια συνάρτηση ενεργοποίησης για τη μείωση του εύρους της εξόδου του νευρώνα (Amit,1989).

Το μοντέλο επίσης περιλαμβάνει μια εξωτερικά εφαρμοζόμενη πόλωση (κατώφλι) $\theta_k$, που έχει επίδραση στην ελάττωση της εισόδου στην εφαρμοζόμενη συνάρτηση ενεργοποίηση που ακολουθεί. Αντίθετα, η είσοδος του δικτύου μπορεί να αυξηθεί με την χρήση ενός όρου μεροληψίας, ο οποίος είναι ο αντίθετος από τη πόλωση (bias) (Hagan, 1995).

Παρακάτω θα συμβολίζονται με $x_j$ τα σήματα εισόδου, με $w_{kj}$ τα συναπτικά (synaptic) βάρη του νευρώνα και με $u_k$ τη γραμμική συνδυαστική έξοδο του. Επίσης θα συμβολίζονται με $\theta_k$ η πόλωση, με φ(.) η συνάρτηση ενεργοποίησης και με $y_k$ το

σήμα εξόδου του νευρώνα το οποίο αναφέρεται και ως πραγματική έξοδος (Hopfield, 1985).
Με μαθηματικούς όρους, ένας νευρώνας k περιγράφεται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$u_k = \sum_{j=1}^{p} w_{kj} x_j$$

Και

$$y_k = \varphi (u_k - \theta_k)$$

**2.4.Σοιχεία της θεωρίας μάθησης - Κανόνες μάθησης**

Ανάμεσα στις ιδιότητες ενός νευρωνικού δικτύου αυτή με την μεγαλύτερη σπουδαιότητα είναι η ικανότητα του να μαθαίνει από το περιβάλλον του και έτσι να βελτιώνει την απόδοση μέσω της μάθησης. Η βελτίωση αυτή γίνεται σταδιακά μέσω του χρόνου, σύμφωνα με κάποιο καθορισμένο μέτρο. Η μάθηση επαναλαμβάνεται μέσω μιας επαναληπτικής διαδικασίας ρυθμίσεων της τιμής των συναπτικών βαρών και των πολώσεων. Θεωρητικά το δίκτυο αποκτά περισσότερη γνώση για το περιβάλλον του μετά από κάθε επανάληψη της διαδικασίας μάθησης. Με τον όρο μάθησης και σύμφωνα με τον ορισμό των Mendel και McClaren (Mendel,1970).

***Μάθηση*** είναι μια διαδικασία σύμφωνα με την οποία προσαρμόζονται οι ελεύθεροι παράμετροι ενός νευρωνικού δικτύου μέσω μιας συνεχούς διαδικασίας ενεργοποίησης από το περιβάλλον στο όποιο βρίσκεται το δίκτυο. Το είδος της μάθησης καθορίζεται από τον τρόπο με τον οποίο πραγματοποιούνται οι αλλαγές των παραμέτρων (State,Vlamos 2000).

Ο παραπάνω ορισμός της μάθησης συνεπάγεται την ακόλουθη σειρά βημάτων:

1. το νευρωνικό δίκτυο δέχεται πληροφορίες από το περιβάλλον και ενεργοποιείται.
2. το νευρωνικό δίκτυο υφίσταται αλλαγές σαν συνέπεια αυτής της ενεργοποίησης.
3. το νευρωνικό δίκτυο απαντά με ένα καινούργιο τρόπο στο περιβάλλον, λόγω των αλλαγών που έγιναν στην εσωτερική δομή του (Kohonen 1989).

Ένα σύνολο από καλά ορισμένους κανόνες για την λύση ενός προβλήματος μάθησης καλείται **αλγόριθμος μάθησης**. Όπως είναι φανερό δεν υπάρχει μοναδικός τέτοιος αλγόριθμος για τον σχεδιασμό νευρωνικών δικτύων. Αντίθετα υπάρχει ένα σύνολο από εργαλεία που αναπαριστάνονται από μια μεγάλη ποικιλία μάθησης ο καθένας από τους οποίους έχει διαφορετικά πλεονεκτήματα. Κατά βάση οι αλγόριθμοι διαφέρουν στον τρόπο με τον οποίο προσαρμόζεται το βάρος κάθε σύναψης αλλά και με το τρόπο με τον οποίο το νευρωνικό δίκτυο επικοινωνεί με το περιβάλλον (Callan,1999).

**3.Εφαρμογές των νευρωνικών δικτύων**

**Αερόπλοια**: Δημιουργία αυτόματων πιλότων και πρόγραμμα προσομοίωσης, συστήματα ελέγχου πτήσης, ανίχνευση ελαττωμάτων σε τμήματα αεροπλάνων.

**Βιολογία**: Βοήθεια στην κατανόηση του εγκεφάλου και άλλων συστημάτων, δημιουργία μοντέλων αμφιβληστροειδούς χιτώνα και κοχλία.

**Γεωργία:** Ανάλυση πιθανότητας ύπαρξης πετρελαίου σε γεωλογικούς μετασχηματισμούς, ανάλυση πετρωμάτων σε ορυχεία, ανάλυση της μόλυνσης του περιβάλλοντος.

**Επιχειρήσεις:** Αξιολόγηση υποψηφίων για κάποια θέση, βελτιστοποίηση του συστήματος κρατήσεων σε μεταφορικά μέσα, αναγνώριση γραφικού χαρακτήρα.

**Ιατρική:** Ανάλυση ομιλίας για την κατασκευή ακουστικών βοηθημάτων, διάγνωση βασισμένη στα συμπτώματα, έλεγχος χειρουργείου, εξαγωγή συμπερασμάτων από ακτινογραφίες, ανάλυση καρδιογραφημάτων και εγκεφαλογραφημάτων, η αυτόματη διάγνωση ασθενειών, εντοπισμός καρκίνου σε κολονοσκοπήσεις και μαστογραφίες (Hopfield,1985).

**Κατασκευές:** Αυτόματος έλεγχος, έλεγχος γραμμής παραγωγής, έλεγχος ποιότητας, επιλογή τμημάτων και το στάδιο της συναρμολόγησης.

**Οικονομία:** Υπολογισμός κινδύνου για δάνεια και υποθήκες, έλεγχος πλαστογραφιών, μετάφραση χειρόγραφων εντύπων, εκτίμηση τιμών μετοχών και συναλλάγματος.

**Περιβάλλον:** Πρόγνωση καιρού, ανάλυση τάσεων και καιρικών συνθηκών.

**Άμυνα:** Χειρισμός μη επανδρωμένων οχημάτων και αεροπλάνων, αναγνώριση σημάτων από radar, συστήματα ανίχνευσης εισβολής (IDS -Intrusion Detection Systems), δημιουργία έξυπνων όπλων, αναγνώριση και σκόπευση στόχων, βελτιστοποίηση αξιοποίηση αποθεμάτων και κρυπτογραφία.

**Υπολογιστές:** Αναγνώριση ομιλίας, το OCR (Optical Character Recognition, Οπτική Αναγνώριση Χαρακτήρων), εντοπισμός φωνήεντων φθόγγων, μετατροπή κειμένου σε ομιλία, η ανίχνευση βλαβών στα επικοινωνιακά δίκτυα, δρομολόγηση πληροφοριών σε δίκτυα υπολογιστών (State, Cocianu, Vlamos 2005).

## Βιβλιογραφία

1. State L. & Vlamos P., (2000), “The POMDP modeling in the Analysis of Genetic Algorithms”, The Annals of Bucharest University XLIX.
2. State L., Cocianu C. & Vlamos P. ,(2005), “Neural Network for Principal Component Analysis with Applications in Image Compression”, Journal of Systemics, Cybernetics and Informatics.
3. State L., Cocianu C., Vlamos P. & Miroiu M.,(2002), “A specialized Neural Network for implementing the HMM approach in Learning the Bayesian Procedure”, 4th International Workshop on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing (SYNASC 02).
4. Amit, D. J., (1989), “Modeling Brain Functions: The World of Attractor Neural Networks”, Cambridge University Press, New York.
5. Callan, R., (1999), “The essence of Neural Networks”, Prentice Hall Europe.
6. Fausett, L., (1996), “Fundamentals of Neural Networks: Architectures, Algorithms and Applications”. Prentice Hall International.
7. Golden, R.., (1996), “Mathematical Methods for Neural Network Analysis and Design”. MIT Press.
8. Hagan, M. Demuth, H. and Beale M., (1995), “Neural Network Design”. International Thomson Publishing Company.
9. Hassoun, M. “Fundamentals of Artificial neural Networks”. MIT Press (1995).
10. Haykin S. . (1994), “Neural Networks, A Comprehensive Foundation”. Macmillan College Publishing Company Inc.
11. Hopfield, J. J. and Tank, D. W., (1985), “Neural computations of decisions in optimization problems”, Biological Cybernetics.
12. Kohonen, T., (1989), “Self-Organization and Associative Memory”, 3rd edition, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
13. Minsky, M. L. , Papert, S. A., (1969), “Perceptrons”, MIT Press, Cambridge, MA.
14. Aleksander, I., Morton H., (1990) , “An introduction to neural computing” Chapman and Hall.
15. Mendel, Mclaren , (1970), “Adaptive, learning, and pattern recognition systems: theory and applications”.

*Σημείωση*

*Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών «Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά» της Σχολής Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου και αποτελεί μέρος της*

*διπλωματικής εργασίας της συγγραφέως, η οποία εκπονήθηκε υπό την επίβλεψη του Δρ. Βλάμου Παναγιώτη, Επίκ. Καθηγητή Ιονίου Πανεπιστημίου, Τμήμα Πληροφορικής (vlamos@ionio.gr).*

*Open Education - The Journal for Open and Distance Education and Educational Technology*
*Volume 8, Number 1, 2012 Section one © Open Education ISSN: 1791-9312*

# Μελέτη της μη αγγειακής καρκινικής ανάπτυξης μέσω ενός πεπλατυσμένου σφαιροειδούς προτύπου

# A study of the avascular tumor growth by an oblate spheroidal model

**Αικατερίνη Χ Γραικού**
MSc Μαθηματικός
Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας
Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο και
ΓΕΛ Διαπολιτισμικής Εκπαίδευσης
Ευόσμου Θεσσαλονίκης
agraikou@sch.gr

## Περίληψη

Στη μάχη για την αντιμετώπιση του καρκίνου καλούνται τα μαθηματικά, σε συνεργασία με τη Βιολογία και την Κλινική Ιατρική, να αναπτύξουν θεωρητικά πλαίσια που να ενσωματώνουν και να ερμηνεύουν τα συνεχώς αυξανόμενα πειραματικά αποτελέσματα της Βιοτεχνολογίας και να δημιουργήσουν μοντέλα που θα ερμηνεύουν τους μηχανισμούς και θα προβλέπουν την εξέλιξη της νόσου. Πλήθος μαθηματικών προτύπων έχουν αναπτυχθεί τα τελευταία χρόνια, που μοντελοποιούν τις τρεις φάσεις της καρκινικής ανάπτυξης. Η μη αγγειακή φάση στα περισσότερα μοντέλα μελετάται σε σφαιρικό σχήμα γιατί στα in vitro πειράματα οι καλλιεργούμενοι όγκοι προσομοιάζουν σφαίρες. Υπάρχουν όμως όγκοι που θα μπορούσαν να περιγραφούν καλύτερα από μία γεωμετρία που παρέχει διπαραμετρική προσέγγιση του σχήματος τους, όπως η πεπλατυσμένη σφαιροειδής γεωμετρία. Η παρούσα εργασία εστιάζει στην περιγραφή των γενικών αρχών και φυσικών νόμων που διέπουν την ανάπτυξη ενός καρκινικού όγκου σε σχήμα πεπλατυσμένου σφαιροειδούς. Ο όγκος αναπτύσσεται υπό την επίδραση διαχεόμενων θρεπτικών συστατικών από το περιβάλλον, ενδογενών ανασταλτικών ουσιών που παράγονται από τη μεταβολική και αποσυνθετική διαδικασία των κυττάρων του καθώς και της πίεσης που έπεται από την ανάπτυξή του στο εσωτερικό πεπερασμένου φιλοξενούντος οργάνου. Κατά συνέπεια, το μαθηματικό πρόβλημα, το οποίο στην παρούσα εργασία αντιμετωπίζεται αναλυτικά, είναι ένα πρόβλημα ελευθέρου συνόρου με μερικές διαφορικές εξισώσεις.

## Abstract

In the ongoing battle against cancer mathematics are called upon, in collaboration with Biology and Clinical Medicine, to develop theoretical frameworks that incorporate and interpret the ever-increasing experimental results of biotechnology and to create models that explain the mechanisms and provide prognosis of the disease‘s progression. Numerous mathematical models have been developed in recent years, modeling the three stages of tumor development. In the majority of the studied models tumors are geometrically considered to develop in a spherical shape as in the in vitro experiments, cultivated tumors resemble spheres. There are tumors that could be described best by a geometry that provides two parameter approximation of their shape, such as the oblate spheroidal geometry. This paper focuses on describing the general principles and natural laws governing the development of an oblate spheroidal tumor. The tumor grows under the diffusion of nutrients from the external environment, the endogenous inhibitory substances produced by the metabolic, disintegrating process of cells and the consequent pressure following the development within a finite host tissue. Consequently, the mathematical problem, which in this paper is solved analytically, is a free boundary problem in partial differential equations.

**Keywords**
*oblate spheroid tumour, avascular tumour growth*

**1. Περί της γένεσης μη αγγειακών όγκων**

Ο καρκίνος είναι μία γενετική ασθένεια. Η ακτινοβολία και οι καρκινογόνες ουσίες δρουν υπέρ της καρκινογένεσης ακριβώς επειδή μπορούν να προκαλέσουν γενετικές βλάβες και αλλαγές στα κύτταρα. Οι βλάβες αυτές και οι μεταλλαγές με το πέρασμα του χρόνου συσσωρεύονται στο DNA του ατόμου. Το ανθρώπινο γονιδίωμα φέρει γονίδια που επιτελούν τη λειτουργία της ρύθμισης του πολλαπλασιασμού. Τα γονίδια αυτά ονομάζονται πρώτο – ογκογονίδια (Watson et al., 2007). Όταν το πρώτο – ογκογονίδιο μεταλλαχθεί μετατρέπεται σε ογκογονίδιο. Τα ογκογονίδια συνθέτουν πρωτεΐνες που λειτουργούν ως μεταγωγοί σημάτων στην αλυσίδα της ενεργοποίησης του κυτταρικού πολλαπλασιασμού μεταφέροντας συνεχώς ένα εσωτερικό σήμα χωρίς όμως να υπάρχει εξωτερικό ερέθισμα. Φυσική συνέπεια αυτού είναι το κύτταρο συνεχώς να πολλαπλασιάζεται δημιουργώντας θυγατρικά κύτταρα. Συμπληρωματικά, σε όλα τα ανθρώπινα κύτταρα υπάρχουν κάποια χρωμοσώματα με ογκοκατασταλτικά γονίδια, τα οποία αποτελούν μέρος ενός μηχανισμού που περιοδικά ρυθμίζει την κυτταρική διαίρεση, καταστέλλοντας την αντιγραφή του DNA. Προκειμένου να αναπτυχθεί ένας όγκος, οι πρωτεΐνες που συνθέτουν τα ογκογονίδια συνδέονται με αντίστοιχες ογκοκατασταλτικές και τις απενεργοποιούν. Κατά το σχηματισμό του όγκου δε συμβαίνει λοιπόν αύξηση της κυτταρικής διαίρεσης απλά δεν υπάρχει τρόπος τερματισμού αυτής.

Στα αρχικά στάδια την ανάπτυξής του, ο όγκος φαίνεται να λειτουργεί με βάση το μηχανισμό της απευθείας διάχυσης θρεπτικών συστατικών και αποβλήτων από και προς τον περιβάλλοντα ιστό. Ο όγκος μπορεί να ξεκινήσει ακόμη και από ένα μεμονωμένο μεταλλαγμένο κύτταρο. Το κύτταρο αυτό εφόσον θα έχει πρόσβαση σε οξυγόνο και γλυκόζη θα αρχίσει να διαιρείται, στην αρχή σε δύο κύτταρα, αυτά θα γίνουν τέσσερα, που με τη σειρά τους θα γίνουν οκτώ, δεκαέξι και ούτω καθεξής. Όταν ο όγκος είναι πολύ μικρός, κάθε κύτταρο λαμβάνει τροφή με απλή διάχυση και ο ρυθμός ανάπτυξης είναι εκθετικός ως προς το χρόνο. Αυτό το στάδιο ωστόσο, δε μπορεί να διατηρηθεί γιατί το θρεπτικό συστατικό καταναλώνεται και η συγκέντρωσή του ελαττώνεται στο κέντρο του όγκου. Τελικά η συγκέντρωση του ζωτικού θρεπτικού συστατικού και του οξυγόνου στο κέντρο πέφτει κάτω από το κρίσιμο για τη διατήρηση της κυτταρικής ζωής επίπεδο. Σε αυτή τη φάση οι περισσότεροι όγκοι προσπαθούν να αποφύγουν την απόπτωση μεταλλάσσοντας το γονίδιο p53.

Ο ρυθμός ανάπτυξης του όγκου εξασθενεί, δυσκολεύεται η απόκτηση τροφής και η αποβολή αποβλήτων μόνο μέσω διάχυσης. Την περίοδο αυτή αναπτύσσεται ο νεκρωτικός πυρήνας, που δεν περιέχει όμως μόνο νεκρά κύτταρα αλλά και υπολείμματα κυττάρων, κύτταρα που δεν μπόρεσαν να αποφύγουν την γήρανση, όπως και νεκρωτικά θραύσματα που βρίσκονται σε διάφορα στάδια αποσύνθεσης. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι παρόλη τη δυσχέρεια στην παροχή οξυγόνου τα καρκινικά κύτταρα έχουν αυξημένες πιθανότητες επιβίωσης γιατί καταστέλλουν την αναπνοή τους και δεν περνούν εύκολα στο στάδιο της γήρανσης. Έτσι, γύρω από το νεκρωτικό πυρήνα που βρίσκεται στο κέντρο του όγκου, βρίσκουμε μία περιοχή κυττάρων σε λήθαργο, κυττάρων που δε διαιρούνται αλλά είναι ζωντανά, ενώ το εξωτερικό περίβλημα με πάχος αρκετών κυτταρικών στρωμάτων περιέχει κύτταρα που μεγαλώνουν και διαιρούνται γιατί έχουν τη μέγιστη πρόσβαση σε πηγές θρεπτικού συστατικού και οξυγόνου.

Ο όγκος τελικά φτάνει μέχρι μόνο λίγα χιλιοστά σε διάμετρο. Η βασική διαπίστωση από τα in vitro πειράματα με καρκινικές σφαίρες είναι ότι μεγαλώνουν μέχρι να φτάσουν σε ένα κρίσιμο μέγεθος οπότε και η ανάπτυξή τους σταματά. Η ικανότητα των καρκινικών κυττάρων να αυξάνονται χωρίς έλεγχο δεν επαρκεί για τη συνεχιζόμενη ανάπτυξη του όγκου. Το κρίσιμο αυτό μέγεθος καθορίζεται από την ισορροπία ανάμεσα στον κυτταρικό πολλαπλασιασμό και στον κυτταρικό θάνατο μέσα στη σφαίρα. Οι βασικές πειραματικές παρατηρήσεις ήταν ότι όταν τα καρκινικά κύτταρα βρίσκονται σε υψηλής συγκέντρωσης θρεπτικό περιβάλλον πολλαπλασιάζονται, σε επίπεδα χαμηλής συγκέντρωσης πυροδοτούν κυτταρικό θάνατο ( απόπτωση ) και σε ενδιάμεσου επιπέδου θρεπτικών συστατικών παραμένουν αδρανή, σε λήθαργο. Τα διαφορετικά επίπεδα θρεπτικών συστατικών καθορίζονται από την κίνηση και την κατανάλωση των συστατικών μέσα στον όγκο.

