Open Schools Journal for Open Science

Vol 2, No 1 (2019)

Special Issue Articles from the 1st Greek Student Conference on Research and Science

Ο άρρητος √2=1,414213562373095 ..... και οι αποδείξεις του

Καλλιόπη Σιώπη, Ιωσήφ Γκογιάννος Γκογιάννος, Κλειώ Γκουτζάνη, Αργυρώ Δάβου, Ειρήνη Δημητρακοπούλου, Λυδία Εξάρχου

doi: [10.12681/osj.19360](https://doi.org/10.12681/osj.19360)

Open Schools Journal for Open Science

Volume 1

Ο άρρητος √2=1,414213562373095 ….. και οι αποδείξεις του

Ιωσήφ Γκογιάννος[1], Κλειώ Γκουτζάνη[1], Αργυρώ Δάβου[1], Ειρήνη Δημητρακοπούλου[1], Λυδία Εξάρχου[1], Καλλιόπη Σιώπη[1]

[1]Πρότυπο Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

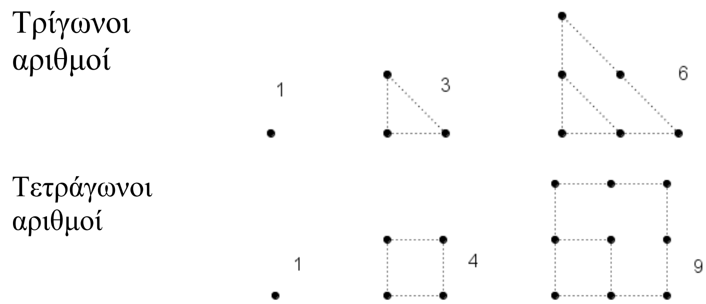
Περίληψη

Η ιστορία ξεκινά 2500 χρόνια πριν με ένα «σκάνδαλο»: η μυστική αδελφότητα των Πυθαγορείων ανακαλύπτει ότι δεν μπορεί να μετρηθεί η διαγώνιος με την πλευρά τετραγώνου με μήκος πλευράς μιας μονάδας και η άποψη των Πυθαγορείων ότι ‘όλα είναι αριθμός’ καταρρίπτεται. Η αιτία ο άρρητος αριθμός √2. Η εργασία μελετά το θέμα του αριθμού √2 από την άποψη της ιστορικής του εμφάνισης και εστιάζει στις μεθόδους και στρατηγικές απόδειξης της αρρητότητάς του. Η μελέτη της ιστορικής προέλευσης του αριθμού √2 και η ανάδειξη διάφορων μεθόδων και στρατηγικών απόδειξής του στο γεωμετρικό και στο αλγεβρικό πλαίσιο συμβάλει στην κατανόηση της φύσης του άρρητου αριθμού √2, στην εμπέδωση γνώσεων και διαδικασιών και στην οικοδόμηση νέων.

Λέξεις κλειδιά
Ρητός αριθμός, άρρητος αριθμός, σύμμετρα μεγέθη, ασύμμετρα μεγέθη, απαγωγή σε άτοπο

