Open Schools Journal for Open Science

Vol 2, No 1 (2019)

Special Issue Articles from the 1st Greek Student Conference on Research and Science

Η τεχνική της 'Συμπλήρωσης τετραγώνου' με χρήση Lego

Καλλιόπη Σιώπη, Θεοδώρα Αγγέλη, Κατερίνα Αυγερινού, Νίκος Γουργουλέτης, Βέρα- Λυδία Δημητρακοπούλου, Ελισάβετ Ζαχαρίου

doi: 10.12681/osj.19538

To cite this article:

Σιώπη Κ., Αγγέλη Θ., Αυγερινού Κ., Γουργουλέτης Ν., Δημητρακοπούλου Β.-. Λ., & Ζαχαρίου Ε. (2019). Η τεχνική της 'Συμπλήρωσης τετραγώνου' με χρήση Lego. *Open Schools Journal for Open Science*, *2*(1), 361–370. https://doi.org/10.12681/osj.19538

Open Schools Journal for Open Science

Volume 1

Η τεχνική της ‘Συμπλήρωσης τετραγώνου’ με χρήση Lego

Θεοδώρα Αγγέλη[1], Κατερίνα Αυγερινού[1], Νίκος Γουργουλέτης[1], Βέρα- Λυδία Δημητρακοπούλου[1], Ελισάβετ Ζαχαρίου[1], Καλλιόπη Σιώπη[1]

[1]Πρότυπο Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης, Σμύρνη

Περίληψη

Η μέθοδος της συμπλήρωσης τετραγώνου είναι μια τεχνική που βρίσκει εφαρμογές στην εύρεση των τύπων των ριζών δευτεροβάθμιας εξίσωσης, στη μελέτη των ιδιοτήτων της συνάρτησης με μορφή τριωνύμου και των σχετικών με το τριώνυμο μετασχηματισμών της μορφής του καθώς, και στην επίλυση προβλημάτων άλλων επιστημονικών πεδίων όπως της φυσικής. Ο προσδιορισμός «συμπλήρωση τετραγώνου» της μεθόδου έχει διττή ερμηνεία: από την πλευρά της άλγεβρας σχετίζεται με την έννοια της τετραγωνικής δύναμης πραγματικού αριθμού και από την πλευρά της γεωμετρίας με το εμβαδό τετραγώνου. Στην εργασία μας εστιάζουμε στη γεωμετρική πτυχή της μεθόδου και διερευνούμε την προέλευσή της, στην προσπάθειά μας να βρούμε εναλλακτικούς τρόπους ερμηνείας της που θα εξηγούν και θα δίνουν νόημα στις αλγεβρικές διαδικασίες που σχετίζονται με την έννοια του τριωνύμου. Στο πλαίσιο αυτό, χρησιμοποιούμε αντικείμενα Lego και μοντελοποιούμε τις διαδικασίες παραγωγής των τύπων των ριζών δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

Λέξεις κλειδιά: Μέθοδος συμπλήρωσης τετραγώνου, τριώνυμο, δευτεροβάθμια εξίσωση

Εισαγωγή

Καθώς τα μαθηματικά εξελίσσονται, οι τεχνικές που επιβιώνουν είναι αυτές που έχουν τη μεγαλύτερη δύναμη και είναι γενικού χαρακτήρα. Μια τέτοια τεχνική είναι η εύρεση των τύπων των ριζών της δευτεροβάθμιας εξίσωσης με αλγεβρική μέθοδο.

Στην ενότητα «η εξίσωση αx^2+βx+γ=0,α≠0» του σχολικού βιβλίου της άλγεβρας (σελ. 98) της πρώτης τάξης λυκείου διαβάζουμε: «Στη συνέχεια θα επιλύσουμε την εξίσωση δευτέρου βαθμού στη γενική της μορφή με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου».

Η παρουσίαση της μεθόδου που ακολουθεί περιλαμβάνει μια σειρά αλγεβρικών βημάτων η κατάληξη των οποίων είναι οι τύποι των ριζών της εξίσωσης και η πρόσθεση και στα δυο μέλη της εξίσωσης του όρου (α/2β)^2 φαίνεται σαν ένα ‘τέχνασμα’ που εξυπηρετεί το μετασχηματισμό της μορφής της εξίσωσης σε μια ‘βολική’ μορφή που τελικά οδηγεί στους τύπους των ριζών της.