## 2. Μοντελοποίηση μη αγγειακής καρκινικής ανάπτυξης – είδη μοντέλων

Από το 19$^{ο}$ αιώνα οι φυσικές επιστήμες γνωρίζουν αλματώδη ανάπτυξη χάρη στη μαθηματική μοντελοποίηση των φαινόμενων τους. Επόμενος στόχος των μαθηματικών φαίνεται να είναι οι βιολογικές επιστήμες. Σε ότι αφορά την αντικαρκινική έρευνα ειδικότερα, καινοτόμες τεχνικές που προέρχονται από τη μοριακή βιολογία έχουν φέρει στο φως πληθώρα νέων δεδομένων που για να αξιοποιηθούν θα πρέπει να ενταχθούν σε ένα θεωρητικό πλαίσιο, σε κάποιου είδους μηχανιστικό μοντέλο. Σε πρώτη φάση η μοντελοποίηση γίνεται με βάση τη βιολογική κλίμακα (Bellomo et al.). Αν το αντικείμενο εργασίας του μελετητή είναι οι εσωτερικές διεργασίες του κυττάρου, τα γονίδια, τα σήματα, ο πολλαπλασιασμός και η απόπτωση τότε μοντελοποιείται η υποκυτταρική κλίμακα. Αν αφορά τις αλληλεπιδράσεις των κυττάρων, είτε αυτές εμφανίζονται ανάμεσα σε κύτταρα του ιδίου ιστού, ανάμεσα σε καρκινικά, είτε ανάμεσα σε καρκινικά και κύτταρα του ιστού τότε προτυποποιείται η κυτταρική κλίμακα. Τέλος αν αφορά τις αλληλεπιδράσεις και τα φαινόμενα σε επίπεδο όγκου, πλέον, τότε μοντελοποιείται η μακροσκοπική κλίμακα.

Στην καρκινογένεση διακρίνουμε τρία στάδια το μη αγγειακό, το αγγειακό και το στάδιο της μετάστασης. Η μη αγγειακή φάση θεωρείται ότι μοντελοποιείται ευκολότερα από μαθηματικής απόψεως και η πλήρης κατανόηση της βοηθά την εξαγωγή συμπερασμάτων για τις επόμενες. Επιπλέον, πρόσφατα διατυπώθηκε η υπόθεση ότι υπάρχουν μικροί αδρανείς μη αγγειακοί όγκοι στο σώμα όλων των ανθρώπων (Roose, 2007). Η πλειονότητα των μη αγγειακών μαθηματικών μοντέλων εμπίπτει σε μία από δύο βασικές κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία περιέχει τα συνεχή μοντέλα. Αυτά εκφράζονται συνήθως με γραμμικές και μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Μελετούν συνεχείς κυτταρικούς πληθυσμούς, περιγράφουν τον τρόπο ανάπτυξης τους υπολογίζοντας τις μέσες τιμές των φυσικών παραμέτρων ή τις φυσικές σταθερές ανά στοιχειώδη όγκο. Κατά βάση συσχετίζουν την πυκνότητα του αριθμού των κυττάρων με χημικές ενώσεις που αποτελούν θρεπτικά συστατικά των κυττάρων, όπως για παράδειγμα η γλυκόζη ή το οξυγόνο, ή που επηρεάζουν τον κυτταρικό κύκλο. Για την περιγραφή των θρεπτικών συστατικών χρησιμοποιούνται εξισώσεις αντίδρασης – διάχυσης. Ως προς την κυτταρική κίνηση θεωρείται ότι τα κύτταρα είτε διαχέονται, είτε κινούνται σε ρεύματα είτε διαχέονται χημειοτακτικά.

Στα περισσότερα μοντέλα η ύπαρξη ενός μόνο θρεπτικού συστατικού αρκεί για να δηλώσει την κατάσταση των κυττάρων. Αν η συγκέντρωση του θρεπτικού συστατικού είναι μεγαλύτερη από μια κρίσιμη τιμή, τα κύτταρα πολλαπλασιάζονται ενώ αν είναι μικρότερη τα κύτταρα αδρανοποιούνται ή νεκρώνονται. Σε ένα μεγάλο όγκο δε μπορούμε να έχουμε ισοκατανομή θρεπτικού συστατικού. Οι όγκοι που μεγαλώνουν με βάση τη διάχυση θρεπτικών συστατικών κάποια στιγμή φτάνουν σε μία στάσιμη κατάσταση μηδενικής ανάπτυξης. Στην κατάσταση αυτή ο αριθμός των κυττάρων που πολλαπλασιάζονται ισούται με τον αριθμό των κυττάρων που πεθαίνουν.

Η δεύτερη κατηγορία μαθηματικών μοντέλων περιλαμβάνει τα διακριτά μοντέλα των κυτταρικών πληθυσμών. Τα μοντέλα αυτά, χάρη στην ανάπτυξη της βιοτεχνολογίας, καταφέρνουν να μελετήσουν τις διεργασίες και διαδικασίες που λαμβάνουν χώρα στην κυτταρική κλίμακα και στη συνέχεια τις ανάγουν στη μακροσκοπική. Διάφορες τεχνικές χρησιμοποιούνται για την αναγωγή αυτή με πιο δημοφιλείς να είναι τα κυτταρικά αυτόματα, οι μέθοδοι πλέγματος του Boltzman, οι στοχαστικές, η εκτεταμένη του Potts κ.α. Στις τεχνικές αυτές η κατάσταση του κυττάρου χαρακτηρίζεται από μία διανυσματική μεταβλητή με την οποία καθορίζεται η θέση του κυττάρου, η ταχύτητά του και η εσωτερική βιολογική του κατάσταση. Η εσωτερική βιολογική κατάσταση ορίζεται ως ένα διάνυσμα που ουσιαστικά καθορίζει σε ποια θέση του βιολογικού του κύκλου βρίσκεται το κύτταρο, πως αλληλεπιδρά με το βιολογικό περιβάλλον του και διάφορες άλλες συναφείς έννοιες.

Οι μηχανικές αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στα κύτταρα εξαρτώνται από τη θέση και την ταχύτητά τους. Οι κινήσεις αυτές δεν περιγράφονται από τους γνωστούς φυσικούς νόμους της δύναμης και της ταχύτητας αλλά με κανόνες του μοντέλου. Τα μοντέλα των αυτομάτων παρουσιάζουν το πλεονέκτημα να μπορούν εύκολα να περιγράφουν πληθυσμούς που απαρτίζονται από διαφορετικά είδη κυττάρων. Αυτό συμβαίνει γιατί στα μοντέλα αυτά οι βιοχημικοί μηχανισμοί των φυσιολογικών κυττάρων αντιστοιχίζονται στις μεταβλητές που περιγράφουν την εσωτερική κατάσταση του κυττάρου του αυτομάτου. Μεγάλη δυσκολία στα μοντέλα των αυτομάτων συναντάται όταν χρειάζεται να περιγραφεί η κυτταρική κίνηση με ρεαλιστικό τρόπο. Η μοντελοποίηση της κίνησης γίνεται σε δύο βήματα. Στο πρώτο βήμα αποφασίζεται ο τρόπος διαμερισμού του φυσικού χώρου σε κελιά αυτομάτων. Στο δεύτερο βήμα αποφασίζεται κατά πόσο το πλέγμα που δημιουργείται από το διαμερισμό του φυσικού χώρου θα παραμένει σταθερό στο χρόνο ή θα μεγαλώνει και θα κινείται ακολουθώντας την κίνηση των κυττάρων.

## 3. Μία σύντομη ιστορική αναδρομή στην προτυποποίηση μη αγγειακών σφαιρικών όγκων

Η δουλειά του Hill πάνω στη διάχυση σε ιστούς το 1928, αποτελεί το εναρκτήριο λάκτισμα για τη μοντελοποίηση συμπαγών όγκων (Araujo et al, 2004). Αν και δεν ασχολήθηκε άμεσα με τις νεοπλασίες, ο Hill αντιλήφθηκε ότι η διάχυση διαλυμένων ουσιών μέσα σε κύτταρα και ιστούς χαρακτηρίζει πολλές βιολογικές διαδικασίες, όπως τη διάχυση του οξυγόνου σε στερεά, και προσπάθησε να προσεγγίσει αρκετές από αυτές μέσω των μαθηματικών.

Ένα πλήρες μοντέλο διάχυσης οξυγόνου σε σφαιρικό όγκο παρείχε ο Burton το 1966. Το συγκεκριμένο μοντέλο, εκτός από την κατανομή του οξυγόνου στον όγκο, υπολόγιζε και το λόγο της σχετικής ακτίνας του νεκρωτικού πυρήνα προς την ακτίνα του όγκου, λόγος που την εποχή εκείνη χρησιμοποιούνταν για την επαλήθευση της εξίσωσης του Gompertz από την καμπύλη ανάπτυξης του όγκου. Ο Burton δέχτηκε τη θεωρία του Mayneord περί νεκρωτικού πυρήνα, μοντελοποίησε τις επιδράσεις ενός ελαττωμένου κλάσματος ανάπτυξης διατηρώντας το ρυθμό πολλαπλασιασμού των ζωντανών κυττάρων σταθερό και θεώρησε την κατανάλωση οξυγόνου ανά μονάδα όγκου ανεξάρτητη της τάσης του οξυγόνου, εκτός από την κρίσιμη τιμή για την οποία αρχίζει η νέκρωση. Ο Burton θεώρησε γραμμική ανάπτυξη του όγκου, ξεπερνώντας τους περιορισμούς του Gompertz, ευθυγραμμίστηκε όμως πλήρως με τα πειραματικά δεδομένα της εποχής του που υποστήριζαν τη γραμμική ανάπτυξη.

Τα πειραματικά δεδομένα στη δεκαετία του 1970, δείχνουν ότι οι όγκοι που δεν αποκτούν δικό τους δίκτυο αιμοφόρων αγγείων, δε μεγαλώνουν πέρα από μία διάμετρο 3 – 4 mm, ακόμη και αν έχουν πλεόνασμα τροφής και χώρου ( Folkman and Hochberg 1973 ). Το 1972 ο Greenspan επιχειρεί μία επέκταση στα μοντέλα του Burton του 1966 και των Thomlinson – Gray του 1955. Εισάγει επιφανειακή τάση ανάμεσα στα ζωντανά κύτταρα για να εξασφαλίσει τη διατήρηση της κυτταρικής αποικίας ως μία συμπαγή μάζα σταθερού όγκου (Greenspan, 1972). Υποθέτει ότι τα υπολείμματα της νέκρωσης διασπώνται σε πιο απλά χημικά συστατικά που μπορούν ελεύθερα να διαπερνούν τις κυτταρικές μεμβράνες. Με τον τρόπο αυτό οι απώλειες λόγω νέκρωσης αντισταθμίζονται με την εισροή κυττάρων από την επιφάνεια του όγκου, ως αποτέλεσμα των δυνάμεων προσκόλλησης ανάμεσα στα κύτταρα και της επιφανειακής τάσης. Με τον τρόπο αυτό, ο Greenspan εξήγησε το γεγονός ότι οι όγκοι φτάνουν σε σταθερό μέγεθος. Υπέθεσε επίσης ότι κάποια στιγμή, μέσα στον όγκο, παράγεται ένα χημικό συστατικό που όταν η συγκέντρωσή του φτάσει μια δεδομένη τιμή, εμποδίζει τον πολλαπλασιασμό των κυττάρων χωρίς όμως να τα νεκρώνει. Το πρότυπο του Greenspan περιλάμβανε μία ολοκληρωτικοδιαφορική εξίσωση που περίγραφε την εξέλιξη της ακτίνας του όγκου και μια εξίσωση διάχυσης για την περιγραφή της συγκέντρωσης του θρεπτικού συστατικού και του αναστολέα.

Ο Greenspan στη συνέχεια επέκτεινε το μοντέλο του 1972 προκειμένου να μελετήσει τη σταθερότητα ενός σφαιρικού όγκου που βρίσκεται σε κατάσταση αδράνειας όταν υποστεί ασύμμετρες διαταραχές. Η ανάγκη για κάτι τέτοιο γεννήθηκε στον Greenspan ύστερα από πειράματα του Sutherland, στα οποία ο οι κυτταρικοί όγκοι διαλύονταν σε κάποιο ενδιάμεσο στάδιο ανάπτυξης. Ο όγκος διατηρούσε το σχηματισμό που είχε και στο προηγούμενο μοντέλο, με το νεκρωτικό πυρήνα να καταλαμβάνει το μεγαλύτερο μέρος του ενώ τα πολλαπλασιαζόμενα κύτταρα περιορίζονταν σε ένα μικρό στρώμα κοντά στην επιφάνεια. Όρισε ως « βασική κατάσταση κίνησης » τις λύσεις των εξισώσεων πίεσης, συγκέντρωσης θρεπτικού συστατικού και την ακτίνα του εξωτερικού συνόρου, στη συνέχεια μελέτησε διάφορες διαταραχές από τη βασική κατάσταση οπότε κατέληξε στο συμπέρασμα ότι όσο μεγαλύτερος γινόταν ένας όγκος τόσο πιο ασταθής ήταν. Για να ελέγξει αν ένας όγκος μπορούσε να φτάσει σε σταθερή κατάσταση μετά την εφαρμογή των διαταραχών, χρησιμοποίησε μια συνάρτηση δύο παραμέτρων του μοντέλου. Ως παράμετροι του μοντέλου λογίζονταν η συγκέντρωση του εξωτερικού θρεπτικού, ο ρυθμός πολλαπλασιασμού, ο ρυθμός κατανάλωσης του θρεπτικού, ο ρυθμός απώλειας νεκρωτικού όγκου και μια παράμετρος που σχετιζόταν με την επιφανειακή τάση.

Ο Deakin το 1975 επέκτεινε τα μοντέλα των Burton και Greenspan ώστε να περιλαμβάνουν μη σταθερή κατανάλωση οξυγόνου στον όγκο. Στο μοντέλο του η κατανάλωση του οξυγόνου ήταν ανάλογη της συγκέντρωσής του. Πάνω από κάποια κρίσιμη τιμή η συγκέντρωση του οξυγόνου θεωρούνταν σταθερή και κάτω από έτερη κρίσιμη τιμή δεν υπήρχε κατανάλωση οξυγόνου. Η επέκταση αυτή θεωρήθηκε αναγκαία προκειμένου τα μοντέλα των Burton και Greenspan να εναρμονιστούν με τα πειραματικά αποτελέσματα των Sutherland – Durand στα οποία αποδεικνυόταν ότι μετά από την έναρξη της νέκρωσης η πυκνότητα του εξωτερικού στρώματος των πολλαπλασιαζόμενων κυττάρων μειωνόταν σχετικά αργά. Συμπληρωματικό του μοντέλου του Deakin μπορεί να θεωρηθεί αυτό των McElwain – Ponzo του 1977 που διερευνά την επίδραση της ανόμοιας κατανομής του οξυγόνου στη συνολική ανάπτυξη του όγκου και όχι μόνο στο εξωτερικό στρώμα των πολλαπλασιαζόμενων κυττάρων.

Στην προτυποποίηση την μη αγγειακής καρκινικής ανάπτυξης της δεκαετίας του 1980 κυριαρχεί το όνομα του Adam. Στην εργασία του 1986, ο Adam αφού έλαβε υπόψη του όλα τα πειραματικά ευρήματα των προηγούμενων ετών, τα συσχετιζόμενα με τους αναστολείς και την επίδρασή τους στην ανάπτυξη των όγκων, θεώρησε μία χωρική συνάρτηση ελέγχου για τη μίτωση, κρίνοντας ότι αυτή ανταποκρίνεται καλύτερα στα πειραματικά δεδομένα. Ο Adam ήθελε να ελέγξει πόσο ευαίσθητο ήταν το μοντέλο του Glass σε παραγωγή αναστολέα που ήταν χωρικά μη ομοιόμορφη. Για το λόγο αυτό θεώρησε μία φθίνουσα γραμμική συνάρτηση για την απόσταση από το κέντρο του ιστού. Προκειμένου να συγκρίνει άμεσα το μοντέλο του με το αντίστοιχο του Glass του 1973, ο Adam έκανε τις ίδιες παραδοχές με το Glass με στόχο να χαρακτηρίσει τις συνθήκες της μη σταθερής καρκινικής ανάπτυξης. Έτσι το μοντέλο του Adam πρόσφερε κάτι από τη μοντελοποίηση του Glass και από την αντίστοιχη του Greenspan στο μονοδιάστατό του μοντέλο. Σε αντιδιαστολή όμως με το μοντέλο του Glass το μοντέλο του Adam σε μια δεδομένη τιμή της αδιάστατης μεταβλητής, έστω $n_o$, αντιστοίχιζε ένα συγκεκριμένο εύρος από μεγέθη όγκων σε σταθερή κατάσταση, εύρος που αυξανόταν μονότονα με την τιμή της n. Έτσι αποδεικνυόταν ότι η ανάπτυξη του όγκου εξαρτιόταν από τη χωρική ανομοιομορφία του αναστολέα.

Στη συνέχεια ο Adam επέκτεινε το μοντέλο του για να εξετάσει πέρα από το ρόλο του ανομοιόμορφου χωρικά αναστολέα και το ρόλο της γεωμετρίας στην ευστάθεια της καρκινικής ανάπτυξης. Για να μπορέσει να κάνει συγκρίσεις με το μοντέλο των Shymko – Glass του 1976 χρησιμοποίησε τρία διαφορετικά ως προς τη γεωμετρία μοντέλα. Το ένα μοντέλο αποτελούνταν από ένα λεπτό κυλινδρικό σωλήνα όπου η συγκέντρωση του αναστολέα ήταν συνάρτηση της αξονικής απόστασης από το κέντρο του σωλήνα, το δεύτερο από ένα λεπτό κυλινδρικό δίσκο όπου η συγκέντρωση του αναστολέα εκφραζόταν συναρτήσει της ακτινικής απόστασης από το κέντρο του δίσκου, το τρίτο μοντέλο αποτελούσε μία σφαίρα στην οποία η συγκέντρωση του αναστολέα εξαρτώταν από την ακτινική απόσταση από το κέντρο της σφαίρας. Αν και τα τρία μοντέλα έδιναν σε ορισμένα χαρακτηριστικά κοινά αποτελέσματα, κάθε γεωμετρικός σχηματισμός έδινε διαφορετική σχέση ανάμεσα στην αδιάστατη μεταβλητή n και το μέγεθος του όγκου στη σταθερή κατάσταση, πράγμα που σημαίνει ότι σχετίζεται η γεωμετρία του όγκου με τη σταθερότητά του.

Μία πολύ ενδιαφέρουσα περίπτωση μοντέλου τα πρόσφατα χρόνια, είναι αυτή του Franks κ.α. του 2003. Αφορά ένα καρκίνωμα του επιθηλίου του πόρου του στήθους. Το μοντέλο εφαρμόζει πολλές από τις μεθόδους των Ward – King σε κυλινδρική γεωμετρία. Ο όγκος αναπτύσσεται κάτω από τον πόρο, εκεί που θεωρητικά βρίσκει μικρότερη αντίσταση, ενώ το πόσο θα αναπτυχθεί εξαρτάται κυρίως από τη διαθέσιμη ποσότητα του θρεπτικού. Η κίνηση των κυττάρων περιγράφεται από τον τύπο του Stokes για τη ροή. Για την περιγραφή της συγκέντρωσης των ζωντανών και νεκρών κυττάρων, της συγκέντρωσης του υγρού μέσα στον πόρο, της συγκέντρωσης του θρεπτικού, για της τοπικής ταχύτητας και πίεσης χρησιμοποιούνται μη γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις. Με το μοντέλο αυτό μελετήθηκε η επίδραση που μπορεί να έχει το ιξώδες του ιστού στο σχήμα του εξωτερικού συνόρου του όγκου όπως επίσης η έκταση μέχρι την οποία τα κύτταρα προσκολλώνται στο τοίχωμα του πόρου.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε ένα αναλυτικό μαθηματικό μοντέλο μη συμμετρικής ανάπτυξης ενός καρκινικού όγκου, στη μη αγγειακή φάση, σε πεπλατυσμένη σφαιροειδή γεωμετρία (Γραικού, 2011).