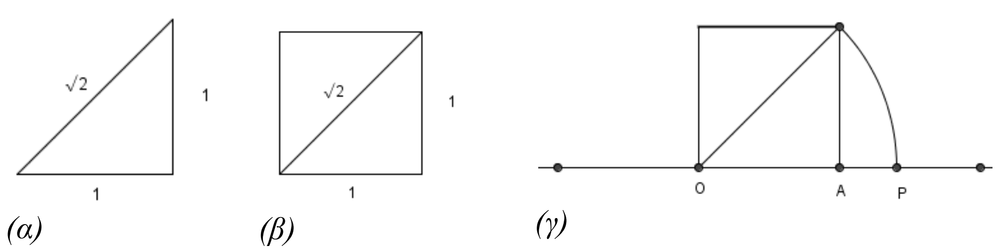
Εισαγωγή

Η ιστορία του αριθμού √2, και γενικά των άρρητων αριθμών, ξεκινά πριν 2.500 χρόνια στην Πυθαγόρεια Σχολή στην αρχαία Ελλάδα με την ανακάλυψη ότι, η διαγώνιος και η πλευρά τετραγώνου δεν έχουν κοινό μέτρο, δηλαδή δεν έχουν λόγο ίσο με το λόγο δυο ακεραίων (φυσικών) αριθμών. Η ανακάλυψη αυτή, των ασύμμετρων ποσοτήτων, υπήρξε συμφορά για την πυθαγόρεια φιλοσοφία καθώς το κύριο χαρακτηριστικό της κοσμολογίας της για τους αριθμούς (φυσικούς) ότι "τα Πάντα είναι Αριθμός" κλονίστηκε. Οι Πυθαγόρειοι σπούδαζαν τη Γεωμετρία συσχετίζοντάς την με τους αριθμούς (Bunt, et al., 1981), πίστευαν ότι οι αποστάσεις μεταξύ σημείων εκφράζονται με αριθμούς, τους λεγόμενους γεωμετρικούς αριθμούς και ότι οι λόγοι των αποστάσεων μεταξύ των σημείων πρέπει να είναι λόγοι φυσικών αριθμών (Clawson, 1994). Θεωρούσαν πολύ φυσικό να αντιστοιχίζουν ένα σημείο στον αριθμό 1, δυο σημεία στον αριθμό 2, τρία σημεία στον αριθμό 3 κ.ο.κ. Αυτό οδηγεί σε ακολουθίες που οι όροι τους αποτελούνται από σχήματα και αριθμούς (παραστατικούς αριθμούς, Bunt, et al., 1981), όπως αυτοί του Σχήματος 1.



Σχήμα 1: Τρίγωνοι – Τετράγωνοι αριθμοί

Υποθέτοντας ότι οι κάθετες πλευρές ενός ισοσκελούς τριγώνου έχουν μήκος ίσο με μια μονάδα τότε, σύμφωνα με τους Πυθαγορείους, η υποτείνουσα του τριγώνου και οι κάθετες πλευρές του θα πρέπει να συνδέονται με κάποιο λόγο ακεραίων (φυσικών) αριθμών. Χρησιμοποιώντας το πυθαγόρειο θεώρημα και τις αλγεβρικές μας γνώσεις μπορούμε να πάρουμε μια συμβολική αναπαράσταση του αριθμού που εκφράζει το μήκος x της υποτείνουσας ορθογωνίου τριγώνου πλευράς μιας μονάδας: ή   και τελικά   (1) (Σχήμα 2α). Όμως, αυτός ο αριθμός δε συνδέεται μόνο με την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου αλλά και με το μήκος της διαγωνίου τετραγώνου πλευράς ίσης με μια μονάδα (Σχήμα2β). Ο συγκεκριμένος αριθμός δε μπορεί να είναι ακέραιος (φυσικός) καθώς, η θέση του πάνω σε ευθεία αντιστοιχεί σε σημείο (P) που βρίσκεται μεταξύ των θέσεων δυο διαδοχικών ακεραίων αριθμών, του 2 και του 3, η δε απόστασή του OP από τη θέση που παριστάνει τον αριθμό 1 είναι ίση με τη διαγώνιο του τετραγώνου με πλευρά μήκους ίσης με τη μονάδα (Σχήμα 2γ). Συνεπώς, και η διαγώνιος τετραγώνου με πλευρά μονάδα δεν θα μπορεί να εκφραστεί ως λόγος δύο οποιωνδήποτε ακεραίων αριθμών.



Σχήμα 2: Γεωμετρικές αναπαραστάσεις του √2 ως υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου (α), ως διαγώνιος τετραγώνου και ως σημείο ευθείας (γ).

Την ανακάλυψη αυτή τη συνοδεύουν πολλοί θρύλοι: άλλοι αναφέρονται σε αυτήν καθ’ αυτήν την ανακάλυψη (ότι αποδόθηκε τιμή στην ανακάλυψη με τη θυσία ενός βοδιού) και άλλοι στον άνθρωπο που αποκάλυψε το μυστικό. Λέγεται ότι αυτός ήταν ο Ίππασος. Σύμφωνα με μια εκδοχή του μύθου οι θεοί οργίστηκαν και τον πνίξανε στη θάλασσα καθώς η αποκάλυψή του προσέκρουσε στον κανόνα της σχολής να μένουν εντός της αδελφότητας οι όποιες αποκαλύψεις.

