Open Schools Journal for Open Science

Vol 2, No 1 (2019)

Special Issue Articles from the 1st Greek Student Conference on Research and Science

Μηχανισμοί Τριχοτόμησης Γωνίας

Καλλιόπη Σιώπη, Χαρίλαος Πίπης, Ιωάννα Πλουμάκη

doi: 10.12681/osj.19457

Open Schools Journal for Open Science

Volume 1

Μηχανισμοί Τριχοτόμησης Γωνίας

Χαρίλαος Πίπης[1], Ιωάννα Πλουμάκη[1], Καλλιόπη Σιώπη[1]

[1]Πρότυπο Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης, Αθήνα Ελλάδα

Περίληψη

Το γεωμετρικό πρόβλημα της διαίρεσης γωνίας σε τρία ίσα μέρη με κανόνα και διαβήτη είναι ένα από τα τρία άλυτα προβλήματα που διατυπώθηκαν κατά τον 5ο αιώνα στην αρχαία Ελλάδα. Οι προσπάθειες να επιλυθεί με τα μέσα που ορίζονται στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, οδήγησαν στην αναζήτηση νέων μεθόδων, όπως της νεύσης και τεχνικών επίλυσης, με αποτέλεσμα την επινόηση μιας ποικιλίας μηχανισμών, με κάποιους από αυτούς να το αντιμετωπίζουν άμεσα. Η εργασία εστιάζει στο πώς κάποιοι μηχανισμοί της κατηγορίας αυτής, γνωστοί και ως τριχοτόμοι, οι οποίοι διαμεσολαβούν στην επίλυση του προβλήματος της τριχοτόμησης γωνίας με κανόνα και διαβήτη. Η μελέτη του προβλήματος της τριχοτόμησης στο πλαίσιο της ιστορικής προέλευσης και εξέλιξής του και η διερεύνηση των χαρακτηριστικών δυο απλών τριχοτόμων, των Ceva και Pascal, οδήγησε στην αναγνώριση βασικών γεωμετρικών ιδιοτήτων και σχέσεων στη δομή και τη λειτουργίας τους, την εφαρμογή και εμπέδωση μαθηματικών γνώσεων και την οικοδόμηση νέων με βάση το πλαίσιο της μελέτης της ιστορίας των μαθηματικών.

Λέξεις - κλειδιά: Τριχοτόμηση γωνίας; μηχανικοί τριχοτόμοι

Εισαγωγή

Η ιστορική σημασία των άλυτων προβλημάτων της αρχαιότητας (τριχοτόμηση γωνίας, τετραγωνισμός του κύκλου και διπλασιασμός του κύβου) συνίσταται στο ότι ανέδειξαν την αδυναμία επίλυσης των προβλημάτων αυτών με τα μέσα που ορίζονται στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη, δηλαδή με *κανόνα* και *διαβήτη*. Οι αποτυχημένες προσπάθειες επίλυσης τους από ένα πλήθος γεωμετρών, ήδη από τον 5^{o} αι. π. Χ., έθεσε το ερώτημα κατά *πόσο η λύση τους δεν είναι δυνατή μόνο με το χάρακα και το διαβήτη*. Η αναζήτηση της απάντησης στο ερώτημα αυτό κατέδειξε ότι δεν αρκεί η *Γεωμετρία* αλλά απαιτείται η συνδρομή της *Άλγεβρας* και της *Ανάλυσης*, κλάδοι που ωρίμασαν μόλις τον 19^{o} αιώνα (Μπρίκας, 1970), γεγονός που δείχνει ότι η επιλυσιμότητα αυτών των προβλημάτων υπερέβαινε κατά πολύ της δυνατότητες της μαθηματικής επιστήμης εκείνης της εποχής. Αφετέρου, διευρύνθηκαν οι ορίζοντες σκέψης πολλών ερευνητών με αποτέλεσμα να επινοήσουν μέσα (εργαλεία) και να οδηγηθούν σε πολλές αξιοθαύμαστες λύσεις οι οποίες, αν και δεν πληρούν τους περιορισμούς των εκφωνήσεων των αρχικών προβλημάτων, αποτελούν λύσεις ευρύτερης αποδοχής.

Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να αναπτυχθεί η *Κινηματική Γεωμετρία,* η γεωμετρία που επιτρέπει την κίνηση και την περιστροφή συνδεσμολογιών με σκοπό την επίλυση προβλήματος το οποίο δεν επιλύεται στο πλαίσιο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Υπάρχουν αναφορές ότι στην αρχαία Ελλάδα πολλοί γεωμέτρες επινόησαν και χρησιμοποίησαν μηχανισμούς για να κατασκευάζουν καμπύλες τις οποίες χρησιμοποιούσαν για να επιλύσουν τα άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας μέσω της κίνησης, για παράδειγμα ο Μέναιχμος (Taimina et al., 2007).

