Open Schools Journal for Open Science

Vol 2, No 1 (2019)

Special Issue Articles from the 1st Greek Student Conference on Research and Science

Ο ‘αριθμός’ ως δομικό στοιχείο του πολιτισμού και των μαθηματικών

Σταμάτης Γαλανός, Αλέξανδρος Γεωργούλιας, Χαράλαμπος Γιάππας, Ιωσήφ Γκογιάννος

doi: 10.12681/osj.19343

Open Schools Journal for Open Science

Volume 1

Ο ‘αριθμός’ ως δομικό στοιχείο του πολιτισμού και των μαθηματικών

Σταμάτης Γαλανός[1] , Αλέξανδρος Γεωργούλιας[1] , Χαράλαμπος Γιάππας[1], Ιωσήφ Γκογιάννος[1], Καλλιόπη Σιώπη[1]

[1]Πρότυπο Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Περίληψη

Τα μαθηματικά αναγνωρίζονται ως η επιστήμη που ασχολείται με τη μελέτη των αριθμών και των ιδιοτήτων τους. Οι αριθμοί και οι υπολογισμοί διαπερνούν τον πολιτισμό μας. Η οικονομία, η τεχνολογία και η επιστήμη εξαρτώνται από της χρήση των αριθμών. Η εργασία εστιάζει στην έννοια του αριθμού και την εξελικτική της πορεία από τον ‘αριθμό’ ως δομικό στοιχείο της πρωτόγονης αρίθμησης προς την έννοια του ‘αριθμού’ ως δομικό στοιχείο ανάπτυξης και εξέλιξης των συστημάτων αρίθμησης. Επιχειρείται η προσέγγιση της έννοιας του αριθμού όχι μόνο ως δομικό στοιχείο των μαθηματικών, αλλά και ως έννοια που σχετίζεται με την ανθρώπινη φύση και ως δομικό στοιχείο πολιτισμού.

Λέξεις κλειδιά
Αριθμός, αρίθμηση, αριθμητικά συστήματα

Εισαγωγή

Μπορούμε να αντιληφθούμε τις διάφορες επιστήμες μέσω της επιστημονικής μεθόδου που ακολουθούν και κατ’ επέκταση μέσα από τα τεχνολογικά τους επιτεύγματα που έχουν κοινωνικό, οικονομικό και πολιτιστικό υπόβαθρο. Τα μαθηματικά ως επιστήμη τα αντιλαμβανόμαστε μέσω των αριθμών, των ιδιοτήτων τους και των διαδικασιών που εμπλέκονται με αυτά. Οι αριθμοί είναι συνυφασμένοι με τα μαθηματικά και τα μαθηματικά δε θα μπορούσαν να υπάρχουν χωρίς τους αριθμούς. Αυτή η αντίληψη μας οδηγεί να αποδεχόμαστε την καθολικότητα των μαθηματικών και το ρόλο τους στις επιστήμες και να αναγνωρίζουμε τους αριθμούς ως δομικό τους στοιχείο.

Ως μαθητές αντιλαμβανόμαστε την έννοια του αριθμού, τα είδη των αριθμών και τις ιδιότητές τους μέσα από τα μαθηματικά που διδασκόμαστε κατά τη διάρκεια των σπουδών μας στις διάφορες βαθμίδες εκπαίδευσης. Όσο ανεβαίνουμε βαθμίδες εκπαίδευσης τόσο περισσότερο εμπλεκόμαστε με την έννοια του μαθηματικού αριθμού και τα αφηρημένα χαρακτηριστικά του. Ως παιδιά μένουμε έκπληκτοι όταν διαπιστώνουμε ότι έχουμε πολλές κοινές συμπεριφορές με συνομηλίκους μας σε όλο τον κόσμο για θέματα που σχετίζονται με την ιδέα, τις ιδιότητες και τους τρόπους αναπαράστασης του αριθμού όπως για παράδειγμα ότι όλα τα μικρά παιδιά, στο ερώτημα 'πόσα παιδάκια έχει η μανούλα;' αυθόρμητα χρησιμοποιούν τα δάκτυλά τους για να απαντήσουν. Μπορεί να μη θυμόμαστε ότι και εμείς το ίδιο κάναμε στην αντίστοιχη παιδική ηλικία, όμως βλέπουμε να το κάνουν όλα τα μικρά παιδιά γύρω μας. Μια άλλη αναγνωρίσιμη κοινή συμπεριφορά είναι ότι, όλα τα παιδιά του κόσμου συνηθίζουν να χαράζουν γραμμές πάνω σε χαρτί ή στο χώμα, είτε να χρησιμοποιούν βόλους ή πετραδάκια για να καταγράψουν τα γκολ που έχουν βάλει σε ένα παιχνίδι με τη μπάλα ώστε, στο τέλος του παιχνιδιού, να προκύψει ο νικητής ανάλογα με το πόσες γραμμές θα έχουν καταγραφεί δίπλα στο όνομά του ή πόσους βόλους θα έχουν συγκεντρωθεί στο σακουλάκι. Με τις γνώσεις που έχουμε ως τώρα, μπορούμε να δώσουμε μια εξήγηση για το πώς θα προκύψει ο νικητής: απλά, με τη μέτρηση του πλήθους του συνόλου των καταγεγραμμένων γραμμών ή των συγκεντρωμένων βόλων. Για να γίνει όμως η μέτρηση, πρέπει πρώτα να αριθμηθούν ένα-ένα τα γκολ (1ο, 2ο, …), στη συνέχεια να καταγραφούν και ο νικητής θα προκύψει μέσα από τη συσχέτιση του τρόπου αναπαράστασης του πλήθους των γκολ με έναν αριθμό. Αυτό σχετίζεται με την ικανότητά μας ως παιδιά να αντιλαμβανόμαστε τα πράγματα ως σύνολα (στην περίπτωση αυτή σύνολο γραμμών ή βόλων) και να καταλαβαίνουμε ότι κάθε σύνολο έχει ένα πλήθος στοιχείων που εκφράζεται από τον πληθικό του αριθμό, κάτι που το μαθαίνουμε όταν ξεκινάμε να πηγαίνουμε στο σχολείο. Τι συμβαίνει όμως στην περίπτωση του μικρού παιδιού; Αν στο ερώτημα «πόσα..;» ως απάντηση σηκώσει δυο δάχτυλα, αυτό σημαίνει ότι είναι ικανό να αριθμεί και να μετράει παρόλο που δε γνωρίζει τους αριθμούς; Γιατί όλα τα μικρά παιδιά επιδεικνύουν τον ίδιο τρόπο συμπεριφοράς; Σχετίζεται αυτή η συμπεριφορά με το κοινωνικό πλαίσιο που μεγαλώνει το μικρό παιδί ή με την εκμάθηση αυτής της συμπεριφοράς;