Στην εργασία μας διερευνούμε την προέλευση της μεθόδου της συμπλήρωσης τετραγώνου, εστιάζουμε στη γεωμετρική επίλυση της εξίσωσης 2ου βαθμού και οπτικοποιούμε τη γεωμετρική ερμηνεία των αλγεβρικών διαδικασιών της μεθόδου χρησιμοποιώντας αντικείμενα Lego.

Οι τετραγωνικές εξισώσεις

Οι εξισώσεις ιστορικά είναι συνδεδεμένες με τη λύση προβλημάτων που προέκυπταν από την καθημερινή ζωή των ανθρώπων.

Από τα αρχαία χρόνια επινοήθηκαν και χρησιμοποιήθηκαν τεχνικές για την επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού.

Οι Βαβυλώνιοι θεωρούνται από τους πρώτους λαούς που έλυναν εξισώσεις 2ου βαθμού χρησιμοποιώντας μια μέθοδο επίλυσής τους παρόμοια με τη σημερινή, αλλά διατυπωμένη με τη μορφή οδηγιών, σε αριθμητικά προβλήματα υπολογισμού μήκους και εμβαδού τετραγώνου ή ορθογωνίου (Θωμαΐδης, 2011; Melville, 2005).

Ένα κλασικό παράδειγμα της μεθόδου που εφάρμοζαν περιγράφεται στη Βαβυλωνιακή πλάκα BM 13.901 (στο Melville, 2005). Το πρόβλημα σε σημερινή απόδοση διατυπώνεται ως εξής: Πρόσθεσα την επιφάνεια και την πλευρά του τετραγώνου μου και βρήκα 0;45. Τα βήματα της περιγραφής της διαδικασίας επίλυσης, σε σημερινή ερμηνεία, ορολογία και συμβολισμό, αποτυπώνονται στον Πίνακα 1. Οι έντονες αριθμητικές επισημάνσεις είναι οι μετατροπές των αριθμητικών τιμών από το εξηκονταδικό στο δεκαδικό σύστημα.

Πρόβλημα	Πρόσθεσα την επιφάνεια και την πλευρά του τετραγώνου μου και βρήκα 0;45 (**0,75**)	
Βήμα 1	*Πάρε 1.*	0;60 (**1**)
Βήμα 2	*Χώρισε το στη μέση.*	0;30 (**0,50**) και 0;30 (**050**)

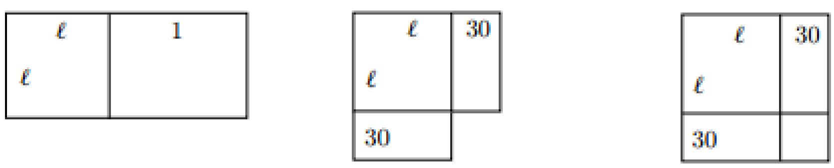
Βήμα 3	*Πολλαπλασίασε το 0;30 με το 0;30. Θα βρεις 0;15.*	0;30 (**0,5**) x 0; 30 (**0,5**) = 0;15 (**0,25**)
Βήμα 4	*Πρόσθεσε το 0;15 στο 0;45. Αποτέλεσμα 1.*	0;15(**0,25**)+ 0;45 (**0,75**) =0;60 (**1**)
Βήμα 5	*Η τετραγωνική ρίζα του 1 είναι το 1.*	Η τετραγωνική ρίζα του 0;60 (**1**) είναι 0;60 (**1**)
Βήμα 6	*Αφαίρεσε από το 1 το 0;30 που είχες πολλαπλασιάσει με τον εαυτό του.*	0;60 (**1**)- 0; 30 (**2,5**) = 0;30 (**0,5**)
Συμπέρασμα	*Η πλευρά του τετραγώνου είναι 0;30(**0,5**).*	

Πίνακας 1: BM 13901, Πρόβλημα 1

Υπολογίζονται κατά σειρά οι αριθμοί 0,5, 0,5^2, 0,5^2+0,75 , και βγαίνει το συμπέρασμα ότι η πλευρά είναι η τιμή της διαφοράς 1-0,5=0,5.