Συνυφασμένες με τη λύση του προβλήματος της τριχοτόμησης γωνίας (πρόβλημα που προσέλκυσε το ενδιαφέρον πολλών μαθηματικών ήδη από την αρχαιότητα) είναι η εισαγωγή με *κινηματικό* ορισμό μιας νέας καμπύλης από τον Ιππία τον 5^{o} αι. π. Χ., της *τετραγωνίζουσας (όπως ονομάστηκε αργότερα από τον* Λάιμπνιτς) και η εφαρμογή μέσω κίνησης από τον Αρχιμήδη της μεθόδου *της νεύσης*. Παράλληλα δε, επινοήθηκαν και κατασκευάστηκαν κατά καιρούς εργαλεία- κοινώς τριχοτόμοι, τα οποία επιτρέπουν την άμεση τριχοτόμηση μιας δοθείσας γωνίας. Πολλοί άλλοι μετά από τον Ιππία και τον Αρχιμήδη ακολούθησαν, όπως οι Νικομήδης, Πάππος, Leonardo da Vinci, κ.α. γεγονός που ενισχύει την άποψη ότι το πρόβλημα της τριχοτόμησης γωνίας προσέλκυσε το ενδιαφέρον πολλών μαθηματικών και συνέβαλλε στην πρόοδο της επιστήμης των μαθηματικών και την κατανόηση της κατάστασης του προβλήματος (Yates, 1942).

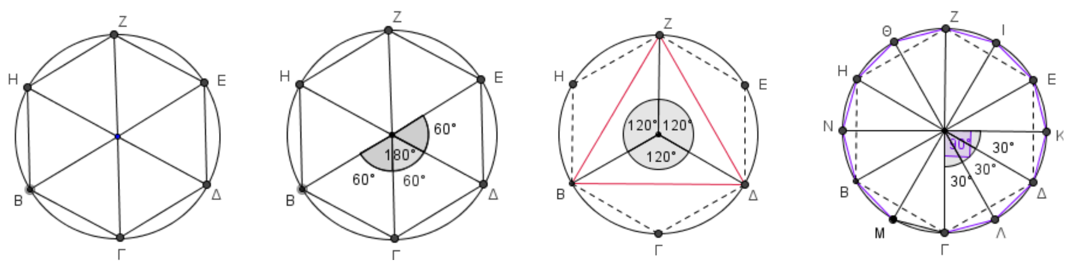
Σκοπός της εργασίας, η οποία υλοποιήθηκε στο πλαίσιο του μαθήματος της γεωμετρίας που διδασκόμαστε στη Β τάξη του Λυκείου, είναι η μελέτη του προβλήματος της τριχοτόμησης γωνίας από την άποψη της ιστορικής του προέλευσης και η χαρτογράφηση μηχανισμών τριχοτόμησης που αποτελούν μέρος της ιστορίας των μαθηματικών και η ανακάλυψη των μαθηματικών της δομής και της λειτουργίας τους στο πλαίσιο της ευκλείδειας γεωμετρικής θεωρίας που διδάσκεται στη βαθμίδα του λυκείου. Η μελέτη του προβλήματος σχεδιάστηκε γύρω από τρία βασικά ερωτήματα: *Ποια είναι η δομή των μηχανισμών τριχοτόμησης γωνίας, τι μπορεί να κάνουν και γιατί*.

Το πρόβλημα της τριχοτόμησης γωνίας στο πλαίσιο της ευκλείδειας γεωμετρίας

Από τη διατύπωση του προβλήματος «διαίρεση γωνίας σε τρία ίσα μέρη» προκύπτει ότι πρόκειται για πρόβλημα γεωμετρικής κατασκευής στο επίπεδο, η οποία εκπληρώνει συγκεκριμένες συνθήκες και προϋποθέτει τη χρήση οργάνου (ων) ικανού (ων) να την υλοποιήσει (σουν). Ο Πλάτωνας θεωρούσε ότι η γεωμετρική κατασκευή πρέπει να γίνεται μόνο με κανόνα και διαβήτη, τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη διατυπώθηκαν με βάση τα εργαλεία αυτά, και οι κατασκευές μέσω αυτών κατοχυρώνονται με τα αιτήματα των *Στοιχείων* (Μπρίκας, 1970).

Ο χάρακας και ο διαβήτης συνέβαλλαν στην επίλυση απλών προβλημάτων γεωμετρικής κατασκευής όπως αυτού της διχοτόμησης δοθείσης γωνίας - γεγονός που έδινε τη δυνατότητα της διαίρεσής της σε 4, 8, 16 και γενικά σε 2^{ν} ίσα μέρη, αλλά και σε πιο σύνθετες γεωμετρικές κατασκευές όπως, α) του *ισοπλεύρου τριγώνου* (με πλευρά την ακτίνα κύκλου), β) του *τετραγώνου* (μέσα από την κατασκευή ορθής γωνίας και παραλληλογράμμου με ίσες πλευρές) και γ) του *εξαγώνου*. Πρόκειται για κατασκευές που περιγράφονται στις προτάσεις Ι.1 [*Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.*], Ι. 46 [*Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι*] και IV. 15 [*Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι] των* Βιβλίων Ι και IV των *Στοιχείων* του Ευκλείδη. Έτσι, η Γεωμετρία σιγά-σιγά εξοπλίστηκε με κανονικά πολύγωνα (ισόπλευρα τρίγωνα, τετράγωνα, εξάγωνα) που εγγράφονται σε κύκλο και συσχετίστηκε η εγγραφή τους με τις αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες τους ($\omega_3 \doteq 120^0$, $\omega_4 \doteq 90^0$ και $\omega_6 \doteq 60^0$).