Ο αριθμός √2 είναι ένας ιδιαίτερος αριθμός καθώς δεν μπορούμε να τον προσδιορίσουμε επακριβώς, παρά μόνο να τον ‘πλησιάσουμε’. Οι αρχαίου Έλληνες τον ονόμασαν άρρητο σε αντιδιαστολή με τους ακεραίους και τα κλάσματα που τους ονόμαζαν ρητούς. Ρητός θα πει εκφρασμένος αλλά και προσδιορισμένος (επικράτησε ο όρος «rational», γιατί οι ρητοί είναι λόγοι (ratios) ακεραίων). Άρρητος σημαίνει μη εκφρασμένος και μη επαρκώς προσδιορισμένος (δεν εκφράζεται ως λόγος ακεραίων (irrational) (Heath, 1931, στο Eves, 1989, σελ. 58).

Η ιστορία συνεχίζεται με τη γνωριμία μας με αυτό τον ‘αριθμό’ και με ‘παρόμοιούς’ του όταν ως μαθητές ερχόμαστε αντιμέτωποι με την επέκταση του συνόλου των ρητών στο σύνολο των πραγματικών μέσω της προσθήκης του συνόλου των ‘αρρήτων’. Με ποιον τρόπο όμως μπορεί να είμαστε σίγουροι για το τι είναι πράγματι ο αριθμός √2;

Η εργασία εστιάσει στις διάφορες μεθόδους (γεωμετρική - αλγεβρική) και στις στρατηγικές απόδειξης (προσεγγιστική - άτοπο απαγωγή) της αρρητότητας του αριθμού √2 με στόχο να εντοπιστούν τα χαρακτηριστικά του που σχετίζονται με τη φύση και η δομή του και που δίνουν απάντηση στο τι δεν είναι αυτός ο αριθμός και γιατί είναι άρρητος.

Απαιτούμενες γνώσεις

Η κατανόηση των μεθόδων και στρατηγικών απόδειξης που συζητούνται σε αυτήν την εργασία απαιτεί τη γνώση εννοιών και ιδιοτήτων, όπως:

- Ακέραιος αριθμός: αυτός που γράφεται ως άθροισμα μονάδων (π.χ. 4=1+1+1+1).
- Ρητός αριθμός: αυτός που μπορεί να παρασταθεί ως πηλίκο , όπου ακέραιοι με ή ο αριθμός που μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή λόγου. Ρητοί αριθμοί είναι οι κλασματικοί και οι ακέραιοι. Κάθε ακέραιος μπορεί να γραφεί ως κλάσμα .
- Άρρητος αριθμός: αυτός που δεν είναι ρητός, δηλαδή αυτός που δεν μπορεί να παρασταθεί ως πηλίκο ακεραίων ή που δεν μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή λόγου.

- Άρτιος αριθμός: κάθε αριθμός της μορφής , όπου ω ακέραιος ή κάθε πολλαπλάσιο του αριθμού δύο.
- Περιττός αριθμός: κάθε αριθμός της μορφής , όπου ν ακέραιος.
- Πρώτος αριθμός: αυτός που έχει διαιρέτες το 1 και τον εαυτό του.
- Πρώτοι μεταξύ τους αριθμοί: δυο αριθμοί που έχουν ως μοναδικό κοινό διαιρέτη το 1.
- Ανάγωγο κλάσμα: ο ρητός που οι όροι του είναι αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους.
- Σύμμετρα μεγέθη: αυτά για τα οποία υπάρχει ένα τρίτο ομοειδές τους μέγεθος, ίσως πολύ μικρό, που να τα μετράει, δηλαδή να χωράει ακέραιες φορές σε καθένα από τα δεδομένα μεγέθη. Για παράδειγμα, αν είναι δυο ευθύγραμμα τμήματα και υπάρχει ένα τρίτο τμήμα τέτοιο ώστε να χωράει ακέραιες φορές στα τμήματα και , δηλαδή να ισχύει και όπου φυσικοί αριθμοί, τότε τα τμήματα και λέγονται σύμμετρα. Στην περίπτωση που τα μεγέθη (ευθύγραμμα τμήματα) είναι σύμμετρα τότε ο αριθμός λέγεται λόγος των τμημάτων και και γράφεται .
- Ασύμμετρα μεγέθη: τα μη σύμμετρα, δηλαδή αυτά που δεν έχουν κοινό μέτρο.