Αν παρατηρήσουμε τη διατύπωση του προβλήματος βλέπουμε ότι γίνονται πράξεις μεταξύ επιφάνειας και μήκους, δηλαδή πρόσθεση ανόμοιων μεγεθών. Οι Βαβυλώνιοι δεν είχαν αίσθηση της έννοιας του γεωμετρικού μεγέθους, τους ενδιέφερε μόνο η ποσότητα που εκφράζονταν σε αριθμούς και όχι η γεωμετρική έννοια της ποσότητας (Συνοδινού, 2010, σ. 17).

Ο Høyrup προτείνει μια πολύ απλή γεωμετρική ερμηνεία της διαδικασίας επίλυσης του προβλήματος με τα χαρακτηριστικά του cut-and-paste: Η επιφάνεια στην οποία αναφέρεται στο πρόβλημα, είναι το ορθογώνιο που σχηματίζεται επεκτείνοντας την πλευρά του τετραγώνου κατά 1 (Høyrup, 2002 στο Melville, 2005). Ακολουθώντας τις οδηγίες επίλυσης και κόβοντας στη μέση την επέκταση της πλευράς σχηματίζονται δυο ορθογώνια. Το ένα από αυτά μετακινείται έτσι ώστε να σχηματιστεί ένας γνώμονας. Τα κομμάτια που έχουν μετακινηθεί δίνουν τη δυνατότητα να συμπληρωθεί ο γνώμονας με τετράγωνο πλευράς 0;30 (0,5).



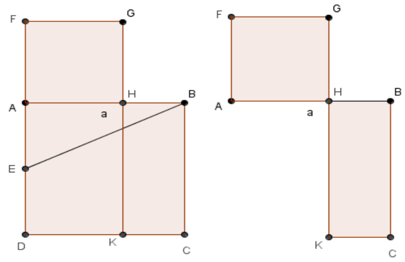
Σχήμα 1: Σχηματική αναπαράσταση της διαδικασίας επίλυσης BM 13901 του Προβλήματος 1 (στο Melville (2005).

Αν χρησιμοποιήσουμε σημερινό συμβολισμό και ονομάσουμε l την πλευρά του τετραγώνου τότε το αρχικό πρόβλημα μαθηματικοποιείται με την εξίσωση   και η σχηματική του μορφή με την εξίσωση :

$$l(l+1)=0,75 \rightarrow l(l+0,5+0,5)=0,75 \rightarrow l^2+0,5l+0,5l=0,75 \rightarrow$$
$$l^2+0,5l+0,5l+0,25=0,75+0,25 \rightarrow l^2+2\cdot 0,5l+(0,5)^2=1 \rightarrow$$
$$(l+0,5)^2=1 \rightarrow l+0,5=1 \rightarrow l=1-0,5 \rightarrow l=0,5$$

Εξισώσεις 2ου βαθμού έλυναν και οι αρχαίοι Έλληνες της κλασικής περιόδου κυρίως με γεωμετρικές μεθόδους (Θωμαΐδης, 2011).

Ένα παράδειγμα επίλυσης εξισώσεων 2ου βαθμού αποτελεί η πρόταση II.11 του Βιβλίου II των Στοιχείων του Ευκλείδη που είναι γνωστή ως πρόβλημα διαίρεσης σε μέσο και άκρο λόγο: Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.



Σχήμα 2: Σχηματική αναπαράσταση της λύσης της II.11 του Βιβλίου II των *Στοιχείων* του Ευκλείδη.

Δηλαδή να διαιρεθεί ένα ευθύγραμμο τμήμα AB (:α) σε δυο τμήματα AH (:x) και HB (:α-x) έτσι ώστε το ορθογώνιο που περιέχεται από ολόκληρο το AB και το μικρότερο τμήμα HB να είναι ίσο με το τετράγωνο που έχει για πλευρά το μεγαλύτερο τμήμα AH. Πιο συγκεκριμένα, να βρεθεί σημείο H πάνω στην AB έτσι ώστε να ισχύει ή ισοδύναμα να ισχύει (AHGF)=(HBCK). Αυτή η πρόταση είναι ένα πρόβλημα γεωμετρικής κατασκευής χωρίς να γίνεται αναφορά σε μήκη, εμβαδά και αριθμητικές πράξεις και μαθηματικοποιείται με την εξίσωση ή (Θωμαΐδης, 2011).