Οι εγγραφές κανονικών πολυγώνων σε κύκλο έδινε τη δυνατότητα τριχοτόμησης γωνιών ίσων με *360^0*, *180^0* και *90^0* μέσα από την κατασκευή *ισοπλεύρου τριγώνου*, *κανονικού εξαγώνου* και *κανονικού δωδεκαγώνου*, αντίστοιχα (Σχήμα 1). Οπότε, ήταν φυσικό να επιζητηθεί η τριχοτόμηση τυχαίας γωνίας, κάτι που θα συνδέονταν και με την κατασκευή τυχαίου κανονικού πολυγώνου. Όμως, οι προσπάθειες να κατασκευαστεί 9-γωνο μέσω της τριχοτόμησης των τριών επίκεντρων γωνιών του ισοπλεύρου τριγώνου απέβησαν άκαρπες (Μπρίκας, 1970, σελ. 107).

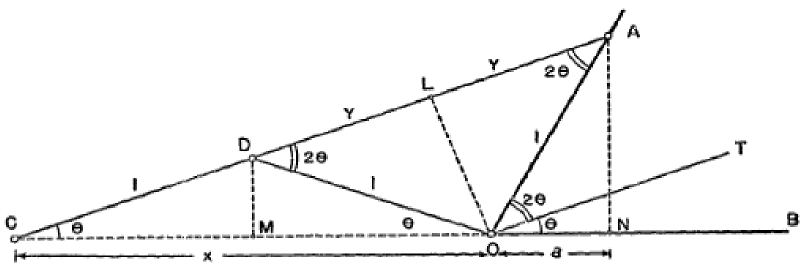


Σχήμα 1: Το εξάγωνο ως γεωμετρικό μοντέλο τριχοτόμησης γωνιών *180^0*, *360^0* και *90^0*

Γιατί όμως δεν μπορεί να τριχοτομηθεί μια οποιαδήποτε κυρτή γωνία;

Ουσιαστικά πρόκειται για πρόβλημα τριχοτόμησης οξείας γωνίας καθώς, αν η γωνία είναι αμβλεία μπορούμε να αφαιρέσουμε από αυτήν την ορθή, η οποία μπορεί να τριχοτομηθεί με χάρακα-διαβήτη μέσω της κατασκευής κανονικού 12-γωνου, όπως προαναφέρθηκε. Απάντηση στο πρόβλημα της τριχοτόμησης μπορεί να δοθεί μέσα από δυο διαφορετικές προσεγγίσεις της λύσης του, μια αλγεβρική και μια τριγωνομετρική. Οι προσεγγίσεις αυτές οδηγούν στη διαπίστωση ότι, *η επίλυση του προβλήματος της τριχοτόμησης γωνίας ανάγεται στην αλγεβρική επίλυση εξίσωσης 3^ου^ βαθμού* (Μπρίκας, 1970; Yates, 1942). Οι δυο αποδεικτικές προσεγγίσεις του θέματος που παραθέτουμε επιβεβαιώνουν τον ισχυρισμό αυτόν.

Γεωμετρική προσέγγιση: **Ας υποθέσουμε** ότι μια δοθείσα γωνία AOB μπορεί να διαιρεθεί με μια εσωτερική ημιευθεία OT σε δυο γωνίες την AOT=2θ και την TOB=θ. Πάνω στην πλευρά OA θεωρούμε σημείο A ώστε, το τμήμα OA να εκληφθεί ως μονάδα μήκους. Έστω ότι η παράλληλη από το A προς την OT τέμνει την προέκταση της OB προς το O σε σημείο C. Τότε θα είναι: γωνία OAC = 2θ ως εντός εναλλάξ με τη γωνία AOT και γωνία ACO=θ ως εντός εκτός και επί τα αυτά με την γωνία TOB (Σχήμα 2).



Σχήμα 2: Σχηματική αναπαράσταση της Γεωμετρικής προσέγγιση του προβλήματος της τριχοτόμησης γωνίας, στο Yates (1942)

Με κέντρο το O και ακτίνα OA (με OA=1, ως μονάδα μήκους) σχεδιάζουμε κύκλο και έστω D το σημείο τομής του με την AC. Τότε το τρίγωνο AOD είναι ισοσκελές με γωνίες βάσεις DAO=ADO=2θ. Η γωνία ADO είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου CDO με γωνία DCO=θ, οπότε και η γωνία DOC=θ. Επομένως, το τρίγωνο CDO είναι ισοσκελές, συνεπώς CD=DO=1. Φέρνοντας τις προβολές M και N των D και A πάνω στην CB αντίστοιχα και την προβολή L του O πάνω στην CA, δημιουργούνται τα όμοια τρίγωνα CDM, COL και CAN.

