ePublishing

Open Schools Journal for Open Science

Vol 2, No 1 (2019)

Special Issue Articles from the 1st Greek Student Conference on Research and Science

«Ελεύθερη» πτώση σωμάτων. Υπολογισμός αντίστασης αέρα.

Αναστασία Λύρη, Άγγελος Κονταρίνης, Ιωάννα Νικολακοπούλου, Κωνσταντίνος Συλάιδος, Ελευθερία Μηχανετζή, Πηνελόπη Μυλωνά, Μάξιμος Στόλλας, Ιωάννης Χιωτέλλης

doi: 10.12681/osj.19580

To cite this article:

Λύρη Α., Κονταρίνης Ά., Νικολακοπούλου Ι., Συλάιδος Κ., Μηχανετζή Ε., Μυλωνά Π., Στόλλας Μ., & Χιωτέλλης Ι. (2019). «Ελεύθερη» πτώση σωμάτων. Υπολογισμός αντίστασης αέρα. *Open Schools Journal for Open Science*, *2*(1), 408–419. https://doi.org/10.12681/osj.19580

https://epublishing.ekt.gr | **e-Publisher:** EKT | **Downloaded at:** 25/01/2026 17:31:17

https://epublishing.ekt.gr | **e-Publisher:** EKT | **Downloaded at:** 25/01/2026 17:31:17

Open Schools Journal for Open Science

Volume 1

«Ελεύθερη» πτώση σωμάτων. Υπολογισμός αντίστασης αέρα.

Κονταρίνης Άγγελος[1], Νικολακοπούλου Ιωάννα[1], Συλάιδος Κωνσταντίνος[1], Μηχανετζή Ελευθερία[1], Μυλωνά Πηνελόπη[1], Στόλλας Μάξιμος[1], Αναστασία Λύρη[1], Χιωτέλης Ιωάννης[1]

[1]Πειραματικό Λύκειο Πανεπιστημίου Πατρών

Περίληψη

Σύμφωνα με τη θεωρία της ελεύθερης πτώσης όλα τα σώματα που αφήνονται ελεύθερα υπό την επίδραση μόνο του βάρους τους να πέσουν από το ίδιο ύψος φτάνουν στο έδαφος ταυτόχρονα. Ωστόσο, όπως γνωρίζουμε αυτό δε συμβαίνει στην πραγματικότητα, καθώς η παρουσία του αέρα μέσω της αντίστασης που προβάλλει δεν επιτρέπει τα σώματα να εκτελέσουν ελεύθερη πτώση. Με τη βοήθεια της εφαρμογής Video Physics για Ipad πραγματοποιήσαμε σειρά μετρήσεων σωμάτων που αφέθηκαν να εκτελέσουν πτώση. Από το δεύτερο όροφο του σχολείου μας αφήσαμε να εκτελέσουν πτώση μπάλες διαφόρων μεγεθών και βαρών. Επιλέξαμε αθλητικές μπάλες ποδοσφαίρου, καλαθοσφαίρισης, αντισφαίρισης και επιτραπέζιας αντισφαίρισης, ώστε να είναι εμπειρικά αντιληπτό το μέγεθος και το βάρος τους. Με τη βοήθεια του tracker που υποστηρίζει η εφαρμογή Video Physics καταγράψαμε τις τροχιές των σωμάτων που εκτελούσαν πτώση και στη συνέχεια σχεδιάσαμε τις γραφικές παραστάσεις μετατόπισης – χρόνου και ταχύτητας – χρόνου στον κατακόρυφο άξονα. Στη συνέχεια με την εφαρμογή Graphical προσομοιάσαμε τα πειραματικά δεδομένα με σκοπό να βρούμε τη βέλτιστη καμπύλη που τα προσεγγίζει ικανοποιητικότερα. Από τις μετρήσεις και την προσομοίωση καταλήξαμε σε συμπεράσματα σχετικά με την αντίσταση του αέρα στα υπό μελέτη σώματα. Το μπαλάκι του πινγκ πονγκ φαίνεται να εμφανίζει τη μεγαλύτερη αντίσταση αέρα, ενώ η μπάλα του ποδοσφαίρου και της καλαθοσφαίρισης εμφανίζουν παραπλήσιες αντιστάσεις αέρα. Η εφαρμογή Video Physics παρέχει τόσο το Video της κίνησης, όσο και τις γραφικές παραστάσεις των μετατοπίσεων και των ταχυτήτων σε σχέση με το χρόνο στους άξονες x και y..