Για να βρεθεί το σημείο H ακολουθείται η εξής διαδικασία: Με πλευρά το AB κατασκευάζουμε τετράγωνο ABCD και έστω E το μέσο της πλευράς AD. Στον φορέα της πλευράς DA και προς το μέρος του A παίρνουμε τμήμα EF=EB και κατασκευάζουμε τετράγωνο AFGH πλευράς AF. Τότε το σημείο H είναι το ζητούμενο και ισχύει (AHGF)=(HBCK). Αν η προέκταση της GH προς το H τέμνει την DC στο K, τότε σύμφωνα με την πρόταση II.6 των Στοιχείων του Ευκλείδη, το ορθογώνιο με πλευρές DF και AF μαζί με το τετράγωνο με πλευρά το AE θα είναι ίσο με το τετράγωνο με πλευρά EF:

- (1) $DF \cdot AF + AE^2 = EF^2$
- $DF \cdot AF + EB^2 = EF^2$ (2) καθώς $EF = EB$..
- $DF \cdot AF + AE^2 = AE^2 + AB^2$ (πρόταση I.47, πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο EAB)
- $DF \cdot AF = AB^2$

- $(DFGK) = (ABCD)$ (3)

Αν από τα εμβαδά της (3) αφαιρέσουμε το εμβαδόν του ορθογωνίου AHKD, που είναι κοινό και στα δύο ορθογώνια, τότε θα έχουμε:

$(AFGH) = (HBCK)$ ή $AH^2 = BC \cdot HB$ ή $AH^2 = AB \cdot HB$

και τελικά $\alpha(\alpha - x) = x^2$ ή $x^2 + ax = \alpha^2$.

Ωστόσο η παλαιότερη γνωστή συζήτηση για την επίλυση τετραγωνικής εξίσωσης έγινε μεταξύ 800 και 1100 μ.Χ. Οι πιο γνωστοί που ασχολήθηκαν με το θέμα αυτό ήταν ο Mohammed Ibn Musa al'Khowarizmi (που έμενε στη Βαγδάτη) και ο Omar al'Khayyam (που έζησε στην Περσία, το σημερινό Ιράν, και είναι κυρίως γνωστός στη Δύση για την ποίηση του). Και οι δυο έγραψαν βιβλία στα οποία υπάρχουν γεωμετρικές και αριθμητικές λύσεις τετραγωνικών εξισώσεων και γεωμετρικές αποδείξεις αυτών των λύσεων.

Στους Βαβυλώνιους, όπως και στους Έλληνες και στους Άραβες, το πρώτο πράγμα που μπορεί να παρατηρηθεί είναι ότι δεν υπάρχει μία γενική δευτεροβάθμια εξίσωση με τη μορφή ax2 + bx + c = 0 που γνωρίζουμε (Henderson, 2013). Αντίθετα, επειδή η χρήση των αρνητικών συντελεστών και αρνητικές ρίζες αποφεύγεται, επιλύονται εξισώσεις συγκεκριμένων τύπων που έχουν συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου ίσο με 1, με τους συντελεστές b και c να είναι πάντα θετικοί αριθμοί ή να εκφράζουν γεωμετρικό μήκος (: το b) και εμβαδό (: το c) και με θετικές ρίζες.

$$x^2 = c \qquad x^2 = bx \qquad x^2 + bx = c \qquad x^2 + c = bx \qquad x^2 = bx + c$$

Δε συναντάται εξίσωση της μορφής x2 + bx + c = 0 καθώς αυτή δεν έχει θετικές ρίζες. Καθώς για να έχει ρίζες, απαιτείται η διακρίνουσα Δ να είναι θετικός αριθμός. Όμως , οπότε $\sqrt{b^2 - 4c} < \sqrt{b^2}$ ή ισοδύναμα . Τότε οι ρίζες θα είναι της μορφής $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} < 0$ και $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} < 0$

Κατά τον Henderson (2013) αν υποτεθεί ότι –ρ (ρ θετικό) είναι η ρίζα της εξίσωσης τότε θα ισχύει $(-\rho)^2 = b(-\rho) + c \Rightarrow \rho^2 = -b\rho + c \Rightarrow \rho^2 + b\rho = c$. Επομένως, το ρ θα είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2 = bx + c$. Δηλαδή, η απόλυτη τιμή της αρνητικής ρίζας της εξίσωσης $x^2 = bx + c$ είναι ρίζα της $x^2 + bx = c$ και αντίστροφα.