Αν CO=x, AD=2y και ON=a από τα όμοια τρίγωνα θα προκύψουν οι σχέσεις:

$\frac{\frac{x}{2}}{1}=\frac{x+a}{1+2y} \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{x+a}{1+2y}$ (1) και $\frac{\frac{x}{2}}{1}=\frac{1+y}{x} \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{1+y}{x}$ (2). Οι σχέσεις (1) και (2) δίνουν τις σχέσεις $1+2y=\frac{2(x+a)}{x}$ (3) και $x^2=2+2y$ (4), αντίστοιχα. Με αντικατάσταση του y στις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει η σχέση $x^2-1=\frac{2(x+a)}{x} \Leftrightarrow x^3-3x-2a=0$ (5). Η εξίσωση $x^3-3x-2a=0$ καλείται *τριχοτομούσα εξίσωση* και είναι θεμελιώδης για το πρόβλημα της τριχοτόμησης γωνίας.

Τριγωνομετρική προσέγγιση: Η τριχοτομούσα εξίσωση (5) μπορεί να προσεγγιστεί και μέσω γνώσεων της τριγωνομετρίας με διαφορετικό τρόπο:

$$\sigma\upsilon\nu 3\vartheta = \sigma\upsilon\nu(2\vartheta+\vartheta) = \sigma\upsilon\nu 2\vartheta \cdot \sigma\upsilon\nu\vartheta - \eta\mu 2\vartheta \cdot \eta\mu\vartheta \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu 3\theta = (2\sigma\upsilon\nu^2\theta - 1)\sigma\upsilon\nu\theta - (2\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta)\cdot\eta\mu\theta \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu 3\theta = (2\sigma\upsilon\nu^2\theta - 1)\sigma\upsilon\nu\theta - 2\eta\mu\theta^2\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu 3\vartheta = 2\sigma\upsilon\nu^3\vartheta - \sigma\upsilon\nu\vartheta - 2(1-\sigma\upsilon\nu^2\vartheta)\sigma\upsilon\nu\vartheta \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 3\vartheta = 4\sigma\upsilon\nu^3\vartheta - 3\sigma\upsilon\nu\vartheta$$

Όμως, $x = 2\sigma\upsilon\nu\vartheta$ (5) και $\alpha = \sigma\upsilon\nu 3\vartheta$ (6), οπότε τελικά $\alpha = \frac{x^3}{2} - \frac{3x}{2} \Leftrightarrow x^3 - 3x - 2a = 0$ Από τις σχέσεις (5) και (6) μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι οι αλγεβρικές τιμές που μπορεί να πάρει το α είναι μεταξύ του -1 και +1 (αφού $-1 \leq \sigma\upsilon\nu 3\vartheta \leq 1$), ενώ του x είναι μεταξύ του -2 και του +2 (αφού $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\theta \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2\sigma\upsilon\nu\theta \leq 2$).

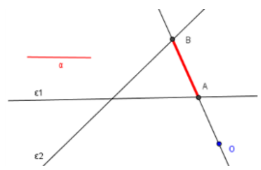
Η κατασκευή με χάρακα-διαβήτη των ριζών αυτής της εξίσωσης είναι δυνατή μόνο αν μπορεί η εξίσωση να αναλυθεί σε γινόμενο δυο παραγόντων, ενός 1ου βαθμού και ενός 2ου βαθμού, κάτι που αποδείχθηκε το 1837 ότι δεν είναι δυνατό να γίνει (Μπρίκας, 1970; Yates, 1942).

Το επίπεδο των μαθηματικών μας γνώσεων δε μας επιτρέπει να μελετήσουμε το αδύνατο της επίλυσης της τριχοτομούσας εξίσωσης, αλλά και δεν αποτελεί ερευνητικό ερώτημα της εργασίας μας.