Λέξεις κλειδιά

Ελεύθερη πτώση, πτώση σωμάτων, αντίσταση αέρα, Video Physics, Graphical, tracker

Εισαγωγή

Το 1589 ο Γαλιλαίος λέγεται ότι άφησε να πέσουν δύο σφαίρες διαφορετικών μαζών από το περίφημο πύργο της Πίζας για να αποδείξει ότι ο χρόνος πτώσης είναι ανεξάρτητος των μαζών τους (Drake, 2003). Με το πείραμα αυτό υποτίθεται ότι ανακάλυψε ότι τα αντικείμενα αποκτούν πέφτοντας μέσα στο βαρυτικό πεδίο της Γης την ίδια επιτάχυνση, διαψεύδοντας την αντίστοιχη Αριστοτελική θεωρία της βαρύτητας (ότι τα αντικείμενα πέφτουν με ταχύτητα που εξαρτάται από τη μάζα τους). Πράγματι, ο Αριστοτέλης δίδασκε: ότι τα βαριά αντικείμενα πέφτουν πιο γρήγορα από ότι τα ελαφρότερα, σε συμφωνία και με τη φυσική μας διαίσθηση.

Ωστόσο, παρά τη δημοφιλία της συγκεκριμένης ιστορίας, στην πραγματικότητα ο Γαλιλαίος δεν πραγματοποίησε ποτέ το συγκεκριμένο πείραμα, ενώ οι περισσότεροι ιστορικοί συμφωνούν ότι πρόκειται απλά για ένα υποθετικό πείραμα (Groleau, 2002) (Ball, 2005). Παρδόξως, το 1586 σε ένα βιβλίο ορόσημο της στατικής (The Principles of Statics - De Beghinselen der Weeghconst) ο Simon Stevin περιγράφει ένα αντίστοιχο πείραμα που έλαβε χώρα στο Ντελφτ της Ολλανδίας (Drake, 1978)

Ο μαθηματικός και φυσικός Simon Stevin και ο Jan Cornets de Groot διεξήγαγαν το πείραμα αφήνοντας δύο σώματα διαφορετικών μαζών να πέσουν από την κορυφή της Εκκλησίας Nieuwe Kerk (Asimov, 1972). Όπως σημειώνουν στο βιβλίο «Αφήσαμε να πέσουν ταυτόχρονα από ύψος 30 ποδιών δύο μπάλες από μόλυβδο, η μια δέκα φορές βαρύτερη από την άλλη. Η βαρύτερη μπάλα όχι μόνο δεν έπεσε γρηγορότερα, αλλά οι και οι δυο σφαίρες έπεσαν μαζί την ίδια στιγμή στο έδαφος. (...) Αυτό αποδεικνύει ότι ο Αριστοτέλης έχει κάνει λάθος..» (Dijksterhuis,1955). Όμως γιατί υπήρχε αυτή η εσφαλμένη αντίληψη, που ωστόσο συμφωνεί με τη φυσική μας διαίσθηση και τις αισθήσεις μας;

Από τις 26 Ιουλίου και μέχρι τις 7 Αυγούστου 1971, έλαβε χώρα η αποστολή Apollo 15 στο φεγγάρι. Ο αστροναύτης David Scott υλοποίησε τελικά το περίφημο πείραμα του Γαλιλαίου αφήνοντας ένα σφυρί και ένα φτερό να πέσουν στην επιφάνεια της Σελήνης από το ίδιο ύψος. Επιβεβαιώνοντας τη θεωρία της ελεύθερης πτώσης του Γαλιλαίου, τα δύο σώματα με διαφορετικές μάζες, έπεσαν ταυτόχρονα στο έδαφος της Σελήνης, αποκαλύπτοντας ότι η αντίσταση του αέρα διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο στη συμπεριφορά των σωμάτων κατά την ελεύθερη πτώση (Van Helden & Burr, 1995).

Ακριβώς αυτή την εξάρτηση της αντίστασης του αέρα από το μέγεθος των σωμάτων που εκτελούν πτώσεις και από το βάρος τους αναζητήσαμε εκτελώντας σειρά πειραμάτων. Από ύψος 8 μέτρων αφήσαμε μπάλες ποδοσφαίρου, καλαθοσφαίρισης, αντισφαίρισης και επιτραπέζιας αντισφαίρισης να πέσουν καταγράφοντας την κίνηση τους με το λογισμικό Video Physics, που χρησιμοποιεί τεχνική tracker για να ανιχνεύει την κίνηση ενός σώματος και να δημιουργήσει αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις φυσικών μεγεθών.