**4. Διατύπωση του προβλήματος**

Θεωρούμε πέντε διαδοχικά ομοεστιακά πεπλατυσμένα σφαιροειδή τα οποία προτυποποιούν τις περιοχές του καρκινικού όγκου με τον τρόπο που ακολούθως περιγράφεται:

Ο εσωτερικός σφαιροειδής πυρήνας

$$\Omega_n = \{(\lambda,\zeta,\phi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le \lambda < \lambda_n,\ \ -1 \le \zeta \le 1,\ \ 0 \le \phi < 2\pi\}$$

προτυποποιεί το νεκρωτικό πυρήνα όπου η συγκέντρωση των θρεπτικών συστατικών $\sigma(\mathbf{r})$ είναι μικρότερη της κρίσιμης τιμής $\sigma_2$, $\sigma(\mathbf{r})<\sigma_2$ , που εξασφαλίζει την επιβίωση των κυττάρων.

Ο σφαιροειδής φλοιός

$$\Omega_q = \{(\lambda,\zeta,\phi) \in \mathbb{R}^3 : \lambda_n < \lambda < \lambda_q,\ \ -1 \le \zeta \le 1,\ \ 0 \le \phi < 2\pi\}$$

προτυποποιεί το φλοιό των ζωντανών αλλά αδρανών κυττάρων, όπου η συγκέντρωση των θρεπτικών συστατικών $\sigma(\mathbf{r})$ είναι μεγαλύτερη της κρίσιμης τιμής $\sigma_2$ αλλά μικρότερη της κρίσιμης τιμής $\sigma_1$, $\sigma_2<\sigma(\mathbf{r})<\sigma_1$ η οποία εξασφαλίζει τη δυνατότητα πολλαπλασιασμού των κυττάρων.

Ο σφαιροειδής φλοιός

$$\Omega_{p_-} = \{(\lambda,\zeta,\phi) \in \mathbb{R}^3 : \lambda_q < \lambda < \lambda_{p_-},\ \ -1 \le \zeta \le 1,\ \ 0 \le \phi < 2\pi\}$$

προτυποποιεί το φλοιό των ζωντανών αλλά ακόμα αδρανών κυττάρων, όπου η συγκέντρωση των θρεπτικών συστατικών $\sigma(\mathbf{r})$ είναι μεγαλύτερη της κρίσιμης τιμής $\sigma_1$, $\sigma(\mathbf{r})>\sigma_1$ και επιτρέπει τον πολλαπλασιασμό των κυττάρων, αλλά η παρουσία συγκέντρωσης ανασταλτικού παράγοντα $\beta(\mathbf{r})$ με τιμή μεγαλύτερη από την κρίσιμη τιμή $\beta_1$ , $\beta(\mathbf{r})>\beta_1$, αποτρέπει τελικά τη δυνατότητα πολλαπλασιασμού των κυττάρων.

Ο σφαιροειδής φλοιός

$$\Omega_{p_+} = \{(\lambda,\zeta,\phi) \in \mathbb{R}^3 : \lambda_{p_-} < \lambda < \lambda_{p_+},\ \ -1 \le \zeta \le 1,\ \ 0 \le \phi < 2\pi\}$$

προτυποποιεί το φλοιό των ζωντανών και πολλαπλασιαζόμενων κυττάρων, όπου η συγκέντρωση των θρεπτικών συστατικών $\sigma(\mathbf{r})$ είναι μεγαλύτερη της κρίσιμης τιμής $\sigma_1$, $\sigma(\mathbf{r})>\sigma_1$, και η συγκέντρωση του ανασταλτικού παράγοντα $\beta(\mathbf{r})$ είναι μικρότερη από την κρίσιμη τιμή $\beta_1$, $\beta(\mathbf{r})<\beta_1$ και ο πολλαπλασιασμός των κυττάρων καθίσταται δυνατός.

Τέλος, ο σφαιροειδής φλοιός

$$\Omega_e = \{(\lambda,\zeta,\phi) \in \mathbb{R}^3 : \lambda_{p_+} < \lambda < R,\ \ -1 \le \zeta \le 1,\ \ 0 \le \phi < 2\pi\}$$

προτυποποιεί το εξωτερικό περιβάλλον του καρκινικού όγκου, που περιορίζεται από τη σφαιροειδή επιφάνεια $S_e : \lambda = R$

Το ζητούμενο για τον όγκο αυτό είναι να υπολογιστούν η συνάρτηση τροφής σ, η συνάρτηση του αναστολέα ανάπτυξης β, η συνάρτηση πίεσης $P$ σε καθένα από τα $\Omega_i$ και στη συνέχεια να παραχθεί η εξίσωση εξέλιξης του εξωτερικού συνόρου του όγκου. Στην παρούσα εργασία γίνεται η ενδεικτική παραγωγή κάποιων ΜΔΕ και συνοριακών συνθηκών σε επιλεγμένα τμήματα του όγκου και δίνεται η τελική εξίσωση εξέλιξης του εξωτερικού συνόρου του όγκου, ενώ για τη συνολική επίλυση του προβλήματος κάποιος μπορεί να αποταθεί στη διπλωματική εργασία (Γραικού, ΕΑΠ, 2011 ).

**5. Ενδεικτική Παραγωγή Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων και συνοριακών συνθηκών στον όγκο**

Η παραγωγή των μερικών διαφορικών εξισώσεων σε κάθε όγκο και για κάθε μία από τις ποσότητες *σ*, *β*, *P* βασίζεται στο νόμο διατήρησης της μάζας, στο νόμο διάχυσης του Fick και για την πίεση ειδικά σε μια επέκταση του νόμου του Darcy. Ενδεικτικά περιγράφονται κάποιες περιπτώσεις.

**Α(α). Παραγωγή μερικής διαφορικής εξίσωσης της συγκέντρωσης τροφής στον όγκο $\Omega_{p_+}$**

Από το νόμο διατήρησης της μάζας της συγκέντρωσης του θρεπτικού συστατικού προκύπτει ότι η μάζα που στη μονάδα του χρόνου ρέει έξω από το $\Omega_{p_+}$, $J_{\varepsilon\xi}\ \mathbf{r}$ , ισούται με τη μάζα που στην ίδια μονάδα χρόνου εισέρχεται στο $\Omega_{p_+}$, $J_{\varepsilon\iota\sigma}\ \mathbf{r}$ ελαττωμένη κατά το ποσό της μάζας που καταναλώνεται μέσα στο $\Omega_{p_+}$, δηλαδή

$$\int_{\partial\Omega_{p_+}} -\hat{\mathbf{n}}\ \cdot J_{\varepsilon\iota\sigma}\ \mathbf{r}\ ds = \int_{\Omega_{p_+}} -\hat{\mathbf{n}}\ \cdot J_{\varepsilon\xi}\ \mathbf{r}\ dv + \int_{\Omega_{p_+}} f\frac{\sigma_1}{\sigma_\infty}\,dv \qquad (1)$$

όπου $\partial\Omega_{p_+}$ είναι το σύνορο του $\Omega_{p_+}$, $\hat{\mathbf{n}}$ το εξωτερικό κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στο σύνορο, $f\dfrac{\sigma_1}{\sigma_\infty}$ ο ρυθμός κατανάλωσης του θρεπτικού και *f* σταθερά αναλογίας. Με δεδομένο ότι η ροή του θρεπτικού κατευθύνεται μονότονα προς το εσωτερικό του όγκου, το θρεπτικό εισέρχεται από την επιφάνεια $S_{p_+}$ και εξέρχεται από την $S_{p_-}$. Η ροή του θρεπτικού περιγράφεται από το νόμο του Fick, κατευθύνεται συνεπώς προς τις περιοχές της μικρότερης συγκέντρωσης $J\ \mathbf{r} = -k\nabla\sigma\ \mathbf{r}$ , όπου $k$ η θετική σταθερά διάχυσης του θρεπτικού συστατικού. Η αντικατάσταση στην ( 1 ) δίνει

$$\int_{S_{p_+}} \hat{\mathbf{n}}\cdot k\nabla\sigma\ \mathbf{r}\ ds = \int_{S_{p_-}} \hat{\mathbf{n}}\cdot k\nabla\sigma\ \mathbf{r}\ dv + \int_{\Omega_{p_+}} f\frac{\sigma_1}{\sigma_\infty}dv$$

Από το θεώρημα του Gauss έχουμε

$$\int_{S_{p_+}} \hat{\mathbf{n}}\cdot k\nabla\sigma\ \mathbf{r}\ ds - \int_{S_{p_-}} \hat{\mathbf{n}}\cdot k\nabla\sigma\ \mathbf{r}\ dv = \int_{\Omega_{p_+}} k\Delta\sigma\ \mathbf{r}\ dv \Rightarrow$$

$$\int_{\Omega_{p_+}} k\Delta\sigma\ \mathbf{r}\ dv = \int_{\Omega_{p_+}} f\frac{\sigma_1}{\sigma_\infty}dv \Rightarrow \int_{\Omega_{p_+}} \left[k\Delta\sigma\ \mathbf{r}\ - f\frac{\sigma_1}{\sigma_\infty}\right]dv = 0 \Rightarrow$$

$$k\Delta\sigma\ \mathbf{r}\ - f\frac{\sigma_1}{\sigma_\infty} = 0 \Rightarrow \Delta\sigma\ \mathbf{r}\ = \frac{f}{k}\frac{\sigma_1}{\sigma_\infty}$$

Θεωρώ μία σταθερά αναλογίας *F* η οποία να ενσωματώνει τα $f, k$ οπότε η Μερική Διαφορική Εξίσωση για $\mathbf{r}\in\Omega_{p_+}$ είναι $\Delta\sigma\ \mathbf{r}\ = \dfrac{F\sigma_1}{\sigma_\infty}$

**Α(β). Παραγωγή συνοριακής συνθήκης της συγκέντρωσης τροφής στην επιφάνεια $S_{p_+}$.**

Θεωρούμε στοιχειώδη κύλινδρο όγκου $dv$, με βάσεις $S^+$, $S^-$, εμβαδού βάσης $ds$ η οποία διαπερνά τη συνοριακή επιφάνεια $S_{p_+}$ έτσι ώστε ύψος $\frac{h}{2}$ του κυλίνδρου να βρίσκεται ένθεν και ένθεν της επιφάνειας. Από το νόμο διατήρησης της μάζας μέσα στον κύλινδρο προκύπτει ότι η μάζα του θρεπτικού που εισέρχεται στον κύλινδρο μείον τη μάζα που καταναλώνεται μέσα στον κύλινδρο μείον τη μάζα που εξέρχεται, όλο αυτό μας δίνει τη μεταβολή της μάζας του θρεπτικού εντός του κυλίνδρου.
Συμβολικά

$$\int_{S_-}\hat{\mathbf{n}}\cdot k\nabla\sigma_{\varepsilon\iota\sigma}(\mathbf{r})\,ds-\int_V\Gamma dv-\int_{S_+}\hat{\mathbf{n}}\cdot k\nabla\sigma_{\varepsilon\xi}(\mathbf{r})\,ds=\int_V\frac{\partial\sigma}{\partial t}dv$$

Για $h\to 0$ ο στοιχειώδης όγκος μηδενίζεται, οι δύο βάσεις συμπίπτουν οπότε

$$\int_{S_{p_+}}\left[\hat{\mathbf{n}}\cdot k\nabla\sigma_{\varepsilon\iota\sigma}(\mathbf{r})-\hat{\mathbf{n}}\cdot k\nabla\sigma_{\varepsilon\xi}(\mathbf{r})-\Gamma_{s_{p_+}}\right]ds=0$$

και από το θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού προκύπτει

$$\hat{\mathbf{n}}\cdot k\nabla\sigma_{\varepsilon\iota\sigma}(\mathbf{r})-\hat{\mathbf{n}}\cdot k\nabla\sigma_{\varepsilon\xi}(\mathbf{r})-\Gamma_{s_{p_+}}=0\Rightarrow\hat{\mathbf{n}}\cdot k\nabla\sigma_{\varepsilon\iota\sigma}(\mathbf{r})-\hat{\mathbf{n}}\cdot k\nabla\sigma_{\varepsilon\xi}(\mathbf{r})=\Gamma_{s_{p_+}}$$

$$\Rightarrow\hat{\mathbf{n}}\cdot k\nabla\sigma_{p_+}(\mathbf{r})-\hat{\mathbf{n}}\cdot k\nabla\sigma_{e}(\mathbf{r})=\Gamma_{s_{p_+}}$$

όπου με $\Gamma_{sp+}$ συμβολίζεται ο επιφανειακός ρυθμός κατανάλωσης του θρεπτικού.
Αν επιλέξουμε τη μορφή του ρυθμού κατανάλωσης κατάλληλα,

$$\Gamma_{s_{p_+}}=\frac{-\gamma s_p\sqrt{\lambda_{p_+}^2+\zeta^2}}{\sqrt{1+\lambda_{p_+}^2}}$$

η τελευταία σχέση μετατρέπεται στην

$$\hat{\mathbf{n}}\cdot k\nabla\sigma_{e}(\mathbf{r})-\hat{\mathbf{n}}\cdot k\nabla\sigma_{p_+}(\mathbf{r})=\frac{\gamma s_p\sqrt{\lambda_{p_+}^2+\zeta^2}}{k\sqrt{1+\lambda_{p_+}^2}}$$

Με ανάλογο τρόπο διαμορφώνονται οι ΜΔΕ για τη συγκέντρωση της θρεπτικής ουσίας στα χωρία $\Omega_i$, $i=n,q,p_-,e$ και οι συνοριακές συνθήκες στα αντίστοιχα σύνορα.

**Β(α). Παραγωγή μερικής διαφορικής εξίσωσης συγκέντρωσης αναστολέα στον όγκο $\Omega_n$**

Ο νόμος διατήρησης μάζας της ανασταλτικής ουσίας μέσα σε όγκο $\Omega_n$ υπαγορεύει ότι η μάζα που στη μονάδα του χρόνου ρέει έξω από τον $\Omega_n$ ισούται με τη μάζα στην ίδια μονάδα χρόνου που παρήχθη μέσα σε αυτόν, δηλαδή $\int_{\partial\Omega_n}\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r})\,ds=\int_{\Omega_n}P_n dv$

Στη συνέχεια, ο νόμος διάχυσης του Fick και το θεώρημα του Gauss υπαγορεύουν την εξίσωση

$$\int_{\partial\Omega_n}\hat{\mathbf{n}}\cdot D\nabla\beta(\mathbf{r})\,ds=\int_{\Omega_n}\nabla\cdot D\nabla\beta(\mathbf{r})\,dv=-\int_{\Omega_n}P_n dv\Leftrightarrow$$

$$\int_{\Omega_n}\left(D\Delta\beta(\mathbf{r})+P_n\right)dv=0\Leftrightarrow\Delta\beta(\mathbf{r})=-\frac{P_n}{D},\quad \mathbf{r}\in\Omega_n$$

Θεωρούμε ότι ο ρυθμός παραγωγής ανασταλτικής ουσίας $P_n$, εξαρτάται γραμμικά από το ρυθμό αύξησης των νεκρών κυττάρων, δηλαδή ότι $\Delta\beta\ \mathbf{r}\ = -\frac{P_n}{D} = -\frac{Ps_n}{D}$ , $P_n = P\,s_n$ όπου με $P$ συμβολίζουμε τη σταθερά αναλογίας και με $D$ τη θετική σταθερά διάχυσης της ανασταλτικής ουσίας.

**Β(β). Παραγωγή της συνοριακής συνθήκης στην** $S_n$

Με τρόπο ανάλογο με το Α(β) αποδεικνύεται ότι σε κάθε σημείο επί της επιφάνειας $S_n$ ισχύει

$$\hat{\mathbf{n}}\cdot\ D\nabla\beta_{\varepsilon\xi}\ - \hat{\mathbf{n}}\cdot\ D\nabla\beta_{\varepsilon\iota\sigma}\ + P_{s_n} - \Gamma_{s_n} = 0 \Leftrightarrow \hat{\mathbf{n}}\cdot\ \nabla\beta_{\varepsilon\xi}\ - \hat{\mathbf{n}}\cdot\ \nabla\beta_{\varepsilon\iota\sigma}\ = \frac{-P_{s_n} + \Gamma_{s_n}}{D}$$

όπου $P_{s_n}, \Gamma_{s_n}$ οι επιφανειακοί ρυθμοί παραγωγής και κατανάλωσης της ανασταλτικής ουσίας και έχουμε υποθέσει ότι στην επιφάνεια $S_n$ υπάρχουν και νεκρωτικά κύτταρα και αδρανή κύτταρα

Τέλος, στην $S_n$, $\beta_{\varepsilon\xi} = \beta_q$ και $\beta_{\varepsilon\iota\sigma} = \beta_n$. Τότε η συνοριακή συνθήκη είναι $\hat{\mathbf{n}}\cdot\ \nabla\beta_q\ - \hat{\mathbf{n}}\cdot\ \nabla\beta_n\ = \frac{-P_{s_n} + \Gamma_{s_n}}{D}$.

Θεωρούμε επιπλέον, για το σφαιροειδές μοντέλο ότι $-P_{s_n} + \Gamma_{s_n} = \ \Gamma_s - P_s\ c\frac{\sqrt{\lambda_n^2 + \zeta^2}}{\sqrt{1+\lambda_n^2}}$ οπότε

$$\hat{\mathbf{n}}\cdot\ \nabla\beta_q\ - \hat{\mathbf{n}}\cdot\ \nabla\beta_n\ = \frac{\Gamma_s - P_s}{D} c\frac{\sqrt{\lambda_n^2 + \zeta^2}}{\sqrt{1+\lambda_n^2}} \quad \mathbf{r} \in S_n$$

**Γ(α). Παραγωγή της Μερικής Διαφορικής Εξίσωσης της πίεσης στον όγκο** $\Omega_q$

Θεωρούμε ότι η ταχύτητα των κυττάρων δίνεται από τη σχέση

$\mathbf{v}_i\ \mathbf{r}\ = -\mu\nabla P_i\ \mathbf{r}\ + \kappa\nabla\sigma_i\ \mathbf{r}\ - \nu\nabla\beta_i\ \mathbf{r}$ και

όπου μ, κ, ν θετικές σταθερές αναλογίας που χαρακτηρίζουν την κινητικότητα του κυττάρου και τις θεωρούμε ίδιες σε ολόκληρο τον όγκο και στο περιβάλλον του. Η παραπάνω θεώρηση υιοθετεί την παθητική κίνηση των κυττάρων υπό την επίδραση της βαθμίδας πίεσης, όπως υπαγορεύεται από το νόμο του Darcy, αλλά και την ενεργητική χημειοτακτική κίνηση των κυττάρων προς περιοχές μεγαλύτερης συγκέντρωσης τροφής και λιγότερης συγκέντρωσης ανασταλτικής ουσίας.

Η απόκλιση της σχέσης ( 1 ), δηλαδή η σχέση

$\nabla\cdot\mathbf{v}_i\ \mathbf{r}\ = -\mu\Delta P_i\ \mathbf{r}\ + \kappa\Delta\sigma_i\ \mathbf{r}\ - \nu\Delta\beta_i\ \mathbf{r}$

υπολογίζει το ρυθμό μείωσης ή αύξησης του όγκου του χωρίου $\Omega_i$, και το συμβολίζουμε $\nabla\cdot\mathbf{v}_i\ \mathbf{r}\ = G_i\ \mathbf{r}$ .