Το πρόβλημα της τριχοτόμησης γωνίας στο πλαίσιο της κινηματικής γεωμετρίας

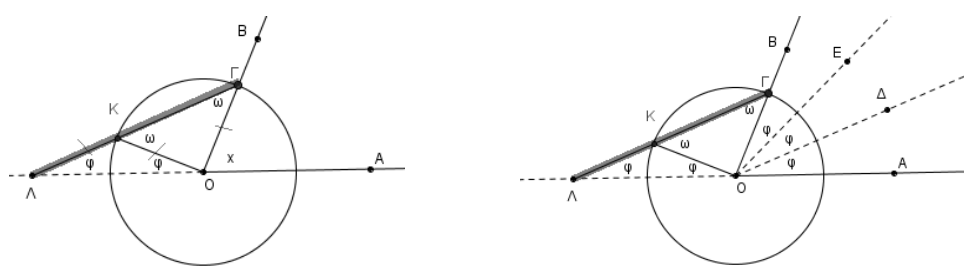
Η Γεωμετρία και η κίνηση συνυπάρχουν από τα αρχαία χρόνια και διάφοροι μηχανισμοί έχουν αναπτυχθεί παράλληλα με τα μαθηματικά. Η κινηματική Γεωμετρία μπορεί να θεωρηθεί ότι γεννήθηκε στην αρχαία Ελλάδα με τη ***νεύση*** του Αρχιμήδη. Πρόκειται για μια διαδικασία κατασκευής ενός ευθυγράμμου τμήματος συγκεκριμένου μήκους μεταξύ δυο δεδομένων ‘***γραμμών***’, ευθείες ή καμπύλες, έτσι ώστε τα άκρα του τμήματος να βρίσκονται πάνω στις ‘γραμμές’ και το ίδιο το τμήμα ή η προέκτασή του να διέρχεται, να «νεύει», να «σκοπεύει» προς ένα δοσμένο σημείο (πόλο της νεύσης), όπως σχηματικά αναπαριστάνεται στην Εικόνα 3. Οι δεδομένες γραμμές που εξέταζαν οι αρχαίοι γεωμέτρες ήταν συνήθως η ευθεία και ο κύκλος (η περιφέρεια).

Αν το ευθύγραμμο τμήμα κινείται έτσι ώστε το ένα άκρο του να βρίσκεται στη μια από τις δυο γραμμές, ενώ η προέκτασή του διέρχεται από το δεδομένο σημείο, τότε το δεύτερο άκρο θα γράψει καμπύλη. Όμως, η μέθοδος της νεύσης δε δίνει καμιά πληροφορία για τη φύση της καμπύλης, η οποία μπορεί να είναι απλή ή αρκετά πολύπλοκη (Ευκλείδεια Γεωμετρία Α και Β Λυκείου, σελ. 251).



Σχήμα 3: Σχηματική αναπαράσταση της ‘νεύσης’ του Αρχιμήδη

Τριχοτόμηση γωνίας με ‘Νεύση’: Έστω ΑΟΒ=x η γωνία που θέλουμε να τριχοτομήσουμε. Γράφουμε ένα κύκλο με κέντρο την κορυφή Ο της γωνίας και έστω Γ το σημείο τομής του με την πλευρά ΟΒ της γωνίας Ο. Στην αντικείμενη ημιευθεία της ΟΑ θεωρούμε σημείο Λ έτσι ώστε το τμήμα ΛΓ να τέμνει τον κύκλο σε σημείο Κ, με το τμήμα ΚΛ να είναι ίσο με την ακτίνα του κύκλου [*νεύση*: *κατασκευή τμήματος δεδομένου μήκους μεταξύ ευθείας-κύκλου,* Σχήμα 4, αριστερά]. Τότε, η γωνία ΚΛΟ είναι ίση με το ένα τρίτο της γωνίας ΑΟΒ καθώς: Για το ισοσκελές τρίγωνο ΛΚΟ θα ισχύει ότι $\hat{\omega}=2\varphi$ (1) ως εξωτερική γωνία του. Στο τρίγωνο ΛΟΓ η γωνία ΓΟΑ=x είναι εξωτερική του οπότε θα ισχύει $\hat{x}=\hat{\varphi}+\hat{\omega}$ (2). Λόγω της (1), από τη σχέση (2) προκύπτει ότι $\hat{x}=3\hat{\varphi}$. Η τριχοτόμηση της γωνίας ΑΟΒ επιτυγχάνεται φέρνοντας από το Ο την παράλληλη ΟΔ στην ΛΓ και με διχοτόμηση της γωνίας ΔΟΒ στη συνέχεια (Σχήμα 4, δεξιά). Η μέθοδος της νεύσης διαμεσολαβεί στο να τριχοτομηθεί η γωνία με κανόνα και διαβήτη.