Σύμφωνα με μια άποψη οι ρητοί είναι αυτοί που μπορούν να εκφραστούν (πεπερασμένο πλήθος ψηφίων ή απεριόριστο αλλά περιοδικά επαναλαμβανόμενο) ενώ η άρρητοι αυτοί που δεν μπορούν (Eves,1989). Σημειώνεται ότι οι αρχαίοι Έλληνες δεν γνώριζαν τους αρνητικούς αριθμούς.

Βασική πρόταση, του θέματος που διαπραγματευόμαστε, είναι η «για κάθε θετικό ακέραιο , ο είναι άρτιος αν και μόνο αν ο είναι άρτιος». Για την απόδειξη αυτής της πρότασης απαιτείται η απόδειξη της πρότασης Π1 «αν ο είναι άρτιος, τότε ο είναι άρτιος» και της πρότασης Π2 «αν ο είναι άρτιος, τότε ο είναι άρτιος».

Για την απόδειξη της πρότασης Π1 ξεκινάμε με την παραδοχή ότι ο δεν είναι άρτιος. Τότε, ο θα είναι περιττός και θα έχει την μορφή , όπου κ ακέραιος. Οπότε, , όπου ακέραιος αριθμός, ως πράξεις ακεραίων. Αυτό σημαίνει ότι ο είναι περιττός, γεγονός που έρχεται σε αντίφαση με την παραδοχή ότι ο δεν είναι άρτιος. Άρα ο είναι άρτιος. Η δε απόδειξη της πρότασης Π2 είναι: Έστω ότι ο είναι άρτιος. Τότε θα έχει τη μορφή , οπότε , όπου ακέραιος ως πράξεις ακεραίων. Άρα ο είναι άρτιος.

Μια ανάλογη ιδιότητα με αυτήν του άρτιου αριθμού ισχύει και στην περίπτωση του περιττού αριθμούς όπως: το τετράγωνο ενός περιττού αριθμού είναι περιττός αριθμός.

Η μέθοδος, κατά την οποία υποθέτουμε το αντίθετο από αυτό που πρόκειται να αποδειχθεί και μετά δείχνουμε ότι αυτό οδηγεί σε μια λογική αντίφαση, είναι γνωστή ως μέθοδος εις άτοπο απαγωγή (reduction ad absurdum), αγαπημένη μέθοδος των αρχαίων Ελλήνων (Clawson, 1994).

Αριθμητική προσεγγιστική μέθοδος της αρρητότητας του √2

Στις πρώτες τάξεις του γυμνασίου, εκτιμάται η τιμή του αριθμού √2 με τη βοήθεια αριθμητικών ρητών προσεγγίσεων, μέσω των οποίων αντιλαμβανόμαστε ότι τα ψηφία που σταδιακά συμπληρώνουν την μορφή του δε φαίνεται να έχουν κάποιο μοτίβο στη δεκαδική ακολουθία τους και ότι δε φαίνεται να υπάρχει τελευταίο ψηφίο. Αυτό ερμηνεύεται ότι ο √2 είναι μη ρητός αριθμός και υποθέτουμε ότι είναι άρρητος. Η διαδικασία των διαδοχικών προσεγγίσεων, που περιγράφεται στο σχολικό βιβλίο της Β γυμνασίου (σελ. 45), παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.

$$
\begin{array}{rcl}
1 = 1^2 & < 2 < & 2^2 = 4 \\
1{,}96 = 1{,}4^2 & < 2 < & 1{,}5^2 = 2{,}25 \\
1{,}9881 = (1{,}41)^2 & < 2 < & (1{,}42)^2 = 2{,}0164 \\
1{,}9994 = (1{,}414)^2 & < 2 < & (1{,}415)^2 = 2{,}0022 \\
1{,}99996 = (1{,}4142)^2 & < 2 < & (1{,}4143)^2 = 2{,}00024 \\
1{,}9999899 = (1{,}41421)^2 & < 2 < & (1{,}41422)^2 = 2{,}000018 \\
 & \cdots\cdots &
\end{array}
$$