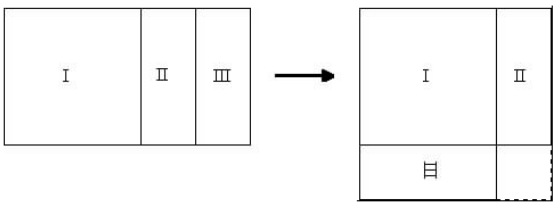
Έτσι, είναι παραπλανητικό να ισχυρίζεται κανείς, όπως κάνουν οι περισσότερες ιστορικές καταγραφές, ότι οι γεωμετρικές μέθοδοι δεν βρίσκουν αρνητικές ρίζες. Οι χρήστες των μεθόδων αυτών δεν βρίσκουν αρνητικές ρίζες, επειδή δεν τις αντιλαμβάνονται. Ωστόσο, οι μέθοδοι μπορούν εύκολα και άμεσα να χρησιμοποιηθούν για να βρεθούν όλες τις αρνητικές ρίζες.

Η γεωμετρική μέθοδος συμπλήρωσης τετραγώνου

Ο Henderson (2013) αναφέρει ότι το πρόβλημα του μετασχηματισμού ενός ορθογωνίου σε τετράγωνο περιγράφεται στο έργο Sulba Sutram του Baudhayana Πρόκειται για ένα βιβλίο γραμμένο στα σανσκριτικά που αποτελούσε εγχειρίδιο για τους ανθρώπους που έχτιζαν ναούς και βωμούς. Το μεγαλύτερο μέρος του βιβλίου δίνει λεπτομερείς οδηγίες για το σχεδιασμό και την κατασκευή του ναού. Το πρώτο κεφάλαιο είναι βιβλίο γεωμετρίας που περιέχει γεωμετρικές προτάσεις αποκαλούμενες "Sutra". Η πρόταση Sutra 54 λέει: [σημείωση: η έκφραση επίμηκες (oblong) σημαίνει ορθογώνιο.]

"Αν θέλετε να μετατρέψετε ένα επίμηκες σε ένα τετράγωνο, πάρτε τη μικρότερη πλευρά του επιμήκους για πλευρά του τετραγώνου. Χωρίστε το υπόλοιπο [το μέρος του επιμήκους το οποίο μένει μετά την κοπή του τετραγώνου] σε δύο μέρη και αναστρέφοντας (τις θέσεις τους) εντάξτε αυτά τα δύο τμήματα σε δύο πλευρές [διαδοχικές] του τετραγώνου. (Παίρνουμε έτσι ένα μεγάλο τετράγωνο μια γωνία του οποίου είναι γωνία του μικρού τετραγώνου που κόπηκε). Γεμίστε το άδειο μέρος [στη γωνία] με την προσθήκη ενός κομματιού (ένα μικρό τετράγωνο). Αυτό έχει διδάξει πώς μπορεί να εκπέσει (να αφαιρεθεί το προστιθέμενο κομμάτι)."

Στην πρόταση Sutra 51 σημειώνεται: "Προσθέτοντας το μικρό τετράγωνο στη γωνία θα πάρετε ένα μεγαλύτερο τετράγωνο που είναι ίσο με το επίμηκες συν το μικρό τετράγωνο, ως εκ τούτου, θα πρέπει να αφαιρέσετε το μικρό τετράγωνο από το μεγάλο τετράγωνο και στη συνέχεια μας μένει ένα τετράγωνο το οποίο είναι ίσο με το επίμηκες."



Σχήμα 3: Σχηματική αναπαράσταση των προτάσεων *Sutra 51και 54,στο Henderson (2013).*

Γεωμετρική επίλυση εξίσωσης 2ου βαθμού με lego

Ως ομάδα αναλάβαμε να μελετήσουμε το θέμα της επίλυσης εξίσωσης 2ου βαθμού με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου, προκειμένου να την παρουσιάσουμε στους συμμαθητές μας. Η μέθοδος απαιτεί ένα σχετικά καλό γνωστικό υπόβαθρο αλγεβρικών γνώσεων και αλγεβρικών διαδικασιών όπως, παραγοντοποίηση, ταυτότητες και γνώση της έννοιας της τετραγωνικής ρίζας. Όμως, για κάποιον μαθητή που δεν έχει αυτό το υπόβαθρο γνώσεων, η μέθοδος μπορεί να τον δυσκολέψει και είναι πολύ πιθανόν να απομνημονεύσει τη διαδικασία και τους τύπους που επιλύουν μια δευτεροβάθμια εξίσωση, χωρίς ποτέ να καταλάβει το γιατί είναι αυτοί τύποι και το πώς προκύπτουν.