Ανθρωπολογικές μελέτες παρουσιάζουν ενδείξεις μαθηματικών πρακτικών, όπως η μέτρηση, η αρίθμηση, η σύγκριση, η διάταξη και η ταξινόμηση, να κάνουν την εμφάνισή τους από τα βάθη των αιώνων μέχρι και σήμερα ακόμα σε κοινωνίες αποκομμένες από το σύγχρονο πολιτισμό όπως, για παράδειγμα, η φυλή Piraha στον Αμαζόνιο (Gordon, 2004). Το γεγονός αυτό δείχνει ότι, η έννοια του αριθμού και η αρίθμηση σχετίζεται με τα πολιτισμικά χαρακτηριστικά των ανθρώπινων κοινωνιών και όχι μόνο με την ιστορία των μαθηματικών και ότι, δεν είναι μόνο μια καθαρή μαθηματική έννοια που τη διδάσκεται κάποιος κατά τη διάρκεια των βασικών σπουδών του (D'Ambrosio, 1985; Frank, et al.,2008).

Στην εργασία μας εστιάζουμε στη σχέση του αριθμού και της αρίθμησης με βάση το κοινωνικό πλαίσιο εμφάνισης και εξέλιξης τους και στη συμβολή αυτής της σχέσης στην εξέλιξη της έννοιας του αριθμού, από τον αριθμό που αντιπροσωπεύει αντικείμενα σε αυτόν τον αφηρημένο αριθμό που λειτουργεί ως δομικό στοιχείο των συστημάτων αρίθμησης.

Η αρίθμηση

Η ανάπτυξη της ικανότητας του ανθρώπου για μέτρηση και αρίθμηση προϋποθέτει την ανάπτυξη των κινητικών και λεκτικών ικανοτήτων του (Clawson, 1994). Ένα παιδί όταν γεννιέται δεν μπορεί να μετρήσει. Για να αριθμήσουμε, ως παιδιά πρέπει να τεθεί το ερώτημα «πόσα;», να θυμηθούμε τη σωστή λέξη και να την πούμε δείχνοντάς την αρχικά με τα δάχτυλά μας.

Συνεπώς, είναι αναγκαίο πρώτα να απομνημονεύουμε τις αριθμητικές λέξεις, να τις εντάξουμε στο λεξιλόγιό μας και μετά να τις συνδέσουμε με τον συγκεκριμένο αριθμό που κάθε μια τους εκφράζει. Η ύπαρξη λέξεων που δηλώνουν αριθμητικές ποσότητες περιλαμβάνονται στο βασικό λεξιλόγιο κάθε γλώσσας (Menninger, 2013), το δε πλήθος τους εξαρτάται από το πόσο πλούσια σε λέξεις είναι η γλώσσα.