Άρα:

$$
\begin{array}{c}
1 < \sqrt{2} < 2 \\
1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5 \\
1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42 \\
1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415 \\
1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143 \\
1{,}41421 < \sqrt{2} < 1{,}41422 \\
\cdots\cdots
\end{array}
$$

Σχήμα 3: Δεκαδικές προσεγγίσεις του √2 *στο* Μαθηματικά Β Γυμνασίου, σελ. 45

Η προσέγγιση του άρρητου √2 μέσω των ρητών αριθμών αντιμετωπίζεται με εργαλεία (θεωρήματα και διαδικασίες) της θεωρίας αριθμών, όπως το θεώρημα του Dirichlet, τα ενδιάμεσα κλάσματα και άλλες ειδικές έννοιες και μαθηματικές διαδικασίες, που ξεφεύγουν από το επίπεδο των σχολικών μας γνώσεων.

Κατά τον Δούναβη (2005), η προσέγγιση των άρρητων αριθμών μέσω ρητών, με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών, μπορεί να αντιμετωπιστεί από την ιδέα του «κανόνα του προσεγγιστικού σφάλματος», κάτι που βάζει ένα όριο στο πιθανό σφάλμα που γίνεται όταν ένας άρρητος, όπως ο √2, αντιμετωπίζεται από ένα κλάσμα πολύ κοντά σ' αυτόν με συγκεκριμένο παρονομαστή. Τέτοια κλάσματα μπορούν να κατασκευαστούν με κατάλληλα υπολογιστικά προγράμματα, έτσι ώστε κάθε ένα από αυτά να παρέχει καλύτερη προσέγγιση από οποιονδήποτε προηγούμενό του (Δούναβης, 2005). Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται κάποια πρώτα κλάσματα (ρητοί αριθμοί) που προσεγγίζουν την τιμή του √2 με όρους αριθμούς πρώτους μεταξύ τους.

Παρονομαστής	1	2	3	5	12	17	29	70
Κλάσμα	$1/1$	$3/2$	$4/3$	$7/5$	$17/12$	$24/17$	$41/29$	$99/70$

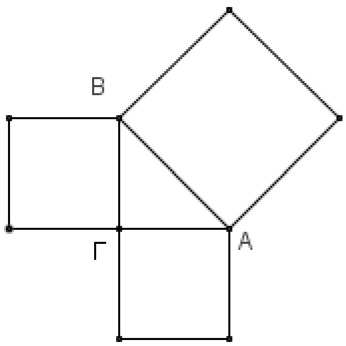
Πίνακας 1: Προσεγγιστικά κλάσματα του άρρητου√2, στο Δούναβης (2005).

Η προσεγγιστική μέθοδος της αρρητότητας του √2, δίνει την 'αίσθηση' της συμπεριφοράς των ψηφίων της δεκαδικής ακολουθίας αλλά δεν αποδεικνύει ότι ο √2 δεν είναι ρητός. Η εξακρίβωση της αρρητότητας του √2 γίνεται με αποδεικτικές μεθόδους, τη γνώση των οποίων αποκτούμε κατά τη διάρκεια των σπουδών μας στη βαθμίδα του λυκείου. Στις ενότητες που ακολουθούν παρουσιάζουμε κάποιες από τις μεθόδους και στρατηγικές απόδειξης της αρρητότητας του √2 που μπορούμε να αντιμετωπίσουμε άνετα με τις γνώσεις μας.

Γεωμετρικές αποδείξεις της αρρητότητας του √2

1η Απόδειξη: Πυθαγόρειο Θεώρημα-Έννοιες σύμμετρα /ασύμμετρα μεγέθη-Απαγωγή σε άτοπο

Εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (και ΓΑ=ΓΒ, όπως Σχήμα 4) θα ισχύει   με ΓΑ=ΓΒ τότε   (1) . Αν υποθέσουμε ότι τα τμήματα ΑΒ και ΑΓ είναι σύμμετρα μεγέθη, δηλαδή υπάρχουν φυσικοί αριθμοί κ και λ και έστω ότι δεν έχουν κοινό παράγοντα, τότε θα έχουμε: (2) όπου κ, λ δεν είναι και οι δυο άρτιοι. Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι η οποία λόγω της σχέσης (2) γίνεται: ή ισοδύναμα (4). Από τη σχέση (4) προκύπτει ότι ο είναι άρτιος αριθμός. Άρα και ο κ είναι άρτιος. Αν , τότε από τη σχέση (4) θα έχουμε ή ισοδύναμα ή ισοδύναμα (5). Από τη σχέση (5) προκύπτει ότι και ο αριθμός είναι άρτιος, οπότε και ο λ θα είναι άρτιος. Αυτό έρχεται σε αντίφαση με την παραδοχή ότι οι αριθμοί κ, λ δεν είναι και οι δυο άρτιοι. Κατά συνέπεια η παραδοχή ότι τα τμήματα ΑΒ και ΑΓ είναι σύμμετρα οδηγεί σε αντίφαση.

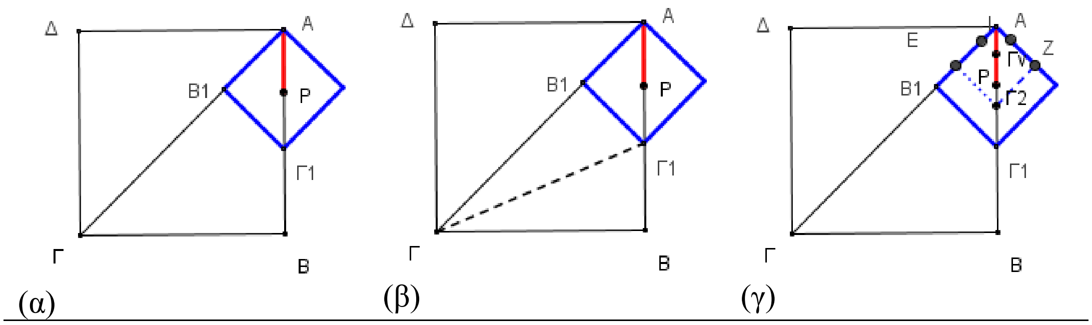


Σχήμα 4

Στην ειδική περίπτωση που το ΑΓ είναι ίσο με την μονάδα θα έχουμε ότι   και με δεδομένο ότι δείξαμε ότι ΑΒ και ΑΓ (οι κάθετες πλευρές) δεν είναι σύμμετρα μεγέθη αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το ΑΒ (η υποτείνουσα) δεν μπορεί να γραφεί ως πηλίκο δυο ακεραίων αριθμών. Γεγονός που σημαίνει ότι η υποτείνουσα είναι ασύμμετρο μέγεθος. Το δε πυθαγόρειο θεώρημα στην ειδική περίπτωση (ΑΓ=ΒΓ=1) μας δίνει ότι . Συνεπώς, ο αριθμός √2 είναι ασύμμετρος.

2η Απόδειξη: Έννοιες σύμμετρα /ασύμμετρα μεγέθη-Απαγωγή σε άτοπο

Ο Eves(1989, σ. 61) παραθέτει μια γεωμετρική απόδειξη για την αρρητότητα του √2, δείχνοντας ότι η πλευρά και η διαγώνιος τετραγώνου είναι ασύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα, χωρίς την χρήση του πυθαγορείου θεωρήματος χρησιμοποιώντας τις έννοιες σύμμετρα και ασύμμετρα μεγέθη και τη μέθοδο της εις άτοπο απαγωγής: Για το τετράγωνο ΑΒΓΔ υποθέτουμε ότι η πλευρά ΑΒ και η διαγώνιος ΑΓ είναι σύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα. Τότε, θα υπάρχει ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΡ τέτοιο ώστε η πλευρά ΑΒ και η διαγώνιος ΑΓ του τετραγώνου ΑΒΓΔ να είναι ακέραια πολλαπλάσια του ΑΡ, δηλαδή το ΑΡ να τα μετράει. Στην ΑΓ παίρνουμε τμήμα ΓΒ1=αβ και φέρνουμε την Β1Γ1 κάθετη στην ΓΑ (Σχήμα 5α). Τότε τα τρίγωνα ΓΒ1Γ1 και ΓΒΓ1 είναι ίσα καθώς είναι ορθογώνια και έχουν ένα ζευγάρι κάθετων πλευρών ίσες (ΓΒ1=ΓΒ) και την ΓΓ1 κοινή (Σχήμα 5β), συνεπώς ΒΓ1=Γ1Β1=Β1Α. Τότε ΑΓ1=ΑΒ-ΑΒ1 με ΑΒ1 σύμμετρο προς το ΑΡ (καθώς ΑΒ1=ΑΓ-ΓΒ1=ΑΓ-ΑΒ, άρα ΑΒ1 σύμμετρο ως διαφορά των σύμμετρων ΑΓ και ΑΒ). Όμως ΑΓ1 και ΑΒ1 είναι η διαγώνιος και η πλευρά τετραγώνου, με πλευρά μικρότερη από την πλευρά του αρχικού τετραγώνου. Αν επαναληφθεί αυτή η διαδικασία αρκετές φορές (δηλαδή, σημεία Γ2, Γ3….Γν) θα προκύψει τελικά ένα τετράγωνο του οποίου η διαγώνιος ΑΓ και η πλευρά ΑΒ θα είναι σύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα ως προς το ΑΡ και ΑΓν<ΑΡ (Σχήμα 5γ). Αυτό όμως είναι άτοπο.