Αντίσταση του αέρα

Οι δυνάμεις τριβής που προκύπτουν κατά την κίνηση σώματος μέσα σε ρευστό (αέρα ή νερό) συνήθως αυξάνονται όσο αυξάνεται η ταχύτητα του σώματος στο ρευστό. Για μικρές ταχύτητες η δύναμη αντίστασης F του υγρού είναι περίπου ανάλογη προς την ταχύτητα του σώματος.

$$F = -ku \qquad (1)$$

Όπου k είναι η σταθερά αναλογίας η οποία εξαρτάται από το σχήμα και το μέγεθος του σώματος και τις ιδιότητες του ρευστού. Θεωρώντας ως θετική κατεύθυνση την κατεύθυνση προς τα κάτω και αγνοώντας τη δύναμη της άνωσης, βρίσκουμε ότι η ολική κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης είναι

$$\mathrm{mg} - \mathrm{ku} = \mathrm{ma} \qquad (2)$$

Τη χρονική στιγμή της εκκίνησης της πέτρας u=0, η αντίσταση είναι μηδέν και η αρχική επιτάχυνση είναι α=g. Καθώς αυξάνεται η ταχύτητα του σώματος, αυξάνεται και η αντίσταση ώσπου να επέλθει τελικά εξίσωση των μέτρων της αντίστασης και του βάρους. Τότε mg-ku=0, η επιτάχυνση γίνεται μηδέν και δεν υπάρχει περαιτέρω αύξηση της ταχύτητας. Η τελική ταχύτητα u_τελ λέγεται ορική 9ή οριακή) ταχύτητα και δίνεται από τη σχέση:

$$\mathrm{mg} - \mathrm{k}u_{\tau\varepsilon\lambda} = 0 \qquad (3)$$

ή

$$u_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{mg}{k} \qquad (4)$$

Στις κινήσεις μεγάλης ταχύτητας εντός του αέρα η δύναμη αντίστασης είναι κατά προσέγγιση ανάλογη του u^2και όχι του u. Πολλοί ονομάζουν αυτή την αντίσταση οπισθολκή του αέρα ή απλώς οπισθολκή. Σταγόνες βροχής σε πτώση, αεροπλάνα σε πτήση και αυτοκίνητα που κινούνται με μεγάλες ταχύτητες, όλα υφίστανται την οπισθολκή (αντίσταση) του αέρα.

Πειραματική διάταξη

Για την εκτέλεση του πειράματος αρχικά μετρήσαμε τα φυσικά χαρακτηριστικά (βάρος και περιφέρεια) των αντικειμένων που θα αφήναμε να εκτελέσουν πτώση. Στον παρακάτω Πίνακα 1 φαίνονται οι τιμές των αντίστοιχων χαρακτηριστικών.

Αντικείμενο	**Μπάλα Καλαθοσφαίρισης**	**Μπάλα Ποδοσφαίρου**	**Μπάλα Αντισφαίρισης**	**Μπάλα Επιτραπέζιας Αντισφαίρισης**
Μάζα (Kg)	0,640	0,445	0,08	0,003
Περίμετρος (m)	0,76	0,68	0,20	0,12

Πίνακας 1: Φυσικά χαρακτηριστικά αντικειμένων που εκτέλεσαν πτώση.