Η απομνημόνευση δεν είναι μια εύκολη διαδικασία, απαιτεί χρόνο και πολύ εξάσκηση στο να αποκτηθούν μνήμες για κάθε αριθμό. Οι μνήμες αυτές μπορεί να είναι ηχητικές (αριθμός 2: δ-υ-ο), οπτικές (αριθμός 2: δυο καραμέλες στο τραπέζι) και κινητικές (αριθμός 2: δυο δάχτυλα για τα δυο παιδιά της μανούλας) (Σχήμα 1).

Σχήμα 1

Οι ηχητικές μνήμες σχετίζονται με τη γλώσσα που χρησιμοποιεί ο ενήλικας για να «πει» τον αριθμό και η ενδυνάμωσή τους εξαρτάται από την προσοχή του παιδιού στις ίδιες της λέξεις (Hughes, 1986). Οι κινητικές μνήμες που συνδέονται με τους αριθμούς τελικά κυριαρχούν καθώς, ακόμα και όταν ενηλικιωνόμαστε πολλές φορές πιάνουμε τον εαυτό μας να χρησιμοποιούμε τα δάχτυλά μας καθώς μετράμε με το νου μας.

Ο Clawson (2005) σημειώνει ότι για να την αρίθμηση χρειάζεται α) να ξέρουμε πόσα είναι, β) να αγγίξουμε ή να δείχνουμε διαδοχικά και γ) να λέμε διαδοχικά αριθμητικές λέξεις. Πρόκειται για νοητική διαδικασία και εμπλέκονται σε αυτήν εκείνες οι περιοχές του εγκεφάλου που είναι επιφορτισμένες με την αφαιρετική ικανότητα, τις διαδοχικές κινητικές δεξιότητες και τις γλωσσικές δεξιότητες. Πιο συγκεκριμένα, «η δεξιά πλευρά του εγκεφάλου αναγνωρίζει την ύπαρξη πολλαπλών αντικειμένων στο άμεσο οπτικό μας πεδίο δίνοντάς μας την αίσθηση του πλήθους των στοιχείων, ο προμετωπιαίος φλοιός μας δίνει τη δυνατότητα να σχεδιάζουμε αριθμητικές πράξεις και στο πίσω μέρος του αριστερού ημισφαιρίου συσχετίζουμε τα δάχτυλά μας με την αρίθμηση» (Clawson, 2005, σελ. 32).

Η αρίθμηση ως 1-1 αντιστοιχία

Η δυνατότητα του ανθρώπου να συγκρίνει συλλογές αντικειμένων μέσω της διαδικασίας 1-1 αντιστοίχισης είναι κάτι που τον κάνει μοναδικό ανάμεσα στα πλάσματα. Είναι το πρώτο βήμα για την αρίθμηση και τους αριθμούς μετά από τη βασική έννοια της ποσότητας. Η αρχή της ένα-προς-ένα αντιστοιχίας, αποτελεί τη βάση της χρήσης των δαχτύλων και κατ' επέκταση τη βάση της μέτρησης ως ανάγκη για απάντηση στο ερώτημα «πόσα;», και επιτρέπει τον άνθρωπο να κάνει διάκριση μεταξύ των διαφορετικών συνόλων χωρίς κατ' ανάγκη να πρέπει να δώσει μια απάντηση σε ερωτήσεις σχετικά με το «πόσο πολύ» (Clawson, 2005).

Όταν ως παιδιά μετράμε, εκχωρούμε μια ακριβώς αριθμητική λέξη σε κάθε δάχτυλο. Αφού εφοδιάσουμε το λεξιλόγιό μας με αριθμητικές λέξεις, μαθαίνουμε να τις συσχετίζουμε με τις γραπτές και συμβολικές τους αναπαραστάσεις και στη συνέχεια με τη χρήση αριθμητικών ψηφίων όταν αρχίζει η εκπαίδευσή μας στο σχολείο. Και πάλι για μια διαδικασία ένα-προς-ένα αντιστοίχισης πρόκειται.

Ο αριθμός ως δομικό στοιχείο της αρίθμησης και της μέτρησης

Η έννοια του αριθμού είναι η πιο σημαντική και θεμελιώδης μαθηματική έννοια, δεν αποτελεί επινόηση των τελευταίων χρόνων και δεν είχε πάντοτε την ίδια σημασία κατά την πορεία της μέσα στους αιώνες. Ανθρωπολογικές μελέτες ενισχύουν την πεποίθηση για την ύπαρξη μιας προϊστορικής ιδέας του αριθμού (Bunt, Jones & Bedient, 1981). Ο πρωτόγονος άνθρωπος είχε ασφαλώς την αντίληψη της ποσότητας των θηραμάτων πουν σκότωνε και των αντικειμένων που χρησιμοποιούσε, είχε την αίσθηση του χώρου και της απόστασης, αλλά δεν είχε αντιληφθεί την έννοια του αριθμού όπως την αποδίδουμε σήμερα. Για αυτόν ο αριθμός είναι συγκεκριμένος και εμφανίζεται ως ανάγκη επισήμανσης του πλήθους συγκεκριμένων πραγμάτων (Εξαρχάκος, 1993). Ο άνθρωπος άρχισε να συνειδητοποιεί την έννοια του αριθμού από τη στιγμή που παρουσιάστηκε η ανάγκη για αρίθμηση και μέτρηση αντικειμένων και επινοεί τρόπους αντιμετώπισής της. Με το πέρασμα των αιώνων ο αριθμός ως έννοια ανεξαρτητοποιείται από τη φύση των αντικειμένων στα οποία αναφέρεται και σιγά-σιγά παίρνει όλο και πιο αφηρημένη μορφή (Εξαρχάκος, 1993). Με την εισαγωγή της αφηρημένης έννοιας του αριθμού παρουσιάζεται η ανάγκη καθορισμού αριθμητικών συμβόλων. Αποτέλεσμα ήταν η ανάπτυξη αριθμητικών συστημάτων παράλληλα με την ανάπτυξη της γραφής και της ανάγνωσης.