Σχήμα 5: Σχηματική αναπαράσταση των φάσεων απόδειξης..

Αλγεβρικές αποδείξεις της αρρητότητας του √2

1η Απόδειξη : Έννοιες άρτιος –περιττός / Απαγωγή σε άτοπο

Όπως έχουμε εξηγήσει στην ενότητα «ο αριθμός √2 και η ιστορία του» το μήκος της διαγωνίου ενός τετραγώνου πλευράς ίσης με τη μονάδα είναι √2 . Για να αποδείξουμε ότι το σημείο Ρ στην ευθεία (Σχήμα 2γ) δεν παριστάνεται από ρητό αριθμό, αρκεί να δείξουμε ότι ο √2 είναι άρρητος. Αν υποθέσουμε ότι ο √2 είναι ρητός, δηλαδή γράφεται ως πηλίκο ακεραίων , όπου α και β ακέραιοι πρώτοι μεταξύ τους (μόνος κοινός διαιρέτης το 1), τότε (1). Οπότε το είναι διπλάσιο ενός ακεραίου, επομένως το θα είναι άρτιος αριθμός.

Τότε όμως και ο α θα είναι άρτιος οπότε, θα γράφεται και από τη σχέση (1) προκύπτει ότι . Από την ισότητα προκύπτει ότι και ο είναι άρτιος αριθμός, συνεπώς και . Οπότε οι αριθμοί α και β δε θα είναι πρώτοι μεταξύ τους γιατί θα έχουν και δεύτερο κοινό διαιρέτη εκτός του 1, τον αριθμό 2. Αυτό όμως δεν μπορεί να ισχύει καθώς υποθέσαμε ότι είναι πρώτοι μεταξύ τους. Επομένως, η υπόθεση ότι ο αριθμός √2 είναι ρητός απορρίπτεται.

Αυτή η απόδειξη είναι ουσιαστικά ίδια με αυτήν που αναφέρει ο Αριστοτέλης (384-322 π. Χ.) και έτσι παρουσιάζεται και στο σχολικό βιβλίο της άλγεβρας της Α λυκείου (σελ. 51).

2η Απόδειξη: Έννοιες άρτιος /περιττός, Ανάγωγο κλάσμα / Απαγωγή σε άτοπο

Υποθέτουμε ότι ο √2 είναι ρητός, οπότε θα γράφεται με τη μορφή ανάγωγου κλάσματα, δηλαδή ως πηλίκο ακεραίων (1), όπου α και β είναι θετικοί ακέραιοι πρώτοι μεταξύ τους. Τότε:

$$\sqrt{2}=\alpha/\beta \Rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^2=\left(\alpha/\beta\right)^2 \Rightarrow 2=\alpha^2/\beta^2 \Rightarrow 2\beta^2=\alpha^2 \qquad (2)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις για τους αριθμούς α και β:

- Περίπτωση 1η: Αν οι αριθμοί α και β είναι περιττοί, τότε από τελευταία ισότητα της (2) φαίνεται να ισχύει ότι ένας άρτιος ακέραιος, ο , είναι ίσος με έναν περιττό αριθμό, τον . Άτοπο.