Σχήμα4: Σχηματική αναπαράσταση της τριχοτόμησης γωνίας με τη μέθοδο της νεύσης

Μηχανικοί τριχοτόμοι

Στο πλαίσιο της κινηματικής γεωμετρίας μια μεγάλη ποικιλία μηχανισμών έχουν επινοηθεί για την επίλυση του προβλήματος της τριχοτόμησης. Κάποιοι από αυτούς τους μηχανισμούς σχεδιάζουν καμπύλες που βοηθούν στην επίλυση της τριχοτομούσας εξίσωσης, ενώ κάποιοι άλλοι επιλύουν την εξίσωση άμεσα και μια τρίτη κατηγορία μηχανισμών τριχοτομούν άμεσα μια γωνία. Μια υποκατηγορία των μηχανισμών για άμεση τριχοτόμηση είναι συνήθως συνδεσμολογίες άκαμπτων ράβδων που συνδέονται με συνδέσμους σχηματίζοντας απλά γεωμετρικά σχήματα όπως ισοσκελή τρίγωνα, ρόμβους, ισοσκελή τραπέζια κ.ά. Οι σύνδεσμοι εξασφαλίζουν το επιθυμητό αποτέλεσμα της χρήσης του μηχανισμού μέσω της κίνησης των άκρων των ράβδων ή των συνδέσμων και δίνουν τη δυνατότητα μετασχηματισμού της μορφής της συνδεσμολογίας. Ενδεικτικά μοντέλα (υλικά ή σχηματικά) συνδεσμολογιών που μπορεί να χρησιμοποιηθούν για την τριχοτόμηση γωνία, παρουσιάζουν οι εικόνες (α), (β), (γ), (δ) και (ε) στο Σχήμα 5.

Η συγκεκριμένη εργασία εστιάζει σε δυο μηχανικούς τριχοτόμους, του Giovanni Ceva, ιταλός μαθηματικός, είναι γνωστός για την απόδειξη θεωρήματος στη γεωμετρία που φέρει το όνομά του, και του Etienne Pascal**,** πατέρα του διάσημου μαθηματικού και φιλόσοφου Blaise Pascal, είναι περισσότερο γνωστός από την καμπύλη που φέρει το όνομά του, τον "κοχλία του Πασκάλ" που επινόησε στην προσπάθειά του να επιλύσει το πρόβλημα της τριχοτόμησης γωνίας.

(α) Kempe (1849 - 1922) | (β) Descartes (1596 - 1650) | (γ) Ruose Ball (1850-1925) | (δ) Ceva (1647 - 1734) | (ε) E. Pascal (1588-1651)

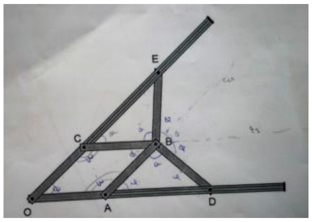
Σχήμα 5: (α), (β), (γ), (δ), (ε) Μηχανικοί τριχοτόμοι

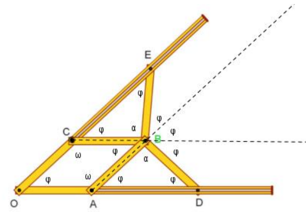
(http://www.mmlab.unimore.it/site/home.html)

Τριχοτόμοι των Ceva και Pascal

Διερεύνηση της δομής και της λειτουργίας: Τέθηκαν στη διάθεσή μας δυο σχέδια μηχανισμών, του Ceva και του Pascal, και στοιχειώδεις πληροφορίες που αφορούσαν το πλήθος και τον τρόπο σύνδεσης (με αρθρώσεις) των ράβδων που συνέθεταν την σχηματική μορφή του κάθε μηχανισμού. Ζητήθηκε να εκτιμήσουμε σχέσεις μεταξύ των ράβδων του κάθε μηχανισμού, να αναγνωρίσουμε στη σχηματική τους μορφή τυχόν γεωμετρικές ιδιότητες και σχέσεις, να διερευνήσουμε κατά πόσο αυτός ο μηχανισμός θα 'μπορούσε' να λειτουργήσει ως εργαλείο που διαμεσολαβεί στην τριχοτόμηση μιας γωνίας και να περιγράψουμε *πώς* και *γιατί* θα μπορούσε αυτό να συμβεί.

Η περίπτωση Τριχοτόμου του Ceva: Η παρατήρηση του σχηματικού αντιγράφου του φύλλου εργασίας (Σχήμα 6 αριστερά) μας οδήγησε να κάνουμε τις εξής υποθέσεις: α) οι τέσσερις ράβδοι BA, BD, BE και BC (με κοινή άρθρωση B) είναι ίσες, β) το τετράπλευρο OABC που σχηματίζουν οι αρθρώσεις [O, A, B, C] είναι ρόμβος (ως τετράπλευρο με ίσες πλευρές) και γ) οι αρθρώσεις A,B,D,C και E σχηματίζουν τρίγωνα (ABD και CBE) ισοσκελή (:με κορυφή την άρθρωση B).





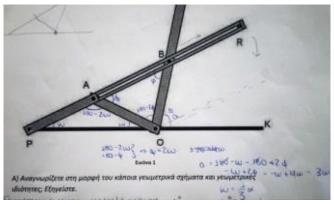
Σχήμα 6: Εξήγησης της λειτουργίας της συνδεσμολογίας του Ceva ως εργαλείο τριχοτόμησης γωνίας στο φύλλο εργασία (αριστερά) και σε ψηφιακό αντίγραφο (δεξιά)