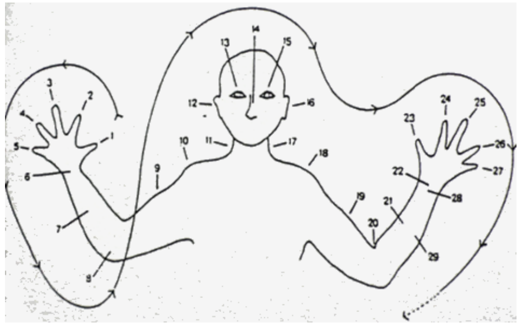
Πρακτικές αρίθμησης

Οι ρίζες τις αρίθμησης είναι κρυμμένες στην προϊστορία, όταν ο πρωτόγονος άνθρωπος άρχισε να μετρά αντικείμενα χρησιμοποιώντας ένα είδος αρίθμησης με κλαδιά ή κάνοντας χαραγές στο χώμα. Το διάστημα κατά το οποίο εμφανίστηκε η αρίθμηση οριοθετείται μεταξύ της εποχής που η πορεία του ανθρώπου διαχωρίστηκε από τους πιθήκους και του 3000 π.Χ. (Clawson, 1994). Η απλή αρίθμηση είχε χαρακτηριστικά αντιστοίχισης αντικειμένων δυο συνόλων, με το ένα από αυτά να παίζει το ρόλο του προτύπου (Εξαρχάκος, 1993). Τέτοια πρότυπα πρέπει να ήταν τα μέλη του ανθρώπινου σώματος και κυρίως τα δάχτυλα.

Αρίθμηση με τα δάχτυλα: Τα δάχτυλα έχουν χρησιμοποιηθεί από πολλούς και διαφορετικούς πολιτισμούς για να αριθμήσουν τα αντικείμενα και για να τα μετρήσουν, πολύ πριν τη γραπτή αναπαράσταση των αριθμών. Η αρίθμηση με τα δάχτυλα αποτελεί μια σημαντική πρόοδο σε ότι αφορά την έννοια του αριθμού, καθώς μπορούμε να προσθέσουμε τη διάταξη στην αρίθμησή μας. Τα δάχτυλα δεν είναι ίδια και, όταν χρησιμοποιούνται στην αρίθμηση, μετρούνται με συγκεκριμένη σειρά. Και ως εκ τούτου η αρίθμηση με τα δάχτυλα μας δίνει την ευκαιρία να εισάγουμε τους συντεταγμένους αριθμούς, οι οποίοι επειδή χρησιμοποιούνται ακολουθώντας μια συγκεκριμένη σειρά, γεννιέται η αριθμητική ακολουθία (Clawson, 2005). Ο Flegg επισημαίνει ότι οι αναφορές στα δάχτυλα είναι κοινές στις πρώτες λέξεις που χρησιμοποιήθηκαν στη θέση του αριθμού και ότι η μέτρηση με τα δάχτυλα είναι τόσο διαδεδομένη και αποτελεί μια παγκόσμια πρακτική (στο Hughes, 1986, σελ. 123). Η επίδραση των δαχτύλων στον τρόπο που σκεφτόμαστε τους αριθμούς είναι ότι τα αριθμητικό μας σύστημα βασίζεται στον αριθμό 10. Η δε μεγαλύτερη πλειοψηφία των συστημάτων που υιοθετούν κάποια βάση αρίθμησης χρησιμοποιούν το 5, το 10 ή το 20. Αυτό χωρίς αμφιβολία οφείλεται στο γεγονός ότι έχουμε πέντε δάχτυλα στο ένα χέρι, δέκα δάχτυλα στα δυο χέρια και συνολικά είκοσι δάχτυλα σε χέρια και πόδια (Hughes, 1986; Cordon, 2004).