Για τον όγκο $\Omega_q$ ισχύει:

$\nabla\cdot\mathbf{v}_q\ \mathbf{r}\ = G_q\ \mathbf{r} \Rightarrow G_q\ \mathbf{r}\ = -\mu\Delta P_q\ \mathbf{r}\ + \kappa\Delta\sigma_q\ \mathbf{r}\ - \nu\Delta\beta_q\ \mathbf{r}$ και με δεδομένο ότι το $G_q$ είναι σταθερό, η παραπάνω σχέση μετατρέπεται στην ισοδύναμη

$G_q = -\mu\Delta P_q\ \mathbf{r}\ + \kappa\Delta\sigma_q\ \mathbf{r}\ - \nu\Delta\beta_q\ \mathbf{r}$

Αντικαθιστώντας τα $\Delta\sigma_q(\mathbf{r}) = F\frac{\sigma_2}{\sigma_\infty}$ και $\Delta\beta_q(\mathbf{r}) = \frac{\Gamma}{D}$ στην προηγούμενη σχέση προκύπτει:

$$G_q = -\mu\Delta P_q(\mathbf{r}) + \kappa F\frac{\sigma_2}{\sigma_\infty} - \nu\frac{\Gamma}{D} \Rightarrow \Delta P_q(\mathbf{r}) = -\frac{G_q}{\mu} + \frac{\kappa}{\mu}F\frac{\sigma_2}{\sigma_\infty} - \frac{\nu}{\mu}\frac{\Gamma}{D}$$

Ενσωματώνουμε το μ στη σταθερά $G_q$ οπότε η εξίσωση παίρνει τελικά τη μορφή

$$\Delta P_q(\mathbf{r}) = -\frac{G_q}{\mu} + \frac{\kappa}{\mu}F\frac{\sigma_2}{\sigma_\infty} - \frac{\nu}{\mu}\frac{\Gamma}{D}$$

### Γ(β). Παραγωγή της συνοριακής συνθήκης στην $S_q$

Ο καρκινικός όγκος και ο περιβάλλοντας ιστός θεωρούμε ότι συμπεριφέρονται ως ασυμπίεστα υγρά. Στις εσωτερικές διεπιφάνειες θεωρούμε συνεχείς συνοριακές συνθήκες και συνεχείς συνθήκες κάθετης ροής, καθώς οι διαφορετικές περιοχές στον όγκο αντιστοιχούν σε κύτταρα του ίδιου υγρού, ή υγρών με τις ίδιες φυσικές παραμέτρους που βρίσκονται σε διαφορετικές φάσεις του μιτωτικού κύκλου. Ωστόσο, η εξωτερική συνοριακή επιφάνεια διαχωρίζει ρευστά διαφορετικής φάσης, και κατά συνέπεια χαρακτηρίζεται από την εξίσωση Young-Laplace.

Έτσι τα προβλήματα συνοριακών τιμών που περιγράφουν την ανάπτυξη του όγκου στην περίπτωση που αναφερόμαστε είναι τα εξής:

Για τη συγκέντρωση θρεπτικής ουσίας

$\Delta\sigma_i(\mathbf{r}) = F_i$, $i = n, q, p_-, p_+, e$, όπου $F_n = F_e = 0$, $F_q = F\frac{\sigma_2}{\sigma_\infty}$ και $F_{p_-} = F_{p_+} = F\frac{\sigma_1}{\sigma_\infty}$

με συνοριακές συνθήκες συνέχειας για τη συγκέντρωση και ασυνέχειας για τις κάθετες παραγώγους, της μορφής $\hat{\mathbf{n}}\cdot k\nabla\sigma_{ex_i}(\mathbf{r}) - \hat{\mathbf{n}}\cdot k\nabla\sigma_{in_i}(\mathbf{r}) = \Gamma_{s_i}$ όπου $\Gamma_{s_i} = \frac{\gamma s_i\sqrt{\lambda_i^2+\zeta^2}}{k\sqrt{1+\lambda_i^2}}$, $i = n, q, p_-, p_+, e$ και $\sigma_e(R,\zeta,\phi) = \sigma_\infty(1+a-a\zeta^2)$, με $0 \le a \le 1$ ,για $\mathbf{r}_R = (R,\zeta,\phi) \in S_e$.

Για τη συγκέντρωση ανασταλτικής ουσίας

$\Delta\beta_i(\mathbf{r}) = \mathrm{P}_i$, $i = n, q, p_-, p_+, e$, όπου $\mathrm{P}_e = 0$, $\mathrm{P}_n = \frac{P}{D}$ και $\mathrm{P}_q = \mathrm{P}_{p_-} = \mathrm{P}_{p_+} = \frac{\Gamma}{D}$

με συνοριακές συνθήκες συνέχειας για τη συγκέντρωση και ασυνέχειας για τις κάθετες παραγώγους, της μορφής $\hat{\mathbf{n}}\cdot k\nabla\beta_{ex_i}(\mathbf{r}) - \hat{\mathbf{n}}\cdot k\nabla\beta_{in_i}(\mathbf{r}) = C_{s_i}$ όπου $C_{s_n} = \frac{\Gamma_s - P_s}{D}\frac{\sqrt{\lambda_n^2+\zeta^2}}{\sqrt{1+\lambda_n^2}}$ $C_{s_i} = \frac{\Gamma_s}{D}\frac{\sqrt{\lambda_i^2+\zeta^2}}{\sqrt{1+\lambda_i^2}}$, $i = q, p_-$, $C_{s_{p_-}} = C_{s_{p_+}}$ και τέλος $\lim_{R\to\infty}\beta_e(R,\zeta,\phi) = 0$.

Για τη συνάρτηση της πίεσης έχουμε $\Delta P_i(\mathbf{r}) = \Pi_i$ ,όπου $\Pi_i = -\frac{G_i}{\mu} + \frac{\kappa}{\mu}F_i - \frac{\nu}{\mu}C_i$, $i = n, q, p_-, p_+$ και $\Pi_e = 0$, με συνοριακές συνθήκες συνέχειας τόσο για την πίεση όσο και για τις κάθετες παραγώγους της, ενώ $P_e(R,\zeta,\phi) = P_\infty(R,\zeta) - aJ(R,\zeta,\phi)$ ,για $\mathbf{r}_R \in S_e$, όπου $P_\infty(R,\zeta)$ η πίεση η οποία καταγράφεται στο σύνορο $S_e$ από τον εξωτερικό του $\Omega_e$ χώρο, $J(R,\zeta,\phi)$ η μέση καμπυλότητα στο σημείο $\mathbf{r}_R = (R,\zeta,\phi)$ της σφαιροειδούς επιφάνειας $S_e$, και $a$ θετική σταθερά αναλογίας.

**Δ. Η εξίσωση της κίνησης των κυττάρων στο εξωτερικό σύνορο του όγκου**

Η επίλυση των παραπάνω προβλημάτων και η αντικατάσταση των αντιστοίχων λύσεων στην εξίσωση $\hat{\mathbf{n}}\cdot\frac{d\mathbf{r}_{p_+}}{dt} = -\mu\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla P_{p_+}(\mathbf{r}_{p_+}) + \kappa\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla\sigma_{p_+}(\mathbf{r}_{p_+}) - \nu\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla\beta_{p_+}(\mathbf{r}_{p_+})$ που καθορίζει την κίνηση των κυττάρων στο εξωτερικό σύνορο του όγκου, οδηγεί στην μη γραμμική συνήθη διαφορική εξίσωση ως προς το χρόνο

$$\frac{d\lambda_{p_+}}{dt} = \left[ -\frac{\mu}{3}\frac{P_2'(i\lambda_{p_-})}{Q_o'(i\lambda_{p_-})}(G_p - G_q) + \frac{\kappa F(\sigma_1-\sigma_2)}{3\sigma_\infty}\frac{P_2'(i\lambda_q)}{Q_o'(i\lambda_q)} + \right.$$

$$+\frac{P_2'(i\lambda_n)}{3Q_o'(i\lambda_n)}\left(\mu G_n - \mu G_q + \kappa F\frac{\sigma_2}{\sigma_\infty} - \nu\frac{\Gamma+Ps_n}{D}\right) + \kappa\frac{2\gamma}{k}\frac{s_n}{(1+\lambda_n^2)c}\frac{P_2(i\lambda_n)}{Q_0'(i\lambda_n)} +$$

$$-\frac{\kappa F\sigma_2 P_2'(i\lambda_n)}{3\sigma_\infty Q_0'(i\lambda_n)} - \frac{\kappa F(\sigma_1-\sigma_2)P_2'(i\lambda_q)}{3\sigma_\infty Q_0'(i\lambda_q)} + \kappa\frac{2\gamma}{k}\frac{s_q}{(1+\lambda_q^2)c}\frac{P_2(i\lambda_q)}{Q_0'(i\lambda_q)} +$$

$$+\frac{2\nu c\Gamma_s\left[P_2(i\lambda_{p_-})+1\right]}{3D(1+\lambda_{p_-}^2)Q_o'(i\lambda_{p_-})} + \frac{2\nu c\Gamma_s\left[P_2(i\lambda_q)+1\right]}{3D(1+\lambda_q^2)Q_o'(i\lambda_q)} + \frac{2\nu c(\Gamma_s - P_s)\left[P_2(i\lambda_n)+1\right]}{3D(1+\lambda_n^2)Q_o'(i\lambda_n)} +$$

$$\left. +\frac{\nu(\Gamma+Ps_n)P_2'(i\lambda_n)}{DQ_o'(i\lambda_n)}\right]\frac{1+\lambda_{p_+}^2}{2}\frac{Q_o'(i\lambda_{p_+})}{P_2(i\lambda_{p_+})} + \left(\mu G_p - \kappa F\frac{\sigma_1}{\sigma_\infty}\right)\frac{1+\lambda_{p_+}^2}{6}\frac{P_2'(i\lambda_{p_+})}{P_2(i\lambda_{p_+})}$$

όπου η σύνδεση των εσωτερικών συνόρων δίνεται μέσω των φυσικών απαιτήσεων οι συναρτήσεις συγκέντρωσης και αναστολέα να αποκτούν τις κρίσιμες τιμές $\sigma_1, \sigma_2, \beta^*$ στα αντίστοιχα σύνορα.

## 6. Βιβλιογραφικές παραπομπές


- Watson, Myers, Caudy, Witkowski, (2007). Ανασυνδυασμένο DNA, Γονίδια και γονιδιώματα – Μία συνοπτική παρουσίαση, *Ακαδημαϊκές Εκδόσεις Μπάσδρα και ΣΙΑ Ο.Ε.*, Αλεξανδρούπολη
- Roose, Chapman, Maini, (2007), Mathematical models of avascular tumor growth, Society for Industrial and Applied Mathematics, Volume 49,No2, pp. 179 – 208
- N. Bellomo, N.K. Li and P.K.MAINI,(2008), On the Foundations of cancer modeling: Selected topics, speculations and perspectives, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol.18, No4, pp. 593 – 646
- R.P. Araujo and L. S. McElwain, (2004), A History of the study of solid tumor growth: The Contribution of mathematical modeling, Bulletin of Mathematical Biology, 66, pp. 1039 - 1091
- H.P. Greenspan, (1972), Models for the growth of a solid tumor, Stud.Appl.Math. 52,317 – 340

Γραικού Χ Αικατερίνη, (2011), Η επίδραση της πεπλατυσμένης σφαιροειδούς γεωμετρίας στη μαθηματική προτυποποίηση της μη αγγειακής καρκινικής ανάπτυξης, Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία, Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο, Πάτρα



*Σημείωση*

*Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών «Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά» της Σχολής Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου και αποτελεί μέρος της*

*διπλωματικής εργασίας της συγγραφέως, η οποία εκπονήθηκε υπό την επίβλεψη της Δρ. Καριώτου Φωτεινής, Επίκ. Καθηγήτριας του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου, Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας* (kariotou@eap.gr ).

*Open Education - The Journal for Open and Distance Education and Educational Technology*
*Volume 8, Number 1, 2012 Section one © Open Education ISSN: 1791-9312*

# Μαθηματική Προτυποποίηση μέσω Προβλημάτων Ελεύθερου Συνόρου

# Mathematical Modeling through Free Boundary

**Αλκιβιάδης Τζελέπης**,
MSc Μαθηματικός,
Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο,
Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας
Υπ. Δ. ΕΑΠ, alktzelepis@yahoo.co.uk

**Περίληψη**

Τα προβλήματα ελεύθερου συνόρου αποτελούν ένα μαθηματικό πεδίο έρευνας που χαρακτηρίζεται από την εμφάνιση συνόρων, των οποίων η θέση είναι άγνωστη εκ των προτέρων. Τα ελεύθερα σύνορα χωρίζουν χωρικές-χρονικές περιοχές με διαφορετικές ιδιότητες. Κλασικό παράδειγμα αποτελεί η στερεοποίηση του νερού, όπου η θέση του συνόρου μεταξύ νερού και πάγου δεν είναι καθορισμένη, αλλά αλλάζει κατά τη διάρκεια της διαδικασίας. Ελεύθερα σύνορα προκύπτουν φυσικά κατά τη μαθηματική προτυποποίηση μιας μεγάλης ποικιλίας επιστημονικών και τεχνολογικών διεργασιών, όπως για παράδειγμα στον τομέα της μεταποίησης υλικών (χύτευση χάλυβα, κρυσταλλική και δενδρική ανάπτυξη), στη βιολογία (δυναμική των πληθυσμών, ανάπτυξη βακτηριδίων), στη θεωρία της καύσης, σε προβλήματα αντίδρασης-διάχυσης, στην ηλεκτροχημεία ή στη ροή ρευστών διαμέσου πορωδών μέσων.

Κλασικά προβλήματα ελεύθερου συνόρου είναι το πρόβλημα του Stefan, η ροή διαμέσου μιας μεμβράνης (thin-film flow), τα κρουστικά κύματα (shock waves), το πρόβλημα επαφής (contact problem) και η εξίσωση του πορώδους μέσου (porous-medium equation). Όλα τα προβλήματα έχουν το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό, ότι η γεωμετρία του ελεύθερου συνόρου πρέπει να ληφθεί υπόψη και να υπολογισθεί ταυτόχρονα με την επίλυση των εξισώσεων του πεδίου. Το γεγονός αυτό μπορούμε να το υιοθετήσουμε ως ορισμό εργασίας των προβλημάτων ελεύθερου συνόρου, τα οποία επιπλέον είναι μη γραμμικά, διότι οι λύσεις των μερικών διαφορικών εξισώσεων σχεδόν ποτέ δεν εξαρτώνται γραμμικά από τη γεωμετρία των συνόρων μέσα στα οποία πρέπει να επιλυθούν.

**Abstract**

Free boundary problems constitute a mathematical research topic characterized by the occurrence of frontiers whose location is a priori unknown. Free boundaries separate space–time regions with different properties. Free boundaries occur naturally in the mathematical formulation of a great variety of scientific and technological processes, e.g. in material processing (steel casting, crystal and dendritic growth, etc.), in biology (population dynamics, growth of bacteria), in combustion theory, in reaction-diffusion problems, in electrochemistry or in fluid flow-through porous media.

The free boundary geometry must be calculated and the field equations must be solved simultaneously. They are inevitably nonlinear, because the solutions of partial differential equations almost never depend linearly on the geometry of the boundaries within which they are to be solved.

The most famous free boundary problem for parabolic equations is the Stefan problem, in which we consider the solidification of water where the location of the

boundary between water and ice is not fixed and changes during the process. There are free boundary problems in diffusion, such as the diffusion flames model, problems from fluid dynamics, from solid mechanics such as the obstacle problem.

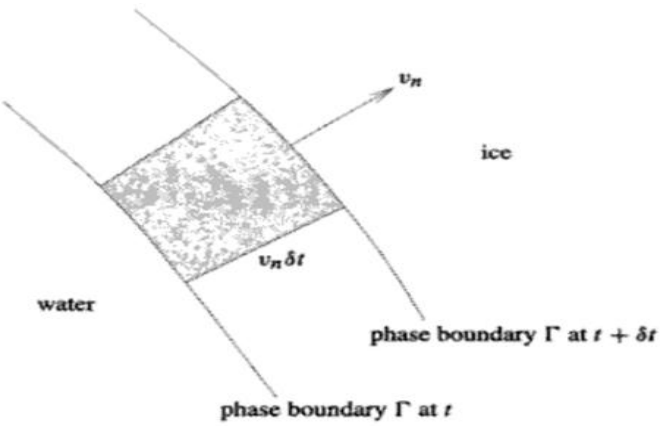
The nonlinearity of free boundary problems makes them less susceptible to mathematical analysis than the linear equations, so the discussion about stability and well-posedness is very interesting, because there is just about as much likelihood of ill-posedness as of well-posedness.

In our effort to deal with the free boundary problems we use classical solutions, weak and variational methods and sometimes explicit solutions.

**Keywords**
*Free boundary problems, Stefan problem*

## 1. Κλασικά Προβλήματα Ελεύθερου Συνόρου

Το πρόβλημα του Stefan είναι ένα πρόβλημα μεταφοράς θερμότητας στο οποίο όμως επιτρέπεται στο μέσο να αλλάζει φάση (να λειώνει, να παγώνει, να εξατμίζεται, ή να συμπυκνώνεται).




Σχήμα 1.1. Η συνθήκη Stefan

Η εξίσωση της θερμότητας u: — ,

όπου η πυκνότητα μάζας ρ, η ειδική θερμότητα c και ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας k του αγώγιμου μέσου είναι όλα θετικές σταθερές.

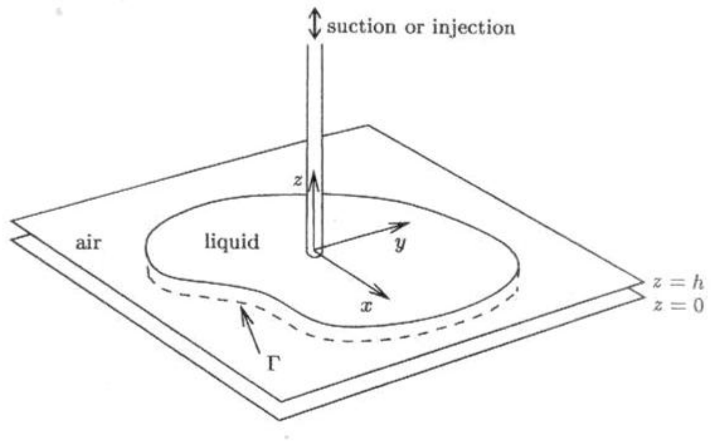
Οι συνθήκες ελεύθερου συνόρου είναι:

και ,

όπου είναι η ταχύτητα του ελεύθερου συνόρου και L η λανθάνουσα θερμότητα ανά μονάδα μάζας η οποία απαιτείται να προσφερθεί στον πάγο θερμοκρασίας ώστε να μετατραπεί σε νερό θερμοκρασίας .

Στο πρόβλημα Hele – Shaw, ιξώδες ρευστό εξαναγκάζεται είτε με άντληση είτε με απομύζηση να περάσει διαμέσου ενός στενώματος μεταξύ δύο παράλληλων πλακών z = 0 και z = h.

*Open Education - The Journal for Open and Distance Education and Educational Technology*
*Volume 8, Number 1, 2012 Section one © Open Education ISSN: 1791-9312*




Chapter 2
Chapter 3 Σχήμα 1.2. Ένα κελί Hele-Shaw

Η εξίσωση Laplace για την πίεση p:
Οι συνθήκες ελεύθερου συνόρου είναι:

και —

Τα προβλήματα ελεύθερου συνόρου σε διάχυση αφορούν σε προβλήματα καύσης, συνήθως στα αέρια, στα οποία οι σημαντικές χημικές αντιδράσεις συμβαίνουν μόνο στο πέτασμα της φλόγας.
Οι εξισώσεις και οι συνθήκες ελεύθερου συνόρου είναι:

— —— — ——

—
και — —

όπου T η θερμοκρασία, c η συγκέντρωση των αντιδρώντων, ο χωρίς διάσταση ρυθμός της αντίδρασης είναι της μορφής , όπου A είναι σταθερά και η αδιάστατη ενέργεια ενεργοποίησης (activation energy) E, το είναι μεγαλύτερη τιμή της θερμοκρασίας και το είναι μία σταθερά ανάλογη με το A.