Η αναγνώριση στον όρο (α/2β)^2διπλής ερμηνείας, ως τετραγωνική δύναμη πραγματικού αριθμού αλλά και εμβαδόν τετραγώνου, μας έκανε εντύπωση. Η μελέτη των πηγών, για τις γεωμετρικές αναπαραστάσεις των διαδικασιών επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων, μας οδήγησε στην ιδέα κατά πόσο θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε αντικείμενα Lego προκειμένου να αναπαραστήσουμε τις αλγεβρικές ιδέες και διαδικασίες της μεθόδους συμπλήρωσης τετραγώνου ξεκινώντας με παραδείγματα εξισώσεων με αριθμητικούς συντελεστές για να βρούμε τις λύσεις τους, και αν αυτή διαδικασία μπορεί να μας δώσει την ιδέα για την γενίκευση της διαδικασίας στη γενική μορφή της εξίσωσης .

Τα αντικείμενα Lego που χρησιμοποιήσαμε ήταν δυο ειδών: τετράγωνα-Lego και ορθογώνια Lego μήκους ίσου με την πλευρά του τετραγώνου και πλάτους όλα μιας «μονάδας-Lego».

Στον Πίνακα 2 περιγράφονται τα χαρακτηριστικά των ομάδων των εξισώσεων που επιλύσαμε με την τεχνική της συμπλήρωσης τετραγώνου μοντελοποιώντας τα διαδοχικά βήματα της μεθόδου με αντικείμενα Lego. Οι εξισώσεις της 4η ομάδας του Πίνακα 2 ανάγονται σε μια από τις τρεις προηγούμενες ομάδες μέσω της μεθόδου του κοινού παράγοντα.

$1^η$ ομάδα	$2^η$ ομάδα	$3^η$ ομάδα	$4^η$ ομάδα
α=1 β=2κ, κ ακέραιος $\gamma = c$	α=1 $\beta \neq 2\kappa$ $\gamma = c$	$\alpha \neq 1$ $\beta \in \Re$ $\gamma = c$	α και β πολλαπλάσια

Πίνακας 2: Χαρακτηριστικά ομάδων εξισώσεων που επιλύθηκαν με χρήση Lego

Στα Σχήματα 3 και 4 παρουσιάζονται παραδείγματα μοντελοποίησης της τεχνικής της συμπλήρωσης τετραγώνου με αντικείμενα Lego σε συγκεκριμένες εξισώσεις της μορφής με συντελεστές α και β μη αρνητικούς.

Για παράδειγμα, στο Σχήμα 4 μοντελοποιούνται με αντικείμενα Lego τα διαδοχικά βήματα (α), (β) και (γ) της τεχνικής της συμπλήρωσης τετραγώνου στην εξίσωση (1) της οποίας η τεχνική επίλυσής της μπορεί να περιγραφεί αλγεβρικά ως εξής:

$$x^2+6x+c=0 \xrightarrow{(\alpha)} x^2+1x+1x+1x+1x+1x+1x+c=0$$

$$\xrightarrow{(\beta)} x^2+2\cdot 3x+c=0 \xrightarrow{(\gamma)} x^2+2\cdot 3x+3^2-3^2+c=0$$

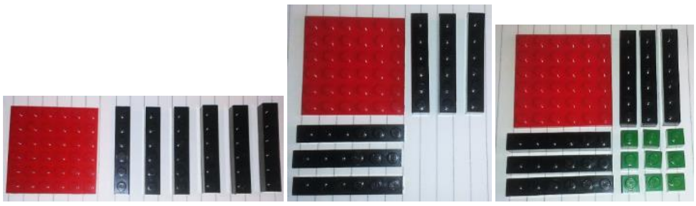
$$\rightarrow (x+3)^2-3^2+c=0 \rightarrow (x+3)^2=9-c \qquad (\iota)$$

Από τη σχέση (ι) έγινε άμεσα κατανοητό ότι η ύπαρξη ή μη λύσεων καθώς και το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης εξαρτάται από το πρόσημο του .