Αρίθμηση με το σώμα: Αυτός που μετράει δείχνει πρώτα με τα δάχτυλα και καθώς αυξάνει ο αριθμός απαρίθμησης αναγκάζεται να χρησιμοποιήσει και άλλα μέρη του σώματός του (Σχήμα 2). Η φυλή Oksapmin των Παπούα στη Νέα Γουινέα μετρούν αρχίζοντας από τον αντίχειρα ενός χεριού και ύστερα συνεχίζουν δείχνοντας είκοσι επτά σημεία του υπόλοιπου χεριού, του κεφαλιού και του σώματος και τελειώνουν με το μικρό δάχτυλο του άλλου χεριού (Hughes, 1986 σ.125; Eves, 1989).

Το γεγονός ότι, η αρίθμηση με τα δάχτυλα και το σώμα μας δίνουν συντεταγμένους αλλά και πληθικούς αριθμούς αποτελεί μια σημαντική μετακίνηση προς την αφηρημένη έννοια του αριθμού.



Σχήμα 2: Η μέτρηση των Oksapmin (από τον Saxe, 1979, σελ. 39 στο Hughes, 1986, σελ. 125).

Αρίθμηση με λέξεις: Η προφορική αρίθμηση (: αρίθμηση με αριθμητικές λέξεις) αποτελεί έναν ακόμα βαθμό αφαίρεσης για τους ανθρώπους, δεν είναι μια μηχανική διαδικασία και χρειάστηκε πολύς χρόνος για να φτάσουμε να χρησιμοποιούμε αφαιρετικά το «δύο», που παριστάνεται από κάποιο ήχο, για όποιο σύνολο έχει ένα ζεύγος στοιχείων. Η ανάπτυξη των αριθμητικών λέξεων δεν εμφανίστηκε ξαφνικά μόλις οι άνθρωποι άρχισαν να χρησιμοποιούν τη γλώσσα ήταν αργή και προχώρησε σταδιακά μέχρι το σημερινό δεκαδικό σύστημα. Σιγά-σιγά οι αριθμητικές λέξεις απέκτησαν γενική ισχύ και μπόρεσαν να χρησιμοποιηθούν για τη μέτρηση όλο και περισσότερων συλλογών αντικειμένων.

Παρά το γεγονός ότι καμιά γλώσσα δε στερείται εντελώς αριθμητικές λέξεις, υπάρχει μια σημαντική ποικιλία μετρικών συστημάτων μεταξύ των υπαρχόντων πολιτισμών (Menninger, 2013) και αν τα κοιτάξουμε θα σχηματίσουμε μια ιδέα για την εξέλιξη των πρώτων αριθμητικών λέξεων (Eves, 1989). Για παράδειγμα, μια βραζιλιάνικη φυλή η Botocudos χρησιμοποιεί τις λέξεις που σημαίνουν ‘δάχτυλο» και «διπλό δάχτυλο» για να δηλώσει το «ένα» και το «δύο» αντίστοιχα και για όλους τους μεγάλους αριθμούς χρησιμοποιούν μόνο τη λέξη «πολλά» (στο Hughes, 1986 σελ. 123). Πολλές πρωτόγονες φυλές, από την Αφρική ως τη Νότια Αμερική και τη νέα Γουινέα είχαν μόνο δυο αριθμητικές λέξεις, για το ένα και το δύο, τις οποίες συνδύαζαν για να μετρήσουν μεγάλες ομάδες σε αυτό που είναι γνωστό σήμερα ως δυαδικό σύστημα αρίθμησης. Για παράδειγμα, η φυλή Γκουμουλγκαλ στην Αυσταλία χρησιμοποιούσαν για το ένα τη λέξη «ουραπόν» και για το «δύο» ήταν το «ουκασάρ», και μετρούσαν: 3 –«ουκασάρ-ουραπόν, 4: ουκαράρ –ουκασάρ κ.ό.κ.

Το επόμενο στάδιο της εξέλιξης των αριθμητικών λέξεων είναι η πενταδική αρίθμηση, που μάλλον ως ιδέα πρέπει να προέκυψε από τον αριθμό των δαχτύλων του κάθε χεριού. Σε ένα σύστημα που ανακαλύφθηκε στη Νότια Αμερική έχουμε: πέντε- ολόκληρο το χέρι, έξι-ένα στο άλλο χέρι, δέκα-δυο ολόκληρα χέρια και έντεκα –ένα στο πόδι. Όταν φτάσουμε στο είκοσι έχουμε το «ένας άνθρωπος» (Flegg,1984, στο Clawson, 2005). Το πενταδικό σύστημα εξελίχθηκε σε δυο διαφορετικά είδη αρίθμησης με αριθμητικές λέξεις: την πενταδική-δεκαδική και την πενταδική-εικοσαδική. Τα δυο συστήματα συνδυάζονταν οι δε λέξεις που χρησιμοποιούνταν ήταν ονόματα δαχτύλων ή συνδυασμός τους (Πίνακας 1).