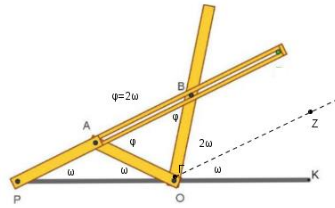
Με την υπόθεση ότι το τετράπλευρο OABC είναι ρόμβος προκύπτει ότι οι απέναντι γωνίες του θα είναι ίσες [$C\hat{O}A = A\hat{B}C = \hat{\varphi}$ και $O\hat{A}B = B\hat{C}O = \hat{\omega}$] και οι απέναντι πλευρές του θα είναι παράλληλες [OC//AB και OA//CB]. Λόγω της παραλληλίας των πλευρών του ρόμβου OABC και των ισοσκελών τριγώνων ABD και CBE προκύπτει ότι $C\hat{O}A = B\hat{A}D = B\hat{D}A = \hat{\varphi}$ και $C\hat{O}A = \mathrm{E}\hat{C}B = C\hat{E}B = \hat{\varphi}$. Συνεπώς, για τις γωνίες $C\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$ και $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}D$ των τριγώνων ABD και CBE θα ισχύει $C\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}D = 180^0 - 2\hat{\varphi}$. Τότε όμως η γωνία EBD θα είναι τριπλάσια της γωνίας COA(: φ) της κορυφής O του ρόμβου (Σχήμα 6) καθώς:

$$\mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}D = 360^0 - \hat{\varphi} - 2(180^0 - 2\hat{\varphi}) = 360^0 - \hat{\varphi} - 360^0 + 4\hat{\varphi} = 3\hat{\varphi}$$

Η προέκταση των φορέων των πλευρών AB και CB του ρόμβου προς το B επιτρέπει τη μεταφορά γωνιών ίσων με τη γωνία $C\hat{O}A = \hat{\varphi}$ στη γωνία EBD μέσω ιδιοτήτων παραλληλίας (εντός εναλλάξ/εντός εκτός και επί τα αυτά) ή των κατακορυφήν γωνιών. Η διαπίστωση ότι $\mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}D = 3\hat{\varphi}$ μας παρείχε την εξήγηση το *πώς* αυτός ο μηχανισμός διαμεσολαβεί στην τριχοτόμηση γωνίας.

Η περίπτωση Τριχοτόμου του Pascal. Η παρατήρηση του σχηματικού αντιγράφου του φύλλου εργασίας (Σχήμα 7 αριστερά) μας οδήγησε να κάνουμε τις υποθέσεις ότι οι ράβδοι ενώνονται ανά δύο με τις αρθρώσεις A, O και B έτσι ώστε PA=AO=OB και ότι τα τρίγωνα PAO και AOB που σχηματίζουν οι αρθρώσεις είναι ισοσκελή. Επομένως, για τις γωνίες των βάσεων των ισοσκελών τριγώνων θα ισχύει ότι $\mathrm{A}\hat{\mathrm{P}}\mathrm{O} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{P} = \hat{\omega}$ και $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{O} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{O} = \hat{\varphi}$. Εκτιμήσαμε ότι η μορφή του μηχανισμού θα αλλάζει όταν ο σύνδεσμος O ολισθαίνει στην εγκοπή, ότι θα διατηρούνται τα μήκη των ράβδων, ότι θα μεταβάλλονται οι γωνίες της σχηματικής μορφής αλλά θα διατηρούνται οι μεταξύ τους σχέσεις ισότητας και παραπληρωματικότητας.





Σχήμα 7: Εξήγησης της λειτουργίας της συνδεσμολογίας του *Pascal* ως εργαλείο τριχοτόμησης γωνίας στο φύλλο εργασία (αριστερά) και σε ψηφιακό αντίγραφο (δεξιά)

Εφαρμόζοντας ιδιότητες που αφορούν γωνίες τριγώνου και πιο συγκεκριμένα, τη σχέση της εξωτερικής γωνίας τριγώνου με τις απέναντι εσωτερικές στα τρίγωνα PAO ($B\hat{A}O = 2\hat{\omega} \rightarrow \hat{\varphi} = 2\hat{\omega}$) και POB ($K\hat{O}B = B\hat{P}O + P\hat{B}O$ ή $K\hat{O}B = \hat{\omega} + \hat{\varphi} = \hat{\omega} + 2\hat{\omega} = 3\hat{\omega}$) προκύπτει ότι η εξωτερική γωνία KOB του τριγώνου POB είναι τριπλάσια της γωνίας ω. Αναζητήσαμε τρόπους να μεταφέρουμε τη γωνία ω στην γωνία KOB. Η ιδέα της χάραξης παραλλήλου από το O προς τον φορέα της πλευράς PB του τριγώνου OPB, χάραξη η οποία είναι εφικτή με κανόνα και διαβήτη, μας έδωσε τη δυνατότητα να κάνουμε τη μεταφορά της γωνίας ω στη γωνία KOZ. Οπότε $Z\hat{O}B = K\hat{O}B - Z\hat{O}K = 3\hat{\omega} - \hat{\omega} = 2\hat{\omega}$. Όμως η γωνία ZOB μπορεί να διχοτομηθεί με χάραξη της διχοτόμου της, η κατασκευή της οποίας είναι εφικτή με τα ευκλείδεια μέσα (:κανόνα- διαβήτη).