Τα ίδια μοντέλα των βημάτων (α), (β) και (γ) του Σχήματος 4 σχηματοποιούν την τεχνική συμπλήρωσης τετραγώνου με Lego και για τις εξισώσεις (2) (εξίσωση 2ης ομάδας) και (3) (εξίσωση 3ης ομάδας). Καθώς, πολλαπλασιάζοντας τα μέλη της εξίσωσης (2) με (όπου 1 ο συντελεστής του) και τα μέλη της εξίσωσης (3) με (όπου 2 ο συντελεστής του) οι δυο εξισώσεις ανάγονται στη μορφή της εξίσωσης (1):

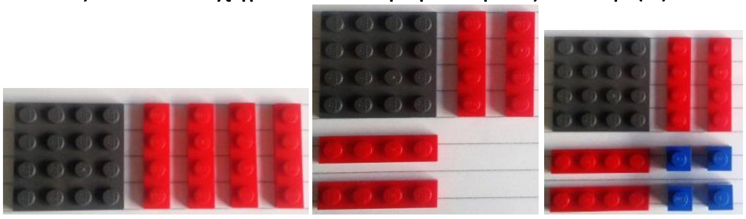
$$x^2+3x+c=0 \xrightarrow{\cdot 4} 4x^2+12x+4c=0 \rightarrow (2x)^2+6(2x)+4c'=0 \rightarrow t^2+6t+c'=0 \quad (2)$$

$$2x^2+3x+c=0 \xrightarrow{\cdot 8} 16x^2+24x+8c=0 \rightarrow (4x)^2+6(2x)+c'=0 \rightarrow t^2+6t+c'=0 \quad (3)$$



Σχήμα 4: Παράδειγμα μοντελοποίησης της τεχνικής της συμπλήρωσης τετραγώνου με Lego για εξισώσεις που είναι ή ανάγονται στη μορφή $x^2+3x+c=0$

Ένα άλλο παράδειγμα μοντελοποίησης της τεχνικής συμπλήρωσης τετραγώνου παρουσιάζεται στο Σχήμα 5 και αφορά την εξίσωση (5).



Σχήμα 5: Παράδειγμα μοντελοποίησης της τεχνικής της συμπλήρωσης τετραγώνου με Lego για εξισώσεις που είναι ή ανάγονται στη μορφή $x^2+4x+c=0$

Η αλγεβρική περιγραφή της τεχνικής επίλυσης της εξίσωσης δίνεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$x^2+4x+c=0 \xrightarrow{(\alpha)} x^2+1x+1x+1x+1x+c=0$$

$$\xrightarrow{(\beta)} x^2+2\cdot 2x+c=0 \xrightarrow{(\gamma)} x^2+2\cdot 2x+2^2-2^2+c=0$$

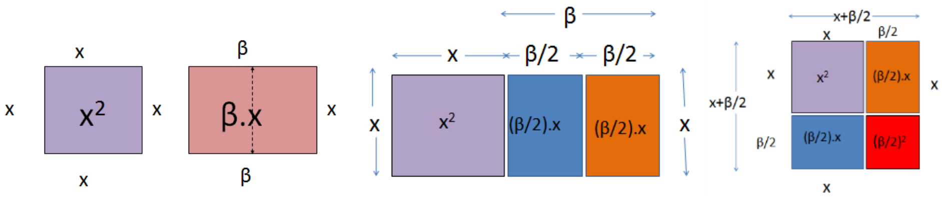
$$\rightarrow (x+2)^2-2^2+c=0 \rightarrow (x+2)^2=4-c \qquad (\iota)$$

Από τη σχέση (ι) έγινε και πάλι άμεσα κατανοητό ότι η ύπαρξη ή μη λύσεων καθώς και το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης εξαρτάται από το πρόσημο του .