Ίχνη αυτού βλέπουμε στο δικό μας δεκαδικό σύστημα αρίθμησης όπου οι διαφορετικοί αριθμοί που χρησιμοποιούνται λέγονται «ψηφία» από την λατινική λέξη digitals, λέξη που προέρχεται από τη λατινική digiti που σημαίνει «δάχτυλα». Η ανάπτυξη των αριθμητικών λέξεων δεν εμφανίστηκε ξαφνικά μόλις οι άνθρωποι άρχισαν να χρησιμοποιούν τη γλώσσα ήταν αργή και προχώρησε σταδιακά μέχρι το σημερινό δεκαδικό σύστημα. Σιγά-σιγά οι αριθμητικές λέξεις απέκτησαν γενική ισχύ και μπόρεσαν να χρησιμοποιηθούν για τη μέτρηση όλο και περισσότερων συλλογών αντικειμένων.

Πενταδική-δεκαδική αρίθμηση	πενταδική-εικοσαδική αρίθμηση
10 -δέκα	δυο πεντάρια
15- δέκα και πέντε	τρία πενταρια
20 –δυο δεκάρια	είκοσι
25 –δυο δεκάρια και πέντε	είκοσι και πέντε
30 – τρία δεκάρια	είκοσι και δυο πεντάρια
35 – τρία δεκάρια και πέντε	είκοσι και τρία πεντάρια
40 – τέσσερα δεκάρια	δυο εικοσάρια

Πίνακας 1: Γενικευμένο σχεδιάγραμμα πενταδικής-δεκαδικής και πενταδικής-εικοσαδικής αρίθμησης, Clawson (2005), *σελ. 54.*

Ο αριθμός και οι αναπαραστάσεις του

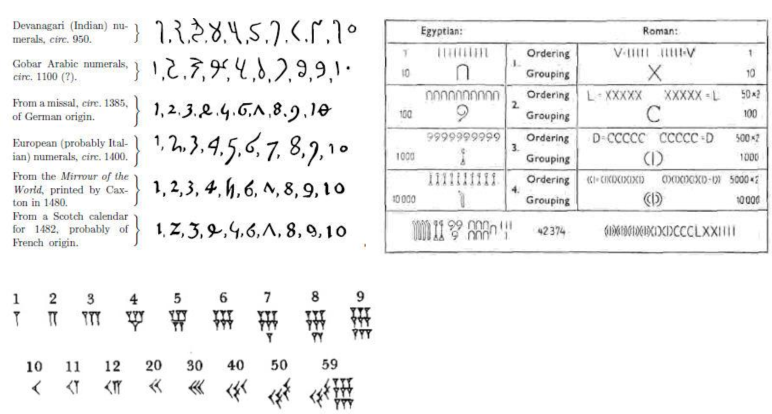
Με την εισαγωγή της αφηρημένης έννοιας του αριθμού και της μέτρησης παρουσιάζεται η ανάγκη του καθορισμού τρόπων αναπαράστασης των αριθμών.

Οι γραμμές: Η αρχή της ένα-προς-ένα αντιστοιχίας, αποτελεί την προϋπόθεση για την πιο βασική μορφή γραπτής αναπαράστασης, αυτή των γραμμών (Hughes, 1986), οι οποίες είναι από τις παλαιότερες γνωστές μεθόδους αναπαράστασης αριθμών: χαρακιές πάνω σε κόκαλα, κομμάτια ξύλου, σε κόκαλα, σε πέτρες, κόμποι δεμένοι σε σειρά, εγκοπές πάνω σε ραβδιά, συγκαταλέγονται ανάμεσα στις πρωτόγονες αναπαραστάσεις που έχουν βρεθεί. Η πρακτική της χάραξη γραμμών παρατηρείται και σήμερα σε πολλές κοινωνίες για την καταγραφή στοιχείων για μια σειρά.

Αριθμητικά σύμβολα: Με την εισαγωγή της αφηρημένης έννοιας του αριθμού παρουσιάζεται η ανάγκη καθορισμού αριθμητικών συμβόλων παράλληλα με την ανάπτυξη της γραφής και της ανάγνωσης. Αριθμητικά σύμβολα έκαναν την εμφάνισή τους κατά την 5η ,4η και 3η χιλιετία από λαούς της Ανατολής (Σουμέριοι, Ασσύριοι, Βαβυλώνιου, Αιγύπτιοι κτλ.), για την παράσταση αριθμών, καθορίστηκαν τρόποι συνδυασμού τους ώστε να αποδίδονται άλλοι μεγαλύτεροι αριθμοί και ορίστηκαν οι μεταξύ τους σχέσεις και πράξεις.