Προβλήματα από τη μηχανική, όπως:
α) τη δυναμική των ρευστών (fluid dynamics)
Οι εξισώσεις του πεδίου του δυναμικού της ταχύτητας είναι:

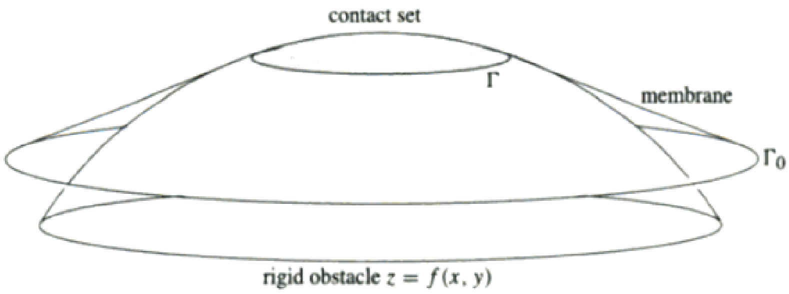
Η εξίσωση Laplace , με τις συνοριακές συνθήκες:

– ——

—— —— ———

όπου είναι το δυναμικό της ταχύτητας (velocity potential) και η επιφάνεια του νερού περιγράφεται από τη .

β) τη μηχανική των στερεών (solid mechanics) και το πρόβλημα εμποδίου για μία μεμβράνη




Chapter 4 Σχήμα 1.3. Πρόβλημα εμποδίου για μία μεμβράνη

Η εξίσωση και οι συνθήκες ελεύθερου συνόρου είναι:

και ,

όπου η εγκάρσια μετατόπιση u(x,ψ) ικανοποιεί την εξίσωση Laplace και το στερεό εμπόδιο περιγράφεται από τη συνάρτηση z = f (x,ψ).

## 2. Ευστάθεια και Καλή Τοποθέτηση των Προβλημάτων

Η ανάλυση της ευστάθειας και ως εκ τούτου της καλής τοποθέτησης των προβλημάτων ελεύθερου συνόρου γίνεται με τη μέθοδο των διαταραχών για τη θεωρία των προσεγγιστικών λύσεων.

Στα προβλήματα ελεύθερου συνόρου υπάρχει τόση ακριβώς πιθανότητα ασθενούς τοποθέτησης, όσο και καλής τοποθέτησης. Πολλά προβλήματα απλά αλλάζουν τα χαρακτηριστικά ευστάθειας τους σύμφωνα με την κατεύθυνση διάδοσης του ελεύθερου συνόρου ή με το πρόσημο του μηχανισμού οδήγησης.

Τα προβλήματα Stefan εμφανίζονται να είναι καλά τοποθετημένα όταν δεν επέρχεται ούτε υπερβολική ψύξη, ούτε υπερβολική θέρμανση.

Τα ελεύθερα σύνορα πορώδους μέσου είναι καλά τοποθετημένα όταν η κορεσμένη περιοχή βρίσκεται κάτω από το ελεύθερο σύνορο και ασθενώς τοποθετημένα διαφορετικά.

Από την ανάλυση της ευστάθειας του δυναμικού ταχύτητας προκύπτει ότι έχουμε φυσικά αποδεκτές ιδιολύσεις του γραμμικοποιημένου προβλήματος κυματισμού του νερού, μόνο αν η ιδιοτιμή λ είναι πραγματική. Αυτό αντιστοιχεί με ένα ‘wave train’ επάνω στο ελεύθερο σύνορο, έτσι ώστε η ταχύτητα του κύματος να είναι λ/k προφανώς θετική και μόνο αν το k είναι πραγματικός αριθμός.

Από τον έλεγχο της ευστάθεια της ροής Hele-Shaw προκύπτει ότι η σχέση διασποράς είναι . Είναι εμφανές ότι υπάρχει μια δραματική αλλαγή από φαινομενικά καλή τοποθέτηση σε ασθενή τοποθέτηση, όσο προχωράμε από ένα πρόβλημα ‘εμφύσησης’ όταν το V > 0 , σε ένα πρόβλημα ‘αναρρόφησης’ όταν το V < 0.

## 3. Μέθοδοι Επίλυσης Προβλημάτων Ελεύθερου Συνόρου

Α. Κλασικές λύσεις

i. Μέθοδοι Σύγκρισης

Μερικές πληροφορίες σχετικά με τη θέση των ελεύθερων συνόρων και το εύρος των λύσεων μπορούν να αλιευθούν περιστασιακά από μεθόδους σύγκρισης.

ii. Ενεργειακές μέθοδοι και διατηρημένες ποσότητες

Παρόλη τη μη γραμμικότητα των προβλημάτων ελεύθερου συνόρου, είναι πιθανό να εξάγουμε κάποια πληροφορία από λίγο έως πολύ κατευθείαν ολοκλήρωση.

iii. Συναρτήσεις Green και ολοκληρωτικές εξισώσεις

Αν και οι συναρτήσεις Green δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν άμεσα για να λύσουν τα προβλήματα ελεύθερου συνόρου, μπορούμε μερικές φορές να μετακυλήσουμε την πληροφορία από το πεδίο εξισώσεων επάνω στο ελεύθερο σύνορο και έτσι να ανάγουμε το πρόβλημα σε μια μη γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση.

Chapter 5 Β. Ασθενείς και μεταβολικές μέθοδοι

Επειδή τα κλασικά προβλήματα ελεύθερου συνόρου είναι πολύ δύσκολο να έχουν αυστηρή ανάλυση, είναι φυσικό να προσπαθήσουμε να καταστήσουμε χαλαρότερο το μαθηματικό στόχο, απαιτώντας ένα λιγότερο αυστηρό ορισμό της έννοιας της λύσης. Μία δυνατότητα που έχουμε είναι να ακολουθήσουμε τις ιδέες των ασθενών λύσεων (weak solutions). Να προσπαθήσουμε δηλαδή να ορίσουμε μία ασθενή λύση πολλαπλασιάζοντας το πεδίο των εξισώσεων με συναρτήσεις ελέγχου και ολοκληρώνοντας με τέτοιον τρόπο, ώστε το ελεύθερο σύνορο και οι συνθήκες που επιβλήθηκαν σε αυτό να είναι αυτόματα ενσωματωμένες στη διατύπωση του ολοκληρώματος. Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να προσπαθήσουμε να γενικεύσουμε τη μέθοδο της μεταβολικής προσέγγισης με τέτοιον τρόπο, που οι συνθήκες ελεύθερου συνόρου να ικανοποιούνται αυτόματα από τους ελαχιστοποιητές.

Και στις δύο περιπτώσεις η φιλοσοφία είναι η ίδια. Αναζητούμε μία τυποποίηση η οποία να έχει λογικό ειρμό, ακόμη και παρουσία οιονδήποτε ασυνεχειών οι οποίες εμπεριέχονται στις συνθήκες ελεύθερου συνόρου. Η δυνατότητα αυτή ικανοποιείται όταν καταγράφεται μία τυποποίηση η οποία έχει καλές ιδιότητες ύπαρξης και μοναδικότητας. Ακόμη και αν αυτή η διατύπωση είναι υπερβολικά δύσχρηστη ώστε να έχουμε την ελπίδα να βρούμε άμεσο τρόπο για γενικευμένες λύσεις, μπορούμε να ελπίζουμε ότι μπορούν να επινοηθούν αριθμητικές διακριτοποιήσεις, οι οποίες θα μπορούσαν να αποδειχθούν ότι τείνουν στην ασθενή ή μεταβολική λύση όταν το κατάλληλο μέγεθος του βήματος ελαττώνεται.

Γ. Αναλυτικές λύσεις

Από όλες τις τεχνικές που περιγράφονται στην επίλυση των κλασικών παραβολικών, ελλειπτικών και υπερβολικών προβλημάτων αρχικών και συνοριακών συνθηκών, δύο μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να βρούμε αναλυτικές λύσεις προβλημάτων ελεύθερου συνόρου. Αυτές είναι πρώτον, η χρησιμοποίηση της ομοιότητας μεταβλητών η οποία περιλαμβάνει τα ταξιδεύοντα κύματα και δεύτερον, η χρησιμοποίηση των μιγαδικών μεταβλητών αν το πεδίο των εξισώσεων τυχαίνει να είναι εξισώσεις Laplace ή ενδεχομένως, η διαρμονική εξίσωση

i. Ταξιδεύοντα κύματα: μεταβλητή ομοιότητας x – Vt

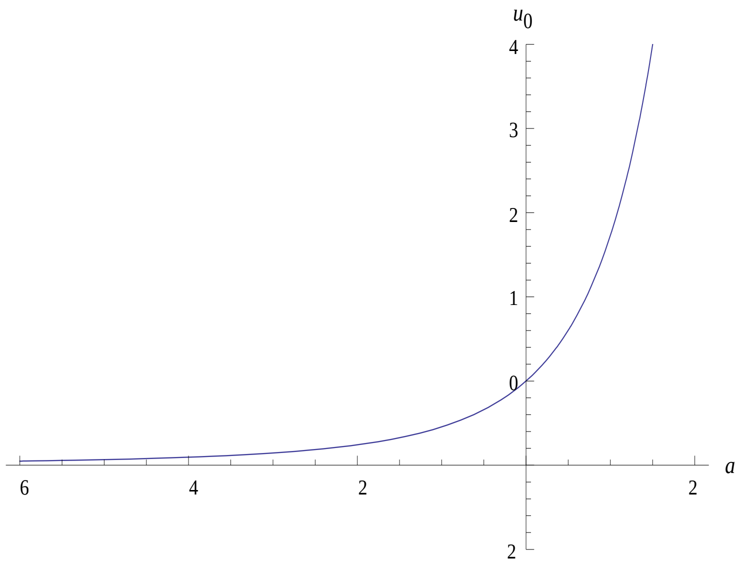
Στο πρόβλημα Stefan:

Θέτοντας ξ = x – Vt , η λύση είναι:

ii. Ο μετασχηματισμός του προβλήματος Stefan, θέτοντας:

δίνει ως λύση: $-$

Γραφική παράσταση της λύσης του προβλήματος Stefan:




Chapter 6 Σχήμα 3.1. Η κρίσιμη τιμή της θερμοκρασίας στο πρόβλημα Stefan

Επομένως:
Υπάρχει μία μοναδική λύση όταν
Δεν υπάρχουν πραγματικές λύσεις όταν

## 4. Συμπεράσματα

- Η εύρεση των κατάλληλων συνθηκών στο ελεύθερο σύνορο είναι πρωταρχικής σημασίας
- Δεν υπάρχει μία μέθοδος συνολικής αντιμετώπισης των προβλημάτων ελεύθερου συνόρου
- Το ζήτημα της έλλειψης ευστάθειας δυσκολεύει τη μοντελοποίηση
- Η ομαλοποίηση συμβάλει στην προσπάθεια μοντελοποίησης των προβλημάτων
- Οι αριθμητικές λύσεις υπερέχουν πολύ των διαθέσιμων τεχνικών εύρεσης αναλυτικών λύσεων

Στη συνέχεια μελετάται η θεώρηση του ελεύθερου συνόρου στην προτυποποίηση ιατρικών προβλημάτων.

## Βιβλιογραφία – Bibliography

Alonso M., Finn E. J., (1980), *Fundamental University Physics*, Addison Wesley Publishing Company.
Colli P., Verdi C., Visintin A., (2004), *Free Boundary Problems, Theory and Applications*, Birkhäuser.
Δάσιος Γ., Κυριάκη Κ., (1994), *Μερικές διαφορικές εξισώσεις*, Αθήνα.
Douglas J. Jr., Hornung U., (1993), *Flow in Porous Media*, Birkhäuser.

Gupta S.C., (2003), *The Classical Stefan Problem, Basic concepts, modeling and analysis*, Elsevier Science B.V..

Logan J. D., (1997), *Applied Mathematics, 2nd edition*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Ockendon John, Howison Sam, Lacey Andrew, Movchan Alexander, (2003), *Applied Partial Differential Equations (revised edition)*, Oxford University Press.

Τραχανάς Σ., (2001), *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις,* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

## Αρθρογραφία - Articles

Andreucci D., (2004), Lecture notes on the Stefan problem.

Donaldson R. D., (2001), Generalized Stefan problems.

Vuik C., (1993), Some historical notes about the Stefan problem, Delft university of Technology.

*Σημείωση*

*Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών «Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά» της Σχολής Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου και αποτελεί μέρος της διπλωματικής εργασίας του συγγραφέως, η οποία εκπονήθηκε υπό την επίβλεψη του Δρ. Γκιντίδη Δρόσου, Επίκ. Καθηγητή, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, ΕΜΠ,* dgindi@math.ntua.gr

**Υπολογιστική προσέγγιση της εξέλιξης καρκινικών όγκων**

**Computational modeling of cancer tumor growth**

**Παντελής Αμπατζόγλου**
Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο
Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας
MCs Μηχανικός Ηλεκτρονικών Υπολογιστών & Πληροφορικής
Υποψήφιος Διδάκτωρ
pampatzoglou@eap.gr

**Περίληψη**
Ο καρκίνος είναι μία ασθένεια η οποία οφείλεται στην ανισορροπία ανάμεσα στους παράγοντες και τους μηχανισμούς που ορίζουν τον κύκλο ζωής των κυττάρων. Τα καρκινικά κύτταρα δημιουργούν όγκους και οι παράγοντες που ορίζουν την εξέλιξη του καρκινικού όγκου ανήκουν σε δυο κατηγορίες, τους ενδοκυτταρικούς και τους εξωκυτταρικούς. Οι ενδοκυτταρικοί παράγοντες αναφέρονται στις μεταλλάξεις του γονιδιακού υλικού των κυττάρων και του φαινοτύπου των, ενώ οι εξωκυτταρικοί αναφέρονται στο περιβάλλον του κυττάρου και συμπεριλαμβάνουν παράγοντες όπως η συγκέντρωση οξυγόνου, γλυκόζης, αναστολέων κ.α. Επιπρόσθετοι παράγοντες στην ανάπτυξη του καρκινικού όγκου είναι και η μηχανική συμπεριφορά των καρκινικών κυττάρων σε σχέση με το περιβάλλον τους (μηχανική συμπίεση κυττάρων σε θέσεις ελάχιστης εντροπίας, κυτταρική μετακίνηση και κυτταρικές συνάψεις). Στόχος είναι η μαθηματική - υπολογιστική μοντελοποίηση της ανάπτυξης των καρκινικών όγκων ειδικότερα όταν αυτοί ακόμα βρίσκονται στη φάση T0 έως T2, δηλαδή πριν την αγγειογένεση.

**Keywords**
*Καρκινικός όγκος, μαθηματική μοντελοποίηση, cancer, avascular tumorgrowth, mathematical model, simulation of tumor growth*

**Abstract**
Cancer is a disease which is due to the abnormal cell-life cycle of cancer cells. Factors that play a role in the evolution of these cancer cells can be divided in two categories: The first one are those that are affecting the structure of the cell (such as gene and phenotype mutations) and the second are those that characterize the surrounding space of the cell (such as oxygen, glucose, inhibitors concentrations etc). The aim of the present work is the development of a mathematical model for the avascular phase of the tumor growth.

## 1. Εισαγωγή

Κατά τον φυσιολογικό κύκλο της κυτταρικής ζωής, τα κύτταρα του οργανισμού πολλαπλασιάζονται μέσω του μηχανισμού της μίτωσης και πεθαίνουν βάση του μηχανισμού της απόπτωσης. Όταν όμως ένα κύτταρο μετατραπεί σε καρκινικό, εμφανίζεται ανισορροπία ανάμεσα στους δυο προαναφερθέντες μηχανισμούς με αποτέλεσμα τα κύτταρα να πολλαπλασιάζονται όσο πιο γρήγορα μπορούν, ανάλογα βέβαια με το οξυγόνο και την τροφή που μπορούν να δεσμεύσουν. Παράλληλα όμως με τη δημιουργία καρκινικών όγκων παρουσιάζεται και ένας νέος ανασταλτικός μηχανισμός για την επέκταση του πληθυσμού των καρκινικών κυττάρων στον όγκο, όπου τα κυτταρικά απόβλητα και οι αναστολείς ανάπτυξης που εμφανίζονται αλλά και η έλλειψη απαραιτήτων βιοχημικών παραγόντων περιορίζουν τους ρυθμούς επέκτασης του όγκου. Έτσι η διαδικασία ανάπτυξης των καρκινικών όγκων μπορεί να διαχωριστεί σε συγκεκριμένες φάσεις (Connor M & Ferguson-Smith M, 1997).

## 2. Φάσεις καρκινικού όγκου

Φάση 1η: Αρχική εκθετική ανάπτυξη

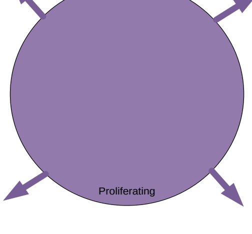
Στην αρχική φάση της ανάπτυξης του καρκινικού όγκου, όσο ακόμα δηλαδή ο όγκος αποτελείται από μερικές δεκάδες κύτταρα, η ανάπτυξη του χαρακτηρίζεται ως εκθετική. Αυτή η τόσο γρήγορη ανάπτυξη είναι δυνατή λόγω της πληθώρας τροφής που υπάρχει στα κύτταρα (γλυκόζη, οξυγόνο κ.α.) ενώ ταυτόχρονα δεν υπάρχουν λοιποί αναστολείς. Τα κύτταρα που ανήκουν σ' αυτή την κατάσταση χαρακτηρίζονται ως πολλαπλασιαστικά, (*proliferating) (Εικόνα 1.α).*

Φάση 2η: Ανάπτυξη

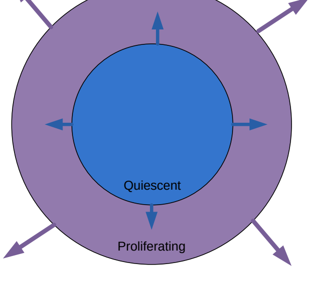
Στη δεύτερη φάση της ανάπτυξης, τα κύτταρα που απαρτίζουν τον καρκινικό όγκο ανήκουν σε δύο περιοχές. Στην εξωτερική, όπου υπάρχει πλεόνασμα τροφής για την ανάπτυξη και τον πολλαπλασιασμό των κυττάρων και στην εσωτερική όπου αν και υπάρχει αρκετή τροφή και οξυγόνο για τη συνέχιση της ζωής των κυττάρων αυτών, ωστόσο δεν υπάρχουν αρκετά συστατικά ώστε τα κύτταρα αυτά να μπορούν να πολλαπλασιαστούν. Τα κύτταρα που ανήκουν στην τελευταία κατηγορία, χαρακτηρίζονται ως αδρανή, (quiescent). Σ' αυτή τη φάση ο καρκινικός όγκος αναπτύσσεται ακόμα, ωστόσο με την πάροδο του χρόνου, καθώς το οξυγόνο και η τροφή δεν αρκούν για τη συνέχιση της αναπαραγωγής όλων των κυττάρων, ο ρυθμός ανάπτυξης του όγκου μικραίνει (Εικόνα 1.β).