Το γεγονός αυτό μας βοήθησε να αναγνωρίσουμε στη λειτουργία του μηχανισμού τη μέθοδο της 'νεύσης του Αρχιμήδη, να αντιληφθούμε το *γιατί* αυτός ο μηχανισμός έχει την ιδιότητα του τριχοτόμου γωνίας και ότι δεν υποκαθιστά τα ευκλείδεια μέσα αλλά διαμεσολαβεί στην τριχοτόμηση γωνίας με τη χρήση των μέσων αυτών.

Κατασκευή και Χρήση υλικών μοντελων των τριχοτόμων του Ceva και Pascal για την τριχοτόμηση γωνιών

Για την κατασκευή υλικών μοντέλων των δυο μηχανισμών και τον έλεγχο της λειτουργίας τους λάβαμε υπόψη μας τα συμπεράσματά που αφορούσαν τις γεωμετρικές ιδιότητες της δομής του καθενός. Οι ράβδοι που χρησιμοποιήσαμε για την κατασκευή των μηχανισμών ήταν ξύλινες και έφεραν οπές σε συγκεκριμένες θέσεις ώστε να δίνεται η δυνατότητα η σύνδεσή τους να γίνεται με τέτοιο τρόπο που να διατηρούνται οι γεωμετρικές ιδιότητες που αναγνωρίσαμε στη φάση διερεύνησης του σχηματικού αντιγράφου του μηχανισμού. Οι διαστάσεις και τρόπος σύνδεσης των ράβδων, στην κατασκευή μοντέλου της τριχοτόμου του Ceva, απεικονίζονται στην φωτογραφία Φ.1 και ο τρόπος εφαρμογής του μηχανισμού για την τριχοτόμηση γωνίας παρουσιάζουν οι φωτογραφίες Φ2.έως Φ.4 του Σχήματος 8. Αντίστοιχα, για τον τριχοτόμο του Pascal, οι διαστάσεις και τρόπος σύνδεση των ράβδων φαίνεται στην φωτογραφία Φ.1, ο δε τρόπος εφαρμογής του μηχανισμού για την τριχοτόμηση γωνίας παρουσιάζουν οι φωτογραφίες Φ2.έως Φ.4 του Σχήματος 9.

Φ.1 Φ.2 Φ.3 Φ.4

Σχήμα 8: Ξύλινο αντίγραφο τριχοτόμου Ceva

Φ.1 Φ.2 Φ.3 Φ.4

Σχήμα 9: Ξύλινο αντίγραφο τριχοτόμου Pascal

Συμπέρασμα

Το πρόβλημα της τριχοτόμησης γωνίας είναι από μόνο του ενδιαφέρον και οποιαδήποτε απόδειξη ή διαδικασία που θα σχετίζονταν με αυτό μόνο σε θεωρητικό επίπεδο θα περιόριζε το ενδιαφέρον. Η έρευνα του προβλήματος μας έδωσε τη δυνατότητα να προσεγγίσουμε τα χαρακτηριστικά νέων εργαλείων που αγνοούσαμε την ύπαρξη και το ρόλο τους στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων. Η εμπλοκή μας με τη διερεύνηση των χαρακτηριστικών και της λειτουργίας των μηχανικών τριχοτόμων συνέβαλε στο να αντιληφθούμε τις δυνατότητες και τους περιορισμούς των εργαλείων (γεωμετρικών και αλγεβρικών) στην επίλυση προβλημάτων και τον ρόλο τους στην εξέλιξη της γεωμετρικής θεωρίας, παράλληλα δε, οικοδομήσαμε νέες γνώσεις που αφορούν γεωμετρικές έννοιες (καμπύλες) και διαδικασίες, όπως αυτή της νεύσης.

Βιβλιογραφία

Αργυρόπουλος Η., Βλάμος Π., Κατσούλης Γ., Μαρκάτης Σ., Σίδερης Π. Ευκλείδεια Γεωμετρία (Βιβλίο Μαθητή). ΥΠ.Ε.Π.Θ., Π.Ι., ΕΚΔΟΣΗ 2015, Αθήνα.
Ανακτημένο 12/12/16 από http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-A101/574/3720,16296/

Μπρίκας Μ. Α. (1970). Τα περίφημα άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας. Αθήνα.

Yates, R., C. (1942): *The trisection problem*. National Mathematics Magazine, 16.4 171-182. Ανακτημένο 15/1/17 από http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED058058.pdf

Taimina, D., Pan, B., Gay, G., Saylor, J., Hembrooke, H., Henderson, D., & Paventi, C. (2007). Historical mechanisms for drawing curves. *Hands On History: A Resource for Teaching Mathematics*, 89-104. Ανακτημένο 20/12/17 από https://ecommons.cornell.edu/bitstream/handle/1813/2718/2004-9.pdf