Συστήματα αρίθμησης: Αργότερα άρχισε ο χωρισμός των αριθμών σε τάξεις με βάση την αρχή: x μονάδες της 1ης τάξης (βάση του συστήματος) δίνουν μια μονάδα της 2ης τάξης, και γενικά ν μονάδες κάθε τάξης δίνουν μια μονάδα της αμέσως επόμενης τάξης. Με αυτόν τον τρόπο δημιουργήθηκαν τα συστήματα αρίθμησης. Και πάλι η 1-1 αντιστοιχία διαμορφώνει τη βάση πολλών από τα πιο πρώιμα αριθμητικά συστήματα όπως του αιγυπτιακού ιερογλυφικού, του Βαβυλωνιακού σφηνοειδούς και του ρωμαϊκού. Οι Αιγύπτιοι και οι Βαβυλώνιοι είχαν διαφορετικά σύμβολα για τις δεκάδες και τις μονάδες. Οι Βαβυλώνιοι κράτησαν το βασικό σύστημα αρίθμησης των Σουμέριων που είχε ως βάση το δέκα και το εξήντα, εγκατέλειψαν τα σύμβολα των παραστάσεων του 60 και κράτησαν δυο μόνο σύμβολα, τη σφήνα για τις μονάδες και το τρίγωνο με τις δυο ουρές, το άγκιστρο και συμβόλιζε τη δεκάδα (Σχήμα 3γ). Το σύστημα αυτό ήταν ατελές καθώς δε διέθετε σύμβολο για το μηδέν και ειδικό σύμβολο για να διακρίνονται οι ακέραιοι από τα εξηκονταδικά κλάσματα. Η Αιγυπτιακή ιερογλυφική αρίθμηση (~3000 π.Χ.) είναι δεκαδικό-θεσιακό σύστημα και υπήρχαν ειδικά σύμβολα για τις μονάδες κάθε δεκαδικής τάξης (Σχήμα 3β). Η παράσταση ενός αριθμού γινόταν με την επανάληψη του ψηφίου κάθε τάξης όσες φορές χρειάζονταν, εφαρμόζοντας την αρχή της πρόσθεσης.

Το Αλφαβητικό σύστημα αρίθμησης που δημιουργήθηκε από τους Έλληνες (~ 5ο π.Χ.) ήταν δεκαδικό και για την παράσταση των αριθμών χρησιμοποιούσε τα γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου χωρισμένα σε τάξεις: από το α έως το θ ήταν οι μανάδες, από τι ι μέχρι το π, οι δεκάδες και από το ρ μέχρι το ω οι εκατοντάδες Το Ρωμαϊκό είναι ένα μη θεσιακό σύστημα, κάθε ψηφίο έχει καθορισμένη αξία, ανεξάρτητα από τη θέση που έχει στον αριθμό (Σχήμα 3β). Το σύγχρονο σύστημα αρίθμησης, το Ινδοαραβικό, είναι ένα δεκαδικό σύστημα θέσης και χρησιμοποιεί τα γνωστά μας σύμβολα 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 δεν είναι όμως με ακρίβεια γνωστό πότε πρωτοεμφανίστηκε, που και πώς χρησιμοποιήθηκαν για πρώτη φορά τα σύμβολά του (Σχήμα 3). Από διάφορες πηγές συμπεραίνουμε ότι αυτά πρωτοεμφανίστηκαν στην Ινδία και χρησιμοποιήθηκαν πολύ με διάφορες μορφές.



Σχήμα 3: Αριθμητικά συστήματα; (α) Ινδοαραβικό – (β) Αιγυπτιακό -Ρωμαϊκό -(γ) Βαβυλωνιακό στο Menninger (2013).

Σύγχρονα Θεσιακά Συστήματα αρίθμησης: Τα συστήματα θέσης χρησιμοποιούνται σήμερα είναι τελειοποιημένα και υπακούν στις εξής αρχές: α) όλη η σειρά των αριθμών χωρίζεται σε τάξεις έτσι ώστε, ν μονάδες κάθε τάξης δίνουν μια μονάδα της αμέσως επόμενης τάξης, β) σε κάθε τάξη υπάρχει μια συγκεκριμένη μονάδα που χαρακτηρίζει την τάξη και κάθε ψηφίο x που χρησιμοποιείται για τη γραφή των αριθμών σε ένα σύστημα θέσης με βάση α, θα πρέπει x<α, δ) η αξία κάθε ψηφίου οποιουδήποτε αριθμού εξαρτάται από τη θέση του ψηφίου στον αριθμό, ε) τα ψηφία των αριθμών, γραμμένα από τα αριστερά προς τα δεξιά, παριστάνουν το πλήθος των μονάδων της αντίστοιχης τάξης και στ) η γραφή κάθε αριθμού στηρίζεται στην πολλαπλασιαστική αρχή και στην πρόσθεση.

Δεκαδικό	Πενταδικό	Διαδικό
$750=7x10^2+5x10^1+0x10^0$	$203=2x5^2+0x5^1+3x5^0$	$1101=1x2^3 1x2^2+0x2^1+1x2^0$

Πίνακας 2: Παραδείγματα Γραφής αριθμών στο Δεκαδικό, Πενταδικό και Δυαδικό σύστημα θέσης.