Φάση 3η: Ισορροπία

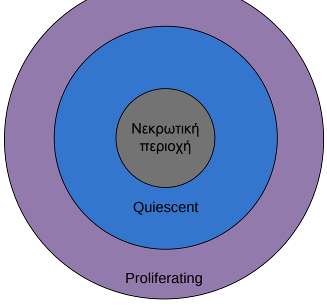
Στην τρίτη φάση της ανάπτυξης του όγκου, εμφανίζεται και μία νέα περιοχή στο κέντρο του όγκου, πυρήνας, η οποία καταλαμβάνεται από τα νεκρωτικά κύτταρα (necrotic). Η τροφή και το οξυγόνο δεν αρκούν για να διατηρήσουν στη ζωή όλα τα κύτταρα που βρίσκονται σε κατάσταση quiescent, με αποτέλεσμα όσα βρίσκονται στον πυρήνα του όγκου, όπου η τροφή και το οξυγόνο είναι λιγότερα, να γίνονται νεκρωτικά και να ξεκινά η διαδικασία της απόπτωσης τους. Ακόμα, σε αυτή τη φάση της χρονικής εξέλιξης του καρκινικού όγκου ενεργοποιούνται και άλλοι δύο μηχανισμοί, αυτός της αγγειογένεσης, όπου τα κύτταρα που βρίσκονται σε κατάσταση quiescent αλλά αντιμετωπίζουν προβλήματα έλλειψης τροφής, παράγουν σήματα αγγειογένεσης, ενώ ταυτόχρονα τα νεκρά κύτταρα του πυρήνα καθώς αποσυντίθενται, παράγουν αναστολείς οι οποίοι περιορίζουν την ανάπτυξη του καρκινικού όγκου. Σ' αυτή τη φάση ο ρυθμός ανάπτυξης του όγκου περιορίζεται ακόμα περισσότερο έως ότου φτάσει σε κατάσταση ισορροπίας, οπότε και μένει σταθερός (Εικόνα 1.γ).




Εικόνα 1.α: Φάση 1η




Εικόνα 1.β: Φάση 2η




Εικόνα 1.γ: Φάση 3η

## 3. Ενδοκυτταρικοί παράγοντες

Οι γονιδιακές μεταλλάξεις οι οποίες είναι και η αιτία της δημιουργίας των καρκινικών κυττάρων χαρακτηρίζονται ως μεταβολές στην αλληλουχία νουκλεοτιδίων. Οι μεταλλάξεις αυτές μπορούν να είναι είτε σημειακές (μετάπτωση – Transition ή αντικατάσταση -Transversion), είτε μεταλλάξεις αναγνωστικού πλαισίου με έλλειψη ή προσθήκη (Frameshift mutations). Οι γονιδιακές αυτές μεταλλάξεις εμφανίζονται με μια πιθανότητα ανάλογα με τις συνθήκες που επικρατούν στο κύτταρο και μπορούν να οδηγήσουν εν γένει είτε σε κάποια ασθένεια όπως ο καρκίνος είτε απλά να είναι αβλαβείς οπότε και ονομάζονται πολυμορφισμός. Αναφορικά, οι κύριοι παράγοντες που προκαλούν αυτές τις μεταλλάξεις είναι το περιβάλλον, η κληρονομικότητα και τέλος η τύχη. Για την περίπτωση της μοντελοποίησης της ανάπτυξης του καρκίνου, θα πρέπει να μοντελοποιήσουμε τη στατιστική πιθανότητα σε κάθε μίτωση, τα κύτταρα που παράγονται να παρουσιάσουν περαιτέρω μεταλλάξεις οι οποίες και θα επηρεάσουν με τη σειρά τους περαιτέρω το φαινότυπο των κυττάρων αυτών. Σκοπός είναι να συμπεριληφθεί στο μοντέλο η πιθανότητα μετάλλαξης του καρκίνου σε πιο επιθετική μορφή.

## 4. Εξωκυτταρικοί παράγοντες

Οι εξωκυτταρικοί παράγοντες που επηρεάζουν τη συμπεριφορά του καρκινικού όγκου μπορούν να διαχωριστούν σε δυο κατηγορίες, τους βιοχημικούς (Yi Jiang, 2005) και τους μηχανικούς. Στη πρώτη κατηγορία ανήκουν όλες οι χημικές ενώσεις οι οποίες παίζουν κάποιο ρόλο είτε θετικό (συγκέντρωση οξυγόνου, συγκέντρωση γλυκόζης, κ.α.) είτε ανασταλτικό (κυτταρικά απόβλητα, Growth Inhibitors, κ.α.) στην διαδικασία μίτωσης των κυττάρων και κατ' επέκταση στη ανάπτυξη του καρκινικού όγκου. Ο υπολογισμός της συγκέντρωσης κάθε ενός από αυτούς τους βιοχημικούς παράγοντες είναι τετριμμένος αφού υπακούει στους κανόνες της διάχυσης:

| Παράγοντας | Διάχυση |
|---|---|
| Oxygen | $\frac{\partial u_{\mathrm{O_2}}}{\partial t} = D_{\mathrm{O_2}} \nabla^2 u_{\mathrm{O_2}} + a(x, y, z),$ |
| Nutrition | $\frac{\partial u_{\mathrm{n}}}{\partial t} = D_{\mathrm{n}} \nabla^2 u_{\mathrm{n}} + b(x, y, z),$ |
| Waste | $\frac{\partial u_{\mathrm{w}}}{\partial t} = D_{\mathrm{w}} \nabla^2 u_{\mathrm{w}} + c(x, y, z),$ |
| Growth Factor | $\frac{\partial u_{\mathrm{gf}}}{\partial t} = D_{\mathrm{gf}} \nabla^2 u_{\mathrm{gf}} + d(x, y, z),$ |
| Growth Inhibitory Factor | $\frac{\partial u_{\mathrm{if}}}{\partial t} = D_{\mathrm{if}} \nabla^2 u_{\mathrm{if}} + e(x, y, z).$ |

Όπου το εκάστοτε D συμβολίζει το συντελεστή διάχυσης του αντίστοιχου βιοχημικού παράγοντα, ενώ οι μεταβλητές a,b,c,d και e είναι οι ρυθμοί κατανάλωσης ή παραγωγής των αντίστοιχων βιοχημικών παραγόντων.

$$a = a_0 \frac{u_{\mathrm{O_2}} - u_{\mathrm{O_2}}^{\mathrm{T}}}{u_{\mathrm{O_2}}^{\mathrm{O}} - u_{\mathrm{O_2}}^{\mathrm{T}}}, \qquad b = b_0 \frac{u_{\mathrm{n}} - u_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}}{u_{\mathrm{n}}^{\mathrm{O}} - u_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}}, \qquad c = C_0 \frac{a/a_0 + b/b_0}{2},$$

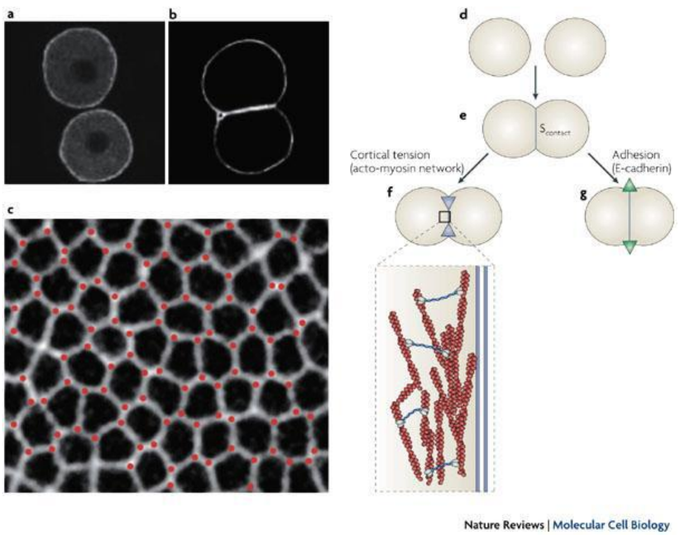
Οι μεταβλητές $a_0$,$b_0$ και $c_0$ αντιστοιχούν στις αρχικές τιμές, η μεταβλητή $u^{\mathrm{O}}$ αναπαριστά την βέλτιστη κατανάλωση και η μεταβλητή $u^{\mathrm{T}}$ αναπαριστά την οριακή κατανάλωση του αντίστοιχου βιοχημικού παράγοντα που υποδηλώνει ο δείκτης. Οι συνοριακές συνθήκες του καρκινικού όγκου είναι οι εξής:

$$u_{\mathrm{O_2}} = u^0_{\mathrm{O_2}},\ u_{\mathrm{n}} = u^0_{\mathrm{n}},\ u_{\mathrm{w}} = 0,\ u_{\mathrm{gf}} = 1,\ u_{\mathrm{if}} = 0.$$

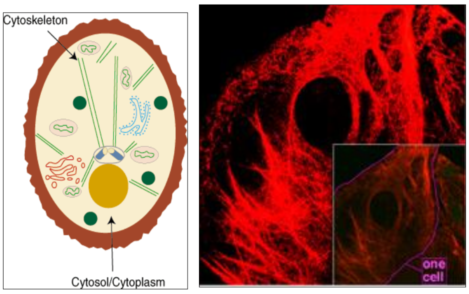
Ενώ οι βιοχημικές απαιτήσεις και η συμπεριφορά των καρκινικών κυττάρων σύμφωνα με τα βιολογικά δεδομένα είναι οι έξης (Yi Jiang, 2005):

| | Οξυγόνο | Τροφή | Απόβλητα | Growth factors | Inhibitory factors |
|---|---|---|---|---|---|
| Proliferating cell | 108 | 162 | 240 | 1 | 0 |
| Quiescent cell | 50 | 80 | 110 | 0.5 | 1 |
| Necrotic | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| | $mM/h/cm^3$ | $mM/h/cm^3$ | $mM/h/cm^3$ | $\%/h/cm^3$ | $\%/h/cm^3$ |
| Diffusion constant | 5.94 × 10−2 | 1.52 × 10−3 | 2.124 × 10−3 | 10−6 | 10−6 |
| | $cm^2/h$ | $cm^2/h$ | $cm^2/h$ | $cm^2/h$ | $cm^2/h$ |

Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν όλοι εκείνοι οι παράγοντες οι οποίοι καθορίζουν το πώς αλληλοεπιδρά φυσικά – μηχανικά το κάθε κύτταρο του όγκου με το περιβάλλον του αλλά και το πώς το περιβάλλον του ορίζει τον τρόπο με τον οποίον θα αναπτυχθεί. Τέτοιοι παράγοντες είναι για παράδειγμα η πίεση που ασκείται σε κάθε κύτταρο, η συμπίεση του όγκου, ώστε να καταλαμβάνει τον ελάχιστο δυνατό χώρο, οι συνάψεις που αναπτύσσονται ανάμεσα σε γειτονικά κύτταρα και παρεμποδίζουν τη μετακίνηση τους (Εικόνα 2), αλλά και η ικανότητα που διαθέτουν τα κύτταρα να μετακινούνται, χωρίς ωστόσο να παραβιάζεται η ακεραιότητα του σχήματος κάθε κυττάρου όπως αυτή ορίζεται από τον κυτταρικό σκελετό – Cytoskeleton (Εικόνα 3).



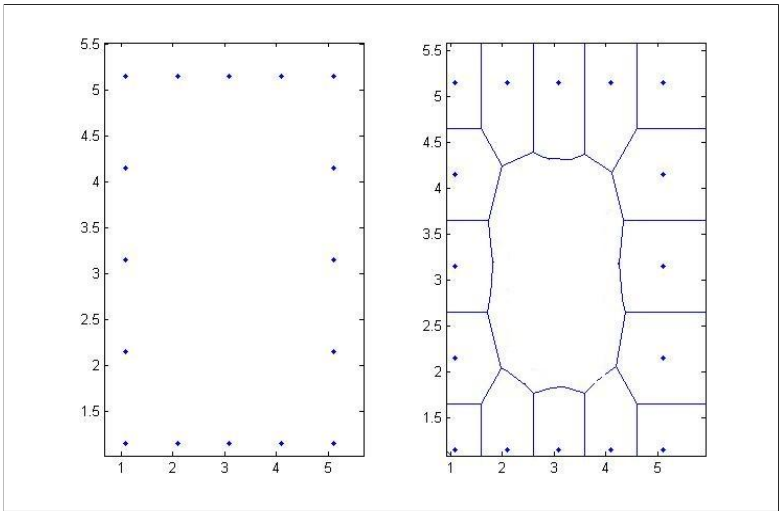
Εικόνα 2: κυτταρικές συνάψεις




Εικόνα 3: κυτταρικός σκελετός – Cytoskeleton

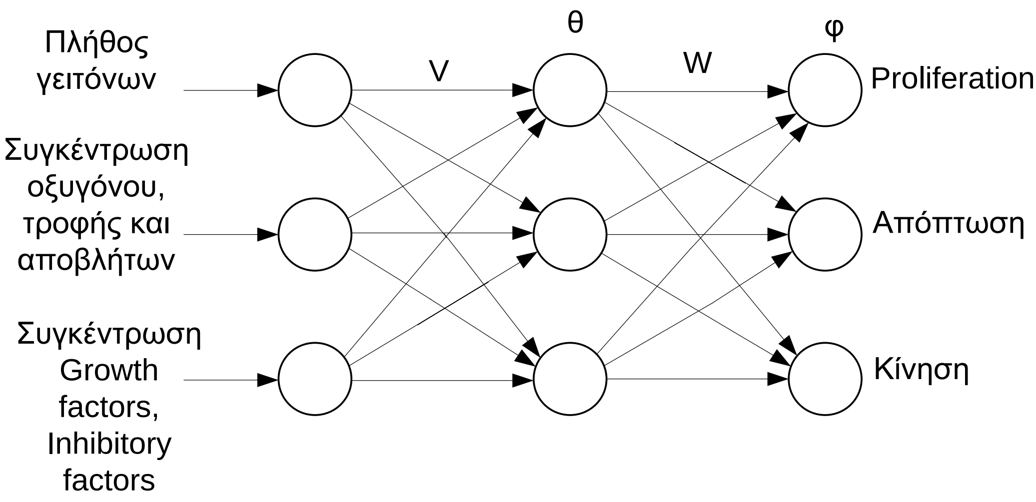
## 5. Εξομοίωση

Προκειμένου να δημιουργηθεί ένα εργαλείο το οποίο θα μπορεί να προβλέψει την πορεία του καρκίνου, έχει αναπτυχθεί ένας εξομοιωτής ο οποίος προβλέπει τη συμπεριφορά του κάθε κύτταρου στον όγκο, σύμφωνα με τις βιοχημικές συνθήκες του περιβάλλοντός του. Το βιοχημικό περιβάλλον υπολογίζεται με αναλυτικές μεθόδους σύμφωνα με τα δεδομένα που προκύπτουν από τους τύπους της ενότητας 4. Το κάθε κύτταρο προσομοιώνεται από τον πυρήνα του και το χώρο που καταλαμβάνει. Ο χώρος αυτός προσεγγίζεται από περιοχές Voronoi, (P. K. Agarwal, H. Edelsbrunner, O. Schwarzkopf, and E. Welzl, 1991) οι οποίες ωστόσο δεν μπορούν να είναι μικρότερες ενός ορίου, εκτός και αν το κύτταρο είναι σε διαδικασία απόπτωσης. Περιμετρικά της περιοχής που εξομοιώνεται τοποθετούνται κύτταρα, τα οποία αναπαριστούν τον περιβάλλοντα ιστό και αποτελούν και φυσικό όριο στην ανάπτυξη του καρκινικού όγκου.

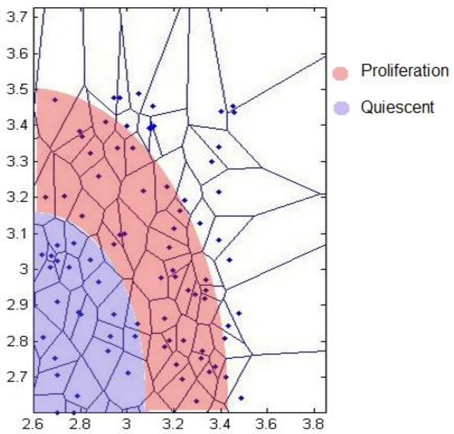



*Εικόνα 4: Τοποθέτηση κέντρων κυττάρων περιμετρικά (αριστερά) και προσέγγιση αντιστοίχων κυττάρων (δεξιά)*

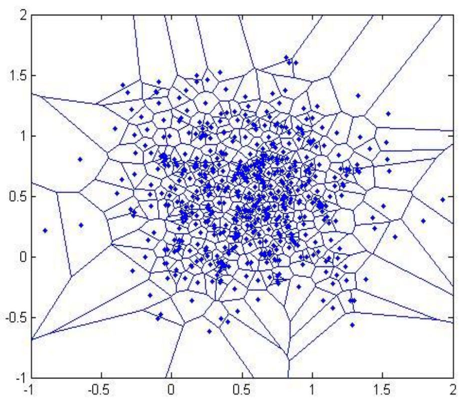
Για το κάθε κύτταρο που δεν ανήκει στον περιβάλλοντα ιστό, υπολογίζεται για κάθε διακριτή χρονική στιγμή η νέα του κατάσταση σύμφωνα με τον έξης αυτοματισμό (Thomas S. Deisboeck):




Στα αποτελέσματα των εξομοιώσεων εμφανίζονται περιοχές οι οποίες παρουσιάζουν συμπεριφορά που συμβαδίζει με τον γενικό βιολογικό κανόνα ανάπτυξης καρκινικού όγκου (Εικόνα 5.α). Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση κατά την οποία οι εξομοιώσεις εμφανίζουν και περιοχές όπου καταλαμβάνονται από κύτταρα που βρίσκονται είτε στη διαδικασία της απόπτωσης είτε νεκρωτικά, όπως προβλέπεται από τα ιατρικά δεδομένα (Εικόνα 5.β).




Εικόνα 5.α: Περιοχές καρκινικού όγκου.



Εικόνα 5.β: Ανάπτυξη καρκινικού όγκου και εμφάνιση νεκρωτικών περιοχών.

Οι παράμετροι των εξομοιώσεων όπως το μέγεθος, ο ρυθμός μίτωσης των καρκινικών κυττάρων, η κινητικότητα των κυττάρων κλπ, δεν προέρχονται από κάποια συγκεκριμένη μορφή κυττάρων ή καρκίνου, ώστε τα αποτελέσματα να είναι επαληθεύσιμα μέσω σύγκρισης με ιατρικά παραδείγματα.

## 6. Αναφορές

Thomas S. Deisboeck, Georgios S. Stamatakos (2010). Multiscale Cancer Modeling. CR-C Press.

Gernot Schaller and Michael Meyer-Hermann (2006). Continuum versus discrete model: a comparison for multicellular tumour spheroids.

Connor M & Ferguson-Smith M, (1997).Essential Medical Genetics

H. M. Byrne (1999), The Role of Mathematics in Solid Tumor Growth, Math. Today, 35, pp. 59-89

M. A. Chaplain, (1996). Avascular Growth, Angiogenesis and Vascular Growth in Solid Tumors: The Mathematical Modeling of the Stages of Tumor Development. Math. Comput. Modeling., 23, pp. 47-87

T. Roose, S. J. Chapman, P. Maini, (2007). Mathematical Models of Avascular Tumor Growth, Siam, Review, Vol. 49, No 2, pp. 179-209.

Yi Jiang, (2005). A Multiscale Model for Avascular Tumor Growth. Biophys. J. 89(6), pp.3884-3894

Xie, Feng-Chang; Wei, Bo-Cheng; Lin, Jin-Guan, (2009). Homogeneity diagnostics for skew-normal nonlinear regression models, Stat. Probab. Lett. 79, No. 6.