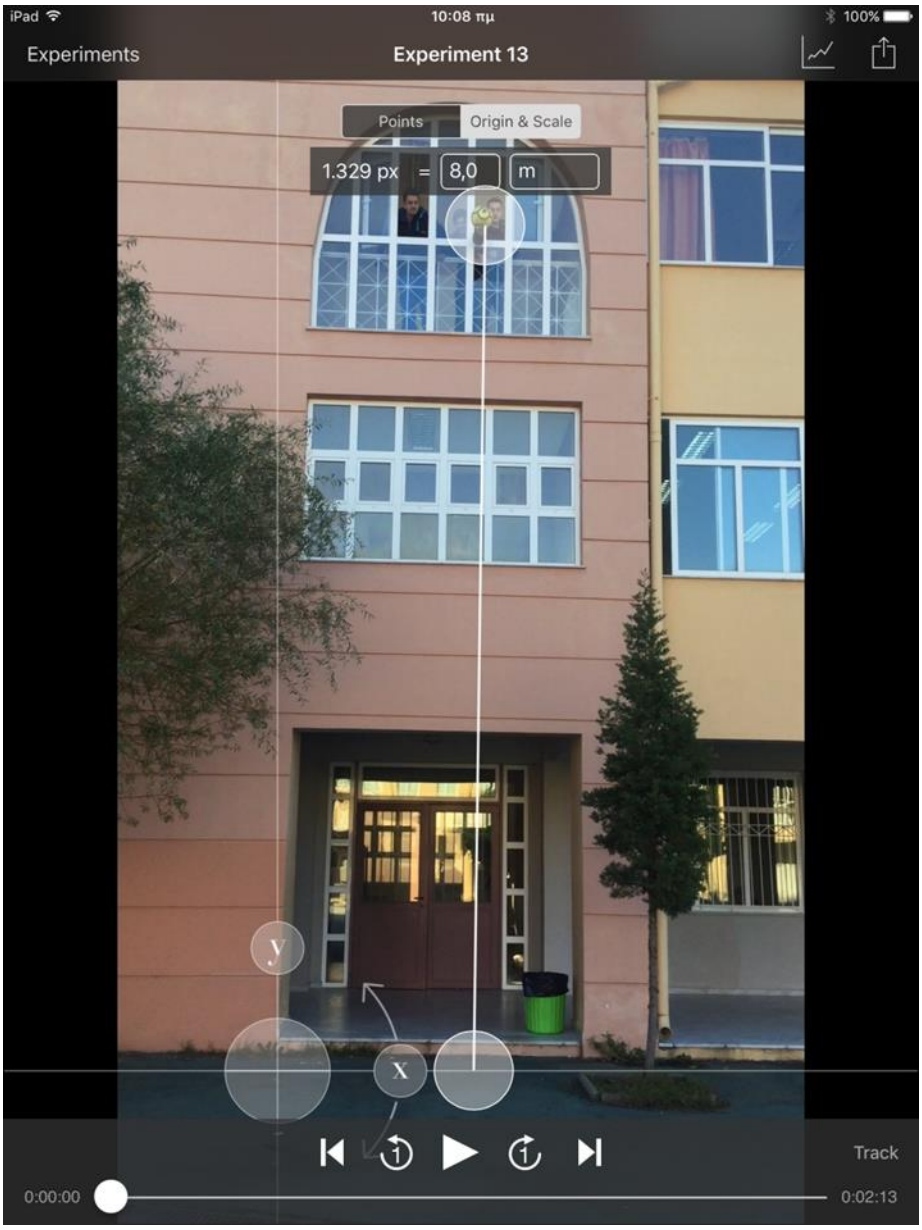
Στη συνέχεια προσδιορίσαμε ένα σταθερό σημείο από το οποίο θα αφήναμε τα αντικείμενα να πέσουν και μετρήσαμε με μετροταινία το ύψος. Επιλέξαμε να αφήσουμε τα αντικείμενα από το δεύτερο όροφο του Πειραματικού Λυκείου του Πανεπιστημίου Πατρών από ύψος 8 m, όπως φαίνεται στην Εικόνα 1. Είναι σημαντική η επιλογή σταθερού σημείου και η επανάληψη των μετρήσεων από το ίδιο σημείο τόσο για λόγους βαθμονόμησης, όσο και για εισαγωγή δεδομένων στο λογισμικό Video Physics, ώστε ο tracker να υπολογίσει τα φυσικά μεγέθη συναρτήσει της θέσεως και του χρόνου του αντικειμένου που πέφτει.

Στη συνέχεια τοποθετήσαμε το ipad (εναλλακτικά είχαμε και iphone) με εγκατεστημένο το λογισμικό Video Physics σε σταθερό σημείο προσαρμοσμένο σε τρίποδο, ώστε να μπορεί να καταγράψει το video της κίνησης ανεπηρέαστο και με σταθερή βάση. Αυτή η διαδικασία είναι σημαντική στην ανίχνευση το αντικειμένου που πέφτει από τον tracker. Επίσης, εάν δεν είναι σε σταθερό σημείο το ipad δε θα καταγράφαμε ακριβώς τις διαδοχικές θέσεις (διαδοχικά σημεία) εισάγοντας έτσι σφάλματα στο πείραμα. Επίσης, επαναλάβαμε τις πτώσεις αρκετές φορές, ώστε να έχουμε επαναληψιμότητα στις μετρήσεις μας.

Καταγραφή πειραματικών δεδομένων – επεξεργασία

Με τη βοήθεια του λογισμικού Video Physics καταγράφουμε το βίντεο των κινήσεων (πτώσεων) των αντικειμένων. Στη συνέχεια «πληροφορούμε» τον tracker για το αντικείμενο που πρέπει να «ακολουθήσει» καταγράφοντας τις διαδοχικές θέσεις για συγκεκριμένα χρονικά διαστήματα (φωτογραφικά καρέ). Το λογισμικό δίνει τη δυνατότητα χειροκίνητης καταγραφής των διαδοχικών θέσεων του αντικειμένου σε περίπτωση που ο tracker «χάνει» το ίχνος. Η απώλεια