Στον Πίνακα 2 παρουσιάζονται παραδείγματα γραφής αριθμών στο δεκαδικό (:βάση 10, ψηφία 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9), πενταδικό (:βάση 5, ψηφία 0,1,2,3,4) και δυαδικό σύστημα θέσης (βάση 2, ψηφία 0,1),

Δεκαδικό σε Δυαδικό	Δεκαδικό σε πενταδικό
33: 2 πηλίκο 17, υπόλοιπο **0**	73: 5 πηλίκο 14, υπόλοιπο **3**
17: 2 πηλίκο 8, υπόλοιπο **1**	14: 5…πηλίκο 2, υπόλοιπο **4**
8: 2 πηλίκο 4, υπόλοιπο **0**	2: 5 πηλίκο 0 , υπόλοιπο **2**
4: 2 πηλίκο 2, υπόλοιπο **0**	
2: 2 πηλίκο 1, υπόλοιπο **0**	
1: 2 πηλίκο 0, υπόλοιπο **1**	
1 0 0 0 1 0	**2 4 3**

Πίνακας 3: Παραδείγματα μετατροπών αριθμών από το Δεκαδικό στο Δυαδικό σύστημα.

Στον Πίνακα 3 δίνονται παραδείγματα μετατροπών αριθμών από το Δεκαδικό σύστημα στο δυαδικό και πενταδικό και στο Πίνακα.4 παραδείγματα μετατροπών . αριθμών στο δεκαδικό σύστημα.

αριθμών στο δεκαδικό σύστημα.

Διαδικό σε Δεκαδικό	$100010= 1x2^5+0x2^4+0x2^3+0x2^2+1x2^1+0x2^0=$ 32+0+0+0+2+0= 34
Πενταδικό σε Δεκαδικό	40032 = $4x5^4+0x5^3+0x5^2+3x5^1+2x5^0=$ 2500+0+0+15+2=2517

Πίνακας 4: Παραδείγματα μετατροπών αριθμών από Δυαδικό –Πενταδικό στο Δεκαδικό σύστημα.

Συμπέρασμα

Το θέμα της μελέτης της έννοιας του αριθμού με βάση το κοινωνικό πλαίσιο εμφάνισης και εξέλιξης του μας δυσκόλεψε σημαντικά, καθώς ήταν διαφορετικό από αυτό της έννοιας του 'αριθμού' του οποίου τις ιδιότητες μελετάμε στο πλαίσιο των σπουδών μας καθώς απαιτούσε την αναζήτηση και μελέτη πολλών και διαφορετικών πηγών. Όμως, μας δόθηκε η δυνατότητα να αντιληφθούμε το πώς αυτή η έννοια εμφανίστηκε και εξελίχθηκε σε αυτό που σήμερα όλοι μας αντιλαμβανόμαστε ως αριθμό και αναγνωρίζουμε το ρόλο του στα μαθηματικά και την κοινωνία μας, ότι ο αριθμός συνδέεται με τη φύση του ανθρώπου να αναρωτιέται και να επιζητά να μάθει πόσα αντικείμενα υπάρχουν γύρω του και ότι η τάση αυτή του ανθρώπου έχει διαχρονικά χαρακτηριστικά, φαίνεται να κληρονομείται και παρατηρείται ως κοινή για όλα τα μέλη οποιασδήποτε κοινωνίας, με αποτέλεσμα να ενεργοποιείται η δεξιότητα του ανθρώπου για αρίθμηση και μέτρηση και η μέτρηση να ολοκληρώνεται με τη χρήση των αριθμών.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

[1] Εξαρχάκος, Θ., (1993): Διδακτική των Μαθηματικών. Αθήνα: Εκδόσεις Ελληνικά Γράμαμτα (Γ έκδοση).
[2] Bunt, L., Jones, P., Bedient, J. (1981). Οι Ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών μαθηματικών. Αθήνα: Εκδόσεις Πνευματικός.
[3] Clawson, C. (2005). Ο Ταξιδευτής των Μαθηματικών. Αθήνα: Εκδόσεις Κέδρος.
[4] Hughes, M. (1999). Τα παιδιά και η έννοια των αριθμών. Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg.
[5] Eves, H. (1989). Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών. Αθήνα: Εκδόσεις Τροχαλία.
[6] D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. For the learning of Mathematics, 5(1), 44-48.
[7] http://flm-journal.org/Articles/72AAA4C74C1AA8F2ADBC208D7E391C.pdf
Gordon, P. (2004). Numerical cognition without words: Evidence from Amazonia. Science, 306(5695), 496-499.
[8] http://staff.um.edu.mt/albert.gatt/teaching/dl/gordon04_numerical-cognition-without-words.pdf
[9] Frank, M. C., Everett, D. L., Fedorenko, E., & Gibson, E. (2008). Number as a cognitive technology: Evidence from Pirahã language and cognition. Cognition, 108(3), 819-824
[10] http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010027708001042
[11] Menninger, K. (2013).Number words and number symbols: A cultural history of numbers. Courier Corporation. (on line).