Ma, Xiang; Zabaras, Nicholas, (2009). An adaptive hierarchical sparse grid collocation algorithm for the solution of stochastic differential equations, J. Comput. Phys. 228, No. 8, pp 3084-3113

Hsu, Ying-Lin; Lee, Ssu-Lang, Ke, Jau-Chuan, (2009). A repairable system with imperfect coverage and reboot Bayesian and asymptotic estimation, Math. Comput. Simul. 79, No. 7, pp 2227-2239

Alam, Md.Moudud, Carling, Kenneth, (2008). Computationally feasible estimation of the covariance structure in generalized linear mixed models, J. Stat. Comput. Simulation 78, No. 11-12, 1229-1239

Tiina Roose, S. Jonathan Chapman, Philip K. Maini, “Mathematical Models of Avascular Tumor Growth”, SIAM REVIEW Vol. 49,No . 2,pp . 179–208

H. M. and Chaplain, M. A. J.(1998). Necrosis and apoptosis: distinct cell loss mechanisms in a mathematical model of avascular tumour growth. Computational and Mathematical Methods in Medicine, 1: 3, pp 223 —235

Vittorio Cristini • Xiangrong Li, John S. Lowengrub • Steven M. Wise, (2009). Nonlinear simulations of solid tumor growth using a mixture model: invasion and branching, J. Math. Biol. 58:723–763

R. P. ARAUJO AND D. L. S. MCELWAIN, (2004). AHistory of the Study of Solid Tumour Growth: The Contribution of Mathematical Modelling, Bulletin of Mathematical Biology 66

R. KANSAL, S. TORQUATO, G. R. HARSH IVA, E. A. CHIOCCAEB AND T. S. DEISBOECK, (2000). Simulated Brain Tumor Growth Dynamics Using a Three-Dimensional Cellular Automaton. Journal Theory Biol. 203, pp 367-382

P. K. Agarwal, H. Edelsbrunner, O. Schwarzkopf, and E. Welzl, (1991). Euclidean minimum spanning trees and bichromatic closest pairs. Discrete Comput. Geom.,6(5):407–422.

Εικόνα 2: Nature Reviews, Molecular cell biology

Εικόνα 3:
http://www.sparknotes.com/biology/cellstructure/intracellularcomponents/section1.rhtml
http://en.wikipedia.org/wiki/File:KeratinF9.png (GNU Free Documentation License, Version 1.2)

*Σημείωση*
*Η παρούσα εργασία αποτελεί μέρος της διδακτορικής διατριβής του συγγραφέως, η οποία εκπονείται υπό την επίβλεψη της Δρ. Χατζηνικολάου Μαρίας, Αναπληρώτριας Καθηγήτριας του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου, Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας* (hadjinicolaou@eap.gr ) *και υποστηρίζεται οικονομικά από το πρόγραμμα Ηράκλειτος ΙΙ , ΕΣΠΑ*

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Β΄ΜΕΡΟΣ

*Open Education - The Journal for Open and Distance Education and Educational Technology*
*Volume 8, Number 1, 2012 Section one © Open Education ISSN: 1791-9312*

# Επιρροή και Εμπιστοσύνη στα Κοινωνικά Δίκτυα

# Influence and Trust in Social Networks

**Ειρήνη Βουτσκόγλου**
Μαθηματικός, Πληροφορικός
Μεταπτυχιακή φοιτήτρια του ΕΑΠ
στην Μεταπτυχιακή Εξειδίκευση
στα Πληροφοριακά Συστήματα

Influence = Επιρροή
Οι ορισμοί του Influencer ποικίλουν χωρίς να διαφέρουν ιδιαίτερα.

Influential ή Influencer είναι αυτός που μπορεί να μας επηρεάσει, κι είναι ήδη αρκετά τα εργαλεία που αναλαμβάνουν την απόδειξη ενός τέτοιου χαρακτηρισμού.

Εμπιστοσύνη είναι ένα ειδικό επίπεδο υποκειμενικής πιθανότητας κατά το οποίο ένα αρχικό σύστημα θα εκτελέσει μία συγκεκριμένη ενέργεια πριν μπορέσουμε να παρακολουθήσουμε αυτή την ενέργεια και σε ένα πλαίσιο όπου επηρεάζεται η δική μας δραστηριότητα.[6]

Ποιος επηρεάζει ποιον, για ποιον λόγο, ποιος είναι άξιος εμπιστοσύνης και πώς η τεχνολογία μπορεί να βοηθήσει σε αυτό το νέο περιβάλλον κοινοτήτων όλες τις ηλικίες και με ποικίλους στόχους, ήταν οι αφορμές να αναζητήσω πληροφορίες προσπαθώντας να προσδώσω μία εγκυρότητα στην πεποίθηση μου πως η Επιρροή δεν εγγυάται ούτε συνεπάγεται Εμπιστοσύνη και πως οι αλγόριθμοι υπολογισμού Επιρροής θα έπρεπε να είναι άμεσα εξαρτώμενοι από τον εντοπισμό και την μέτρηση Εμπιστοσύνης, εφόσον η Επιρροή από μόνη της σε κάποιες περιπτώσεις ίσως απλά δεν προκαλέσει το επιθυμητό αποτέλεσμα αλλά σε κάποιες άλλες ίσως αποδειχθεί επικίνδυνη.

Όπως συμβαίνει μάλιστα στις περισσότερες περιπτώσεις όπου κάποιος μελετά πολλές πηγές, οι πληροφορίες που προέκυψαν ξεπέρασαν κατά πολύ τις προσδοκίες μου και έδωσαν νέες οπτικές σε όσα μέχρι τώρα αναγνώριζα εμπειρικά.

## Οι ερμηνείες της παθητικότητας χρήστη

Στο **Influence and Passivity in Social Media [1]** η σύνδεση της επιρροής με την παθητικότητα/αδράνεια των χρηστών είναι ηχηρή επισήμανση.

«για να καταστεί κάποιος influencer δεν απαιτείται απλά να έλκει προσοχή αλλά και να ξεπεράσει την παθητικότητα χρήστη»

Η αναφορά στους χρήστες ως «κόμβους» επιβεβαίωσε την επιτακτική ανάγκη διευκρίνησης πως όταν μιλάμε για εκατομμύρια χρήστες στα κοινωνικά δίκτυα, ουσιαστικά αναφερόμαστε σε εκατομμύρια λογαριασμούς όπου αρκετοί από αυτούς αντιστοιχούν σε έναν χρήστη, άρα ο χρήστης-κόμβος είναι η καθαρή έννοια με την οποία πρέπει να αντιλαμβανόμαστε τα μεγέθη ακόμα και αν αυτά δεν προσδιορίζονται.

Ούτε η IP μπορεί να ταυτοποιήσει χρήστη - κόμβο βέβαια εφόσον από την ίδια IP μπορούν να λειτουργούν πολλοί χρήστες και έτσι χιλιάδες λογαριασμοί αλλά σχεδόν αναγκαζόμαστε να θεωρήσουμε την πρώτη θολή παραδοχή στην αξιοπιστία οποιασδήποτε μελέτης δε συμβαίνει υπό ελεγχόμενες συνθήκες.

Η παθητικότητα/αδράνεια [passivity] διέπεται από δύο ερμηνείες:

1. Αδρανείς λογαριασμοί → spammers, bots
2. Αδράνεια χρήστη-κόμβου→ η δυσκολία με την οποία αυτός επηρεάζεται από άλλους

Ο IP [Influence-Passivity] αλγόριθμος στηρίζεται σε έναν γράφο G = (N,E,W) με N κόμβους, E ακμές και βάρος ακμών W όπου τα βάρη wij για κάθε ακμή e = (I, j) αντιπροσωπεύουν την αναλογία επιρροής που ο I κόμβος επιτυγχάνει στον j προς τη συνολική επιρροή που ο I κόμβος επεχείρησε στον j , σχηματίζοντας δύο συναρτήσεις. Μία I : N → [0, 1] που παρουσιάζει την σχετική επιρροή των κόμβων στο δίκτυο και την P : N → [0, 1] που παρουσιάζει την σχετική παθητικότητα των κόμβων στο δίκτυο.

Ο IP αλγόριθμος δίνει ένα σκορ επιρροής κι ένα σκορ παθητικότητας ανάλογα με την δραστηριότητα προώθησης και είναι ο πρώτος που μελέτησα και επισημαίνει πως η δημοφιλία δεν συνεπάγεται επιρροή όπως και το αντίθετο κλονίζοντας έτσι τον μύθο των πολλών followers/friends.

Αξιοσημείωτες είναι οι παραδοχές:

- ο βαθμός επιρροής ενός χρήστη εξαρτάται από τα άτομα που επηρεάζει καθώς και την παθητικότητα τους
- ο βαθμός επιρροής εξαρτάται από το πόσο αφοσιωμένοι είναι αυτοί που επηρεάζονται
- ο βαθμός παθητικότητας ενός χρήστη εξαρτάται από την επιρροή αυτών στους οποίους εκτίθεται αλλά από τους οποίους δεν επηρεάζεται
- ο βαθμός παθητικότητας ενός χρήστη εξαρτάται από το πόσο απορρίπτει την επιρροή κάποιου σε σχέση με οποιονδήποτε από το σύνολο

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του αλγορίθμου προκύπτει ότι:

- ο αριθμός των ακολούθων [followers] ενός χρήστη που δημοσιεύει έναν σύνδεσμο έχει μικρή σχέση με τον αριθμό κλικ στον συγκεκριμένο σύνδεσμο
- ο αριθμός των RT [=Retweet = αναδημοσίευση μηνύματος στο twitter] είναι καλό μέτρο επιρροής αλλά το πλήθος των RT που δέχθηκε κάποιος στο παρελθόν δεν αποτελεί ακριβές στοιχείο για την υπόθεση μέγιστου αριθμού κλικ που μπορεί να λάβει ένας σύνδεσμος

**Η σημαντικότητα της παροχής πέρα από την ανάδραση**

Στο **Social Influence and the Diffusion of User-Created Content [2]** η επιρροή δεν μετρά μόνο τις πληροφορίες που διακινούνται σε ένα δίκτυο αλλά και τους πόρους [assets] που παρέχει ο ένας χρήστης-κόμβος στον άλλο, διαχωρίζοντας τους influencers από τους early adopters [=αυτοί που θα δοκιμάσουν/διακινήσουν πρώτοι]. Οι early adopters δεν αποδεικνύονται με μεγάλη επιρροή.

Μία σημαντική αναφορά είναι πως οι απαγορεύσεις και οι περιορισμοί στο περιεχόμενο αποτελούν τροχοπέδη εφόσον οι χρήστες επιλέγουν περιεχόμενο το οποίο μπορούν να τροποποιήσουν.

Αυτό οδηγεί σε σκέψεις όσον αφορά τους κλειστούς λογαριασμούς στα κοινωνικά δίκτυα.

Οι κλειστοί [κλειδωμένοι] λογαριασμοί ή όποιος περιορισμός πρόσβασης στο περιεχόμενο της παρουσίας ενός λογαριασμού συνήθως υπηρετεί φαιδρές λογικές αλλά υποκρύπτει κι έναν σπάνια συνειδητό αλλά λογικό σκοπό ο οποίος είναι να μη γίνεται διαθέσιμος ο λόγος τους μέσω των API των κοινωνικών δικτύων.

Η ανάγκη να επισημαίνεται πολύ συχνά πως λογαριασμός δεν σημαίνει κατ'αντιστοιχία ένας χρήστης, βεβαιώνεται από την εξής επισήμανση της μελέτης:
Για να αναγνωριστούν κόμβοι-κλειδιά, πολλά μέτρα έχουν ληφθεί υπόψη:

Degree = βαθμός: μετρά πόσο ενεργός ή δημοφιλής είναι ένας κόμβος. Ορίζεται ως ο αριθμός των άμεσων συνδέσεων που δέχεται ο κόμβος

Betweenness = ενδιαμεσότητα : μετρά πόσες φορές υπάρχει ένας κόμβος ανάμεσα στο συντομότερο μονοπάτι μεταξύ δύο άλλων

Closeness = κοντινότητα : το άθροισμα από τα μήκη των σύντομων μονοπατιών μεταξύ του κόμβου και των υπολοίπων

Σε αυτή τη μελέτη εντοπίζεται για πρώτη φορά ο όρος trust value [=βαθμός εμπιστοσύνης] ο οποίος είναι ένας κρίκος στην αλυσίδα της επιρροής, έτσι όπως τον αντιλαμβανόμουν εξαρχής.

Επίσης , σύμφωνα με το μοντέλο που αναπτύσσεται σε αυτή τη μελέτη είναι προτιμότερο η σχετικότητα υπολογισμών να στηρίζεται όχι στο σύνολο των κόμβων της κοινότητας αλλά στο σύνολο όσων εμπλέκονται με ένα συγκεκριμένο θεματικό πλαίσιο.

Σημαντικό συμπέρασμα της μελέτης:

- Ένας χρήστης-κόμβος με πολλούς δεσμούς δυσκολεύεται να διατηρήσει δραστηριότητα με όλους, οπότε οι σχέσεις γίνονται αδύναμες μειώνοντας αισθητά την πιθανότητα επιρροής.

**Η τεχνολογία πλέον διαμορφώνει συμπεριφορές**

Πολλές συμπεριφορές πλέον εξελίσσονται [ή και διαμορφώνονται] εξαιτίας της τεχνολογίας. Στο **The Social Influence Model of Technology Adoption [3]** όπου εξηγείται το social computing εντοπίζουμε: Η ενέργεια που πλέον γίνεται δυνατή χάρη στην τεχνολογία, αντιμετωπίζεται ως συμπεριφορά που έχει εμπεδωθεί στην κοινωνία.

Σύμφωνα με αυτή τη μελέτη, social influence ορίζεται ως ο βαθμός στον οποίο το άτομο αντιλαμβάνεται πως οι σημαντικοί άλλοι πιστεύουν πως αυτό πρέπει ή όχι να ενταχθεί στην ομάδα, τον βαθμό που το άτομο θεωρεί σημαντικό να ανήκει στην ομάδα, το βαθμό σημαντικότητας κάθε θέσης στην ομάδα, το βαθμό που το άτομο αποδέχεται το κύρος της ομάδας και τον βαθμό που το άτομο θεωρεί πως οι ανάγκες της ομάδας είναι σημαντικότερες από τις ανάγκες του ατόμου.

Το επόμενο βήμα είναι να εντοπίσουμε την βαρύτητα της εμπιστοσύνης, η οποία εύλογα υπονοείται ίσως σε μία ομάδα - με επιφυλάξεις - αλλά όχι σε ένα δίκτυο.

**Ανάγκη για ασφάλεια**

Όπως πολύ σωστά επισημαίνεται στο **Supporting Trust in Virtual Communities [4]**:

Στην εποχή μας δεχόμαστε περισσότερη πληροφορία από όση μπορούμε να διαχειριστούμε, βιώνουμε αβεβαιότητα και αναγκαζόμαστε να πάρουμε ρίσκα. Μέσα σε όλα αυτά στηριζόμαστε στην εμπιστοσύνη που είναι η βάση όλων των κοινωνικών συναναστροφών.

Για όποιον είναι έστω και ελάχιστα ενεργός στις κοινωνικοποιήσεις των κοινωνικών δικτύων είναι πασιφανές πως ακριβώς επειδή η εμπιστοσύνη δημιουργεί μία εσωτερική βεβαιότητα, τελικά καθίσταται ένα εργαλείο για την μείωση της πολυπλοκότητας στις συναναστροφές αναγνωρίζοντας βέβαια πως μία απόφαση εμπιστοσύνης δεν ακολουθεί πάντα την θεωρία της εκλογικευμένης επιλογής.

Αξίζει να αναφέρουμε τις παραδοχές:

- η εμπιστοσύνη ορίζεται μέσα σε ένα πλαίσιο
- υποστηρίζει θετικούς και αρνητικούς βαθμούς
- στηρίζεται σε προηγούμενες εμπειρίες
- οι πληροφορίες φήμης κυκλοφορούν/μεταδίδονται
- δεν είναι μεταθετική
- είναι υποκειμενική
- είναι δυναμική

Το **The right type of trust for distributed systems [5]** βοηθά να ολοκληρώσουμε το πλαίσιο μέσα στο οποίο μπορούμε με ασφάλεια να αντιλαμβανόμαστε την έννοια της εμπιστοσύνης.

Εμπιστοσύνη σε μία ανθρώπινη οντότητα σημαίνει πίστη πως αυτή η οντότητα δε θα φερθεί κακόβουλα.

Η εμπιστοσύνη σε ένα σύστημα είναι η βεβαιότητα για ασφάλεια.

Θεωρώντας τις μικρές ή μεγάλες κοινότητες που δομούνται από τις διασυνδέσεις λογαριασμών στα κοινωνικά δίκτυα ως συστήματα, η εμπιστοσύνη τις διαδικτυακές συναναστροφές σημαίνει βεβαιότητα πως αυτός που εμπιστεύεται νιώθει ασφαλής.

Και νιώθει ασφαλής όχι μόνο επειδή δεν προδιαγράφεται κακόβουλη πρόθεση πριν την επίτευξη εμπιστοσύνης αλλά και μετά, ένα στοιχείο ιδιαίτερα σημαντικό που θα αναλύσω στα Τελικά Συμπεράσματα.

Το μοντέλο αυτής της μελέτης καταλήγει πως συνεπαγωγικά προκύπτει ότι ο ασφαλέστερος ίσως τρόπος να προφυλαχθεί κανείς από την κακόβουλη εκμετάλλευση εμπιστοσύνης είναι η απόκρυψη των σχέσεων εμπιστοσύνης με τους υπολοίπους, στοιχείο που προβληματίζει ιδιαίτερα και επίσης δεικνύεται στα Τελικά Συμπεράσματα.

**Παράμετροι Εμπιστοσύνης**

Τι συμβαίνει όμως όταν τα δίκτυα αντιμετωπίζουν αβεβαιότητα σε θέματα ασφάλειας;

Προστρέχουν στα Recommendations [=Συστάσεις] σύμφωνα με το **A Distributed Trust Model [6].**

Ενώ πάντα θα υπάρχουν κρυφοί [συναισθηματικοί ή άλλου είδους] παράγοντες στην απόφαση εμπιστοσύνης, επιτρέποντας στο σύστημα να επιλέξει τους recommenders του, αυτό ενισχύει το κύρος των συστάσεων.

Έτσι , εκτός από την άμεση εμπιστοσύνη [Direct Trust] από έναν κόμβο σε έναν άλλο [ή και από ένα σύστημα σε ένα άλλο], υπάρχει και το Recommender trust relationship [=η εμπιστοσύνη τις συστάσεις αυτού που «εγγυάται»].

Η συγκεκριμένη μελέτη μεταξύ άλλων, παρουσιάζει ακριβείς κατηγοριοποιήσεις και τιμές στο θέμα εμπιστοσύνης και συστάσεων, όπως κι ένα σαφή ορισμό της Φήμης:

Reputation = (Name, Trust-Category, Trust-Value)

την οποία συνδέει με την Σύσταση ως εξής:

Recommendation [σύσταση] είναι η πληροφορία εμπιστοσύνης που επικοινωνείται [μεταδίδεται] μεταφέροντας πληροφορία φήμης [ιστορικού παρουσίας].

Αν και η σειρά με την οποία μελέτησα και ανέφερα εδώ όλες τις εργασίες ήταν καθαρά τυχαία, η κατάληξη στο **Cultivating Trust and Harvesting Value in Virtual Communities [7]** βοήθησε στη σύμπλευση αυτών των πληροφοριών προς μία ολοκληρωμένη και ξεκάθαρη πρόταση περί της αναγκαιότητας απόδειξης εμπιστοσύνης πριν την απόδοση του χαρακτηρισμού σε έναν Influencer.

Μέσα στην συγκεκριμένη μελέτη μπορεί να βρει κανείς μία λίστα μετρήσιμων ιδιοτήτων οι οποίες είναι ακριβώς οι πληροφορίες που θα έπρεπε να διαθέτει κάθε αλγόριθμος υπολογισμού/απόδοσης επιρροής.