- Περίπτωση 2η: Αν ο αριθμός α είναι περιττός και ο αριθμός β άρτιος, τότε από την τελευταία ισότητα της (2) φαίνεται να ισχύει ότι ένας άρτιος ακέραιος, ο , είναι ίσος με έναν περιττό αριθμό, τον . Άτοπο.

- Περίπτωση 3η: Ο αριθμός α είναι άρτιος και ο αριθμός β περιττός. Αφού ο α είναι άρτιος, θα είναι της μορφής , όπου . Οπότε η τελευταία ισότητα της σχέσης (2) γράφεται: . Όμως, η τελευταία ισότητα της προηγούμενης σχέσης δείχνει ότι ο περιττός ακέραιος είναι ίσος με έναν άρτιο ακέραιο, τον . Άτοπο.

Συμπεράσματα

Οι Πυθαγόρειοι χρησιμοποίησαν γεωμετρικό συλλογισμό για να αποδείξουν ότι ο αριθμός √2 είναι άρρητος. Γεωμετρικό συλλογισμό ακολουθούν και αρκετές άλλες αποδείξεις της αρρητότητας του √2, οι δε αλγεβρικές αποδείξεις χρησιμοποιούν απλές έννοιες της θεωρίας αριθμών όπως, αυτής των πρώτων μεταξύ τους αριθμών, του άρτιου και του περιττού αριθμού και τις σχετικές με αυτές τις έννοιες ιδιότητές τους. Συγκεκριμένα, ιδιότητες που αφορούν το τετράγωνο άρτιου/περιττού αριθμού α η γεωμετρική ερμηνεία των οποίων συνδέεται με το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς μήκους α. Γεγονός που δείχνει τη σχέση μεταξύ της Γεωμετρίας και της Άλγεβρας και το ρόλο της Γεωμετρίας στην απόδοση νοήματος σε αλγεβρικές έννοιες και διαδικασίες. Κύριο χαρακτηριστικό των γεωμετρικών όσο και των αλγεβρικών αποδείξεων της φύσης του αριθμού √2 είναι η μέθοδος της εις άτοπο απαγωγής.

Εν κατακλείδι, η μελέτη της ιστορίας εμφάνισης και των διαδικασιών απόδειξης της αρρητότητάς του √2 συμβάλει θετικά στην αντίληψη και την προσέγγιση της φύσης και στην απόδοση νοήματος στον «ιδιαίτερο» αυτόν αριθμό που με τα χαρακτηριστικά του συνέβαλε στην ανακάλυψη και μελέτη των ιδιοτήτων μιας μεγάλης κατηγορίας αριθμών, των αρρήτων, γεγονός που οδήγησε στην επέκταση του συνόλου των ρητών σε αυτό του συνόλου των πραγματικών αριθμών.

Βιβλιογραφικές αναφορές

[1] Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., Σβέρκος, Α., Αδαμόπουλος, Λ., Δαμιανού, Χ. (2015). Άλγεβρα Α Λυκείου (Βιβλίο Μαθητή), ΥΠ.Ε.Π.Θ., Α ΕΚΔΟΣΗ Αθήνα (2010)

[2] Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., Ρεκούμης, Κ. . Μαθηματικά Β Γυμνασίου (Βιβλίο Μαθητή). ΥΠ.Ε.Π.Θ., Π.Ι., Αθήνα (2013).
Ανακτημένο από http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGYM-B105/386/2552,9955/
[3] Δούναβης, Α. (2005). Ρητές προσεγγίσεις άρρητων αριθμών για μαθητές στη Μέση Εκπαίδευση. Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, (22), 98-109.
Ανακτημένο από https://eudml.org/doc/236801
[4] Eves, H. (1989). Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών. Αθήνα: Εκδόσεις Τροχαλία.
Bunt, L., Jones, P., Bedient, J. (1981). Οι ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών Μαθηματικών. Αθήνα: Εκδόσεις Γ. Α. Πνευματικού.
[5] Clawson, C. (1994). Ο ταξιδευτής των Μαθηματικών. Αθήνα (2003): Εκδόσεις Κέδρος

Για την υλοποίηση των σχημάτων χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα GEOGEBRA (ελεύθερης χρήσης)