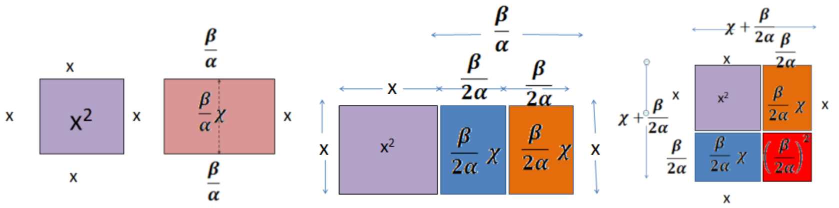
Με ίδια μοντέλα των βημάτων (δ), (ε) και (στ) του Σχήματος 5 σχηματοποιείται η τεχνική της συμπλήρωσης τετραγώνου με Lego και για την εξίσωση (6) (εξίσωση 3ης ομάδας) εφαρμόζοντας παρόμοια τεχνική όπως αυτή των εξισώσεων (2) και (3) του πρώτου παραδείγματος, δηλαδή, πολλαπλασιασμός των μελών της εξίσωσης (6) με .

Τα παραδείγματα μας βοήθησαν να εφαρμόσουμε την ιδέα της γεωμετρικής επίλυσης σχηματικά πρώτα για την εξίσωση της μορφής και στη συνέχεια για την εξίσωση (Σχήμα 6, 7)

Η γεωμετρική προσέγγιση των λύσεων των εξισώσεων αυτών οδήγησε να αντιληφθούμε την ιδέα της γενίκευσης με την τεχνική της συμπλήρωσης τετραγώνου και να οδηγηθούμε, στη συνέχεια, στη διερεύνηση της ύπαρξης και στους τύπους των ριζών αλγεβρικά.



Σχήμα 6: Σχηματική αναπαράσταση της τεχνικής της συμπλήρωσης τετραγώνου γεωμετρικής επίλυσης της εξίσωσης $x^2+\beta x+\gamma=0$



Σχήμα 7: Σχηματική αναπαράσταση της γεωμετρικής επίλυσης της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$

Συμπεράσματα

Η μελέτη των πηγών της προέλευσης της μεθόδου συνέβαλε στη διαπίστωση ότι η επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού έχει διέλθει πολλά στάδια και να συνειδητοποιήσουμε τα χαρακτηριστικά της συγκεκριμένης αλγεβρικής γνώσης που ενσωματώνεται στην αλγεβρική διαδικασία εύρεσης των τύπων των ριζών μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Η οπτικοποίηση της γεωμετρικής ερμηνείας της μεθόδου συμπλήρωσης τετραγώνου με χρήση Lego, έστω και με τους περιορισμούς της (θετικοί συντελεστές για τους άγνωστους όρους της εξίσωσης), έδωσε την ευκαιρία σε μας και στους συμμαθητές μας να ανακαλύψουμε και να αντιληφθούμε τα χαρακτηριστικά της επίλυσης εξισώσεων δευτέρου βαθμού με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου, γεγονός που παρέχει εξήγηση για την προέλευση του ονόματος και την εξαγωγή του τύπου των ριζών της εξίσωσης.

Βιβλιογραφία

[1] Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., Σβέρκος, Α., Αδαμόπουλος, Λ., Δαμιανού, Χ. (2015). Άλγεβρα Α Λυκείου (Βιβλίο Μαθητή), ΥΠ.Ε.Π.Θ., Α ΕΚΔΟΣΗ Αθήνα (2010)

[2] Θωμαΐδης, Γ. (2011). Εξισώσεις και ανισώσεις δευτέρου βαθμού στα Αριθμητικά του Διόφαντου. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις ΖΗΤΗ.

[3] Συνοδινού, Ι. (2010).Από την εφαρμογή των χωρίων στη σύγχρονη επίλυση εξισώσεων. ΕΚΠΑ, Αθήνα: Διπλωματική Εργασία. Ανακτημένο 20/1/17 από

http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_Synodinou.Ifigeneia.pdf

[4] Henderson, D. W. (2013). Geometric Solutions of Quadratic and Cubic equations. Department of Mathematics, Cornell University.

[5] J Melville, D. (2005). The area and the side I added: Some Old Babylonian geometry. Revue d’histoire des mathématiques, 11(1), 7-22. Ανακτημένο 22/1/17 από

http://smf4.emath.fr/Publications/RevueHistoireMath/11/pdf/smf_rhm_11_7-21.pdf