Οι περισσότερες από αυτές τις ιδιότητες αφορούν την αμοιβαία ωφέλεια, την ακεραιότητα, την καλή προαίρεση, την εμπιστοσύνη σε ενέργειες μετά την επίδοση εμπιστοσύνης, την εγκυρότητα ή την αξία των πληροφοριών που διαμοιράζονται, την διαδραστικότητα με το υπόλοιπο δίκτυο ακόμα και την διάθεση/συχνότητα διαμοιρασμού προσωπικών πληροφοριών.

Πριν προχωρήσω στα Τελικά Συμπεράσματα, θα αναφέρω εν συντομία τρεις γνωστές υπηρεσίες μέτρησης Επιρροής.

**Υπηρεσίες Μέτρησης Επιρροής**

**Klout**

Το Klout υποστηρίζει πως μετρά την ικανότητα να προκαλούμε δραστηριότητα.

Κάθε φορά που δημιουργούμε περιεχόμενο και προκαλούμε συμμετοχή άλλων, επηρεάζουμε.

Υπολογίζει:

True reach [ =έκταση]

- Ο αριθμός των ανθρώπων που επηρεάζουμε
- Οι spam λογαριασμοί και τα bot μένουν εκτός
- Ποιοι αντιδρούν στο περιεχόμενο μας με απόκριση ή διαμοιρασμό

Amplification [=ενίσχυση]

- Πόσο επηρεάζουμε
- Πόσοι αντιδρούν ή διαμοιράζουν;

Network [=δίκτυο]

- Η επιρροή των ανθρώπων που επηρεάζουμε [στο true reach]
- Πόσο συχνά επηρεάζουμε άλλους με υψηλό klout score

Το Klout score υπολογίζεται στη κλίμακα από 1 έως 100.

Εμπλεκόμενα κοινωνικά δίκτυα:

Twitter [μετρά mention, RTs]

Facebook [μετρά σχόλια, like & updates]

Linkedin [σχόλια, likes]

Foursquare [συμβουλές, to do, done]

Google+ [σχόλια, διαμοιρασμοί, +1]

Επισημαίνεται πως:

- Η ποσότητα του περιεχομένου λαμβάνεται μεν υπόψη αλλά σε σχέση με την συμμετοχή που προκαλούμε
- Δεν τιμωρούμαστε όταν συνδεόμαστε με κάποιον που έχει χαμηλό klout score.
- Προσθέτοντας δίκτυα αυξάνουμε το klout score

Πληροφορίες- Διευκρινίσεις:

- Δεν βρίσκει απλά τα θεματικά πλαίσια αλλά δίνει τη δυνατότητα να προσθέσει ο χρήστης νέα.

- Επιδίδοντας +K δείχνουμε πόσο μας επηρεάζει κάποιος σε ένα θεματικό πλαίσιο
- Δίνει τη δυνατότητα να επιλέξουμε μεταξύ δύο λογαριασμών, ποιος επηρεάζει περισσότερο
- Υπάρχει επιλογή προσθήκης λογαριασμού που επηρεάζει [add an influencer]

**PeerIndex**
Το PeerIndex υποστηρίζει πως μετρά Online Κύρος [authority] δηλαδή Επίδραση ενεργειών και έκταση ιστορικού παρουσίας, συμπεριλαμβανομένης φήμης.

Θεματικά Πλαίσια [topics] :
- Εντοπίζονται πολλά, εμφανίζονται τα 5 πιο ενεργά
- Σκορ μετήχησης υπολογίζεται για όλα

Υπολογίζει:
Authority – κύρος
- Μέτρηση εμπιστοσύνης, πόσο στηρίζονται οι άλλοι στις συστάσεις και τη γνώμη μας σε γενικότερα πλαίσια και σε ειδικά.
- Υπολογίζεται Κύρος για 8 βασικά θεματικά πλαίσια και δίνεται διάγραμμα
- Το σκορ του Κύρους είναι συγκριτικό με των υπολοίπων

Audience – κοινό:
- Μέγεθος κοινού συγκριτικά με άλλων
- Λαμβάνεται υπόψη η δεκτικότητα του κοινού [οι αντιδράσεις τους] άρα spam, bots θα έχουν αρνητικό αντίκτυπο

Activity – Δραστηριότητα
- Το μέτρο του πόσο σχετιζόμαστε με τα θεματικά πλαίσια του δικτύου μας
- Η υψηλή δραστηριότητα [φλυαρία] μπορεί να προκαλέσει κόπωση στο κοινό και αυτό να λειτουργήσει αρνητικά
- Τα μέλη δεν διαδραστικοποιούνται με όσους είναι ανενεργοί για πολύ καιρό
- Η Δραστηριότητα έχει σχέση με την δραστηριότητα της κοινότητας/δικτύου, όσο μεγαλύτερη η δραστηριότητα της κοινότητας τόσο μεγαλύτερη πρέπει να είναι και η δική μας

Εμπλεκόμενα κοινωνικά δίκτυα:
Twitter
Facebook
Quora
Blog [blogspot]
Επισημαίνει πως:
- Δημοφιλία δε συνεπάγεται κύρος

Πληροφορίες-Διευκρινίσεις:
- Όλα τα σκορ ανάγονται σε κλίμακα από 1 έως 100 και είναι συγκριτικά με το σύνολο δείχνοντας θέση σχετική με τα μέγιστα σκορ.

Π.χ. ένα σκορ 55 με 60 σημαίνει πως είσαι στο top 20% κύρους σε ένα συγκεκριμένο topic άρα πάνω από το 80% των υπολοίπων.

**Tweeter Grader**
Το TweeterGrade υποστηρίζει πως μετρά τι είδους επίδραση [impact] έχει ένας λογαριασμός.
Υπολογίζει:

Αριθμός followers τον οποίο ερμηνεύει ως μέτρηση έκτασης [= measuring reach]
Power of followers εννοώντας λογαριασμούς που μας ακολουθούν και έχουν υψηλό tweeter grade
Updates [=μηνύματα, tweets]
Updates regency που σημαίνει την συχνότητα δραστηριότητας
Follower/Following ratio : αναλογία πόσοι μας ακολουθούν/ πόσους ακολουθούμε.
Όσο πιο μεγάλος ο λόγος τόσο θετικότερο το αποτέλεσμα υπολογισμού του tweeter grade. Το βάρος αυτής της τιμής όμως μειώνεται όταν ο χρήστης αρχίζει και κερδίζει βαθμούς εξαιτίας αυτού σε άλλους παράγοντες [π.χ. όταν αυξάνουν οι followers ή το engagement , το follower/following ratio μετρά λιγότερο]

Engagement = συμμετοχή
Ουσιαστικά μετρά τον αριθμό των αναδημοσιεύσεων [RT] λαμβάνοντας υπόψη και από ποιους γίνεται η αναδημοσίευση.
Επισημαίνεται πως:
- η αποκάλυψη του αλγορίθμου ενέχει τον κίνδυνο να χρησιμοποιεί από κάποιον ώστε να κατασκευαστεί το σκορ
- ο αριθμός followers λαμβάνεται υπόψη με την λογική πως αν δύο λογαριασμοί είχαν όλους τους άλλους παράγοντες ίσους τότε αυτός με τους περισσότερους followers θα είχε πιθανά μεγαλύτερη δυναμική. Το γεγονός πως δεν έχουν όλοι τους υπόλοιπους παράγοντες ίσους ενισχύει την ανεξαρτητοποίηση του τελικού βαθμού από τον αριθμό των followers.

Πληροφορίες-Διευκρινίσεις:
- Οι παράγοντες δεν έχουν το ίδιο βάρος
- Υπολογισμός τελικού βαθμού: ο βαθμός υπολογίζεται βάσει των παραπάνω παραγόντων και ύστερα συγκρίνεται με το σύνολο της κοινότητας. Ο βαθμός είναι το ποσοστό των χρηστών που έχουν ίσο ή χαμηλότερο σκορ π.χ. βαθμός 80 σημαίνει πως 80% των χρηστών πήραν μικρότερο βαθμό.
- Ranking είναι η θέση στη λίστα μεταξύ των υπολοίπων π.χ. θέση 5000 σημαίνει πως 4999 έχουν μεγαλύτερο σκορ

**Συμπεράσματα:**

1. Στα Κοινωνικά Δίκτυα συμμετέχουν Λογαριασμοί. Όχι Χρήστες. Ένας Λογαριασμός δεν είναι ένας Χρήστης. Ένας Χρήστης μπορεί να λειτουργεί πολλούς Λογαριασμούς. Η αναφορά σε διακριτή ανθρώπινη οντότητα γίνεται με τον όρο Χρήστης-Κόμβος ο οποίος νοείται ως αντιστοίχηση σε IP το οποίο αποτελεί θολή παραδοχή όμως εφόσον από μία IP μπορούν να λειτουργούν πολλοί χρήστες με πολλούς λογαριασμούς ο καθένας.
2. Η Εμπιστοσύνη είναι μετρήσιμη. Μεταβαλλόμενη όπως και η Επιρροή αλλά μετρήσιμη. Η μέτρηση της μπορεί να προκύψει αφενός από τον ορισμό του e-trust που συναντά κανείς στο semantic web [Η εμπιστοσύνη του μέρους A σε ένα μέρος B για μια υπηρεσία X, είναι η μετρήσιμη «πίστη» του A ότι το B συμπεριφέρεται αξιόπιστα για ένα ορισμένο χρονικό διάστημα μέσα σε ένα πλαίσιο που καθορίζεται (σε σχέση με την υπηρεσία X)], αφετέρου από μετρήσιμες ιδιότητες που μπορούν να δοθούν ως πληροφορίες από άλλους χρήστες-κόμβους ενεργοποιώντας την αλυσίδα του Ιστορικού Παρουσίας [ =Φήμη] και των Συστάσεων.
3. Η Εμπιστοσύνη μεταξύ των κόμβων μίας ομάδας είναι δεδομένης θετικότητας χωρίς αυτό να εγγυάται όμως την διάρκεια της αλλά ούτε και την δυναμικότητα

της στον υπολογισμό Επιρροής. Οι χρήστες τείνουν να αντιδρούν αρνητικά στον ελιτισμό των ομάδων οι οποίες εύκολα φαντάζουν γκέτο των κοινωνικών δικτύων τα οποία αυτό-απομονώνονται.

4. Η Παθητικότητα χρήστη είτε αυτή ερμηνεύεται ως αδράνεια είτε ως κόμβος που αντιστέκεται σε επηρεασμό, παίζει πολύ σημαντικό ρόλο. Στην πρώτη περίπτωση [υψηλά παθητικών χρηστών] οι αλγόριθμοι θα πρέπει να βαθμολογούν αρνητικά το πλήθος ακολούθων [degree] όπως και την δυναμική που εύλογα θα παρουσιάζεται από αναφορές [mention] ώστε οι χρήστες να εξαναγκάζονται σε εκκαθάριση [block] παρέχοντας έτσι πληροφορία σύστασης στο κοινωνικό δίκτυο. Στην δεύτερη περίπτωση, το θέμα που προκύπτει είναι απείρως περίπλοκο αλλά σημαντικό. Για ποιο λόγο δεν επηρεάζεται ένας χρήστης-κόμβος; Ποια είναι η δραστηριότητα του; Όταν επηρεάζεται, ποια είναι η Ενδιαμεσότητα του [Betweenness] και η Κοντινότητα του [Closeness]; Ένα αυστηρό πλαίσιο σε αυτές τις ερωτήσεις θα εξαναγκάσει σε μείωση των πολλαπλών λογαριασμών [περσόνων] οι οποίοι σε μικρά διαδικτυακά περιβάλλοντα , όπως το ελληνικό, συχνά προάγουν συνέπειες οι οποίες είτε δεν υφίστανται είτε είναι απόλυτα κατασκευασμένες.
5. Ο Βαθμός Επιρροής πρέπει να υπολογίζεται καθημερινά ως πιο ευμετάβλητος από τον Βαθμό Εμπιστοσύνης ο οποίος πρέπει να υπολογίζεται κατά διαστήματα ώστε να εξαναγκάζονται οι χρήστες σε πιο συνετές κρίσεις [= όσο πιο γρήγορα γνωρίζει κανείς πως μπορεί να διορθώσει μία κρίση του, τόσο λιγότερο προβληματίζεται στην δήλωση της].
6. Πράγματι σε αρκετές περιπτώσεις η διάθεση απομόνωσης μίας πληροφορίας χρήστη-κόμβου ίσως λειτουργεί θετικά [όπως υπό τη συνθήκη πως επηρεαζόμαστε να εμπιστευθούμε ευκολότερα αυτόν που βλέπουμε πως εμπιστεύεται κάποιος της εμπιστοσύνης μας] δίνοντας μεταθετική ιδιότητα τόσο στην Σύσταση όσο και στην ίδια την Εμπιστοσύνη [ενώ μεταθετικότητα δεν υπάρχει], για αυτό κρίνω σημαντικό το Recommender trust relationship [=η εμπιστοσύνη στις συστάσεις αυτού που «εγγυάται»] και φυσικά αντιλαμβάνομαι την οξύμωρη απόχρωση της κατάληξης πως για να μετρηθεί Επιρροή θα πρέπει αφενός οι χρήστες-κόμβοι να προσφέρουν τις απαραίτητες πληροφορίες [ιστορικό παρουσίας, συστάσεις], αφετέρου να είναι όσο πιο αντικειμενικοί και ..ανεπηρέαστοι γίνεται.
7. Όλοι οι μετρήσιμοι παράγοντες των αλγορίθμων υπολογισμού επιρροής και εμπιστοσύνης οφείλουν να φέρουν βάρη τα οποία επίσης θα είναι μεταβλητά μέσα από συναρτήσεις όπου θα βεβαιώνεται αλληλο-εξάρτηση των παραμέτρων.
8. Οι κλειδωμένοι λογαριασμοί θα πρέπει να προσδίδουν αύξηση στον βαθμό Παθητικότητας ή να επωμίζονται μία νέα ερμηνεία Παθητικότητας ως υποψία κακόβουλης χρήσης της εμπιστοσύνης αφού αυτή μετρηθεί και αποδοθεί. Να υπενθυμίσω πως ένα από τα θέματα που θίχτηκαν παραπάνω ήταν πως μερικές φορές η κακόβουλη συμπεριφορά εμφανίζεται όχι πριν την εμπιστοσύνη αλλά εξαιτίας αυτής. Πόσο εύκολα θα εμπιστευόσασταν κάποιον ο οποίος είναι κλειδωμένος σε ένα κλουβί και σας μιλά ενώ εσείς κρατάτε ένα μικρόφωνο στη μέση ενός σταδίου;…
9. Κάθε χρήστης στο διαδίκτυο θα πρέπει να μπορεί να παρουσιάσει ανά πάσα στιγμή μέτρηση Επιρροής και Εμπιστοσύνης όσο απόλυτο και αν ακούγεται αυτό. Ένα τέτοιο στοιχείο διαδικτυακής ταυτότητας θα λειτουργούσε προς όφελος ενός ασφαλέστερου περιβάλλοντος συναναστροφών. Για αυτό το λόγο και δικαιολογείται η διασύνδεση όλων των λογαριασμών με τις υπηρεσίες

μέτρησης επιρροής [klout etc.] ανεξάρτητα με το αν ενεργοποιηθεί ποτέ από τον χρήστη αυτή η διασύνδεση.

10. Το Klout καταβάλει πολλές και φιλότιμες προσπάθειες να μετρήσει ακριβώς αυτό που δηλώνει. Η εμπειρική παρατήρηση αποδεικνύει πως δεν το κατορθώνει, αποδίδοντας εσφαλμένα υψηλό βαθμό στην φλυαρία ή στον κατασκευασμένο πιθανά αριθμό ακολούθων αλλά αναγνωρίζω πως κατά τις δηλώσεις πρόθεσης, ο αλγόριθμος τους βρίσκεται πιο κοντά στη μέτρηση και προσμέτρηση Εμπιστοσύνης από ό,τι όλοι οι υπόλοιποι κι αυτό επειδή δίνει πολλές δυνατότητες στους χρήστες να συνεισφέρουν σε πληροφορία σύστασης και όχι μόνο.
11. Επιβάλλεται η επισήμανση πως πολλοί χρήστες στο Klout ερμηνεύουν την επίδοση του +K ως επιβράβευση σε έναν άλλο χρήστη ενώ σημαίνει κάτι εντελώς διαφορετικό.
12. Το PeerIndex δεν αναφέρει [όπως και το Klout] αν υπάρχει διαφοροποίηση στη βαρύτητα των παραμέτρων της αλλά καταλήγω πως οι παράμετροι είναι λίγοι και τουλάχιστον στην περίπτωση της μέτρησης του Κοινού, αμφίβολης σημαντικότητας.
13. Το TweeterGrader αν και δηλώνει πως υπάρχουν διαβαθμίσεις βαρύτητας στις παραμέτρους του, αντιλαμβάνομαι πως επιβραβεύει ακριβώς όσα είναι επίφοβα είτε για λάθος ερμηνείες είτε ως κατασκευασμένες μετρήσεις.

Αποτελεί απόλυτη πεποίθηση μου πως το διαδίκτυο με τα εργαλεία και τα μέσα του προκαλεί, διαμορφώνει και εξελίσσει συμπεριφορές συχνά όχι μόνο στους συμμετέχοντες χρήστες αλλά και στους εκτός διαδικτύου εφόσον οποιαδήποτε βιωματική εμπειρία εντός διαδικτύου μεταφέρεται εύκολα [η αρχή του word of mouth] στα συμβατικά περιβάλλοντα και άρα είναι αδήριτη ανάγκη να αξιολογούνται οι δραστηριότητες και συνεπαγωγικά οι συμπεριφορές εφόσον πάνω από κάθε τεχνολογία πάντα θα βρίσκεται η αυτό-διαχείριση των χρηστών στην οποία συνετό είναι να γίνονται μετρήσιμες συστάσεις.

## Πηγές

**1. Influence and Passivity in Social Media [** Daniel M. Romero Cornell University Center for Applied Mathematics Ithaca, New York, USA, Wojciech Galuba EPFL
Distributed Information Systems Lab Lausanne, Switzerland, Sitaram Asur Social Computing Lab HP Labs Palo Alto, California, USA , Bernardo A. Huberman
Social Computing Lab HP Labs Palo Alto, California, USA]

**2. Social Influence and the Diffusion of User-Created Content [** Eytan Bakshy University of Michigan School of Information Ann Arbor, MI, Brian Karrer
University of Michigan Department of Physics Santa Fe Institute Santa Fe, NM, Lada A. Adamic University of Michigan School of Information Center for the Study of
Complex Systems Ann Arbor, MI]

**3. The Social Influence Model of Technology Adoption** [by Sandra A. Vannoy and Prashant Palvia]

**4. Supporting Trust in Virtual Communities [**Alfarez Abdul-Rahman Department of Computer Science, University College London, Gower Street, London WC1E 6BT,
United Kingdom, Stephen Hailes Department of Computer Science, University College London, Gower Street, London WC1E 6BT, United Kingdom]

**5. The right type of trust for distributed systems** [Audun Josang Department of Telematics The Norwegian University of Science and Technology N-7034 Trondheim]
Cultivating Trust and Harvesting Value in

**6. A Distributed Trust Model** [Aifarez Abdui-Rahman & Stephen Hailes Department of Computer Science, University College London, Gower Street. London WC1 E 6BT, United Kingdom.]

**7. Cultivating Trust and Harvesting Value in Virtual Communities** [Constance Elise Porter Department of Marketing, Mendoza College of Business, University of Notre Dame,
Notre Dame, Indiana 46556, Naveen Donthu Department of Marketing, Robinson College of Business, Georgia State University, Atlanta, Georgia 30303]
**8. Klout** http://klout.com/corp/kscore , http://klout.com/#/understand/score
**9. PeerIndex** http://www.peerindex.com/help/scores
**10. Tweeter Grader** http://graderblog.grader.com/twitter-grader-api/bid/19046/How-Does-Twitter-Grader-Calculate-Twitter-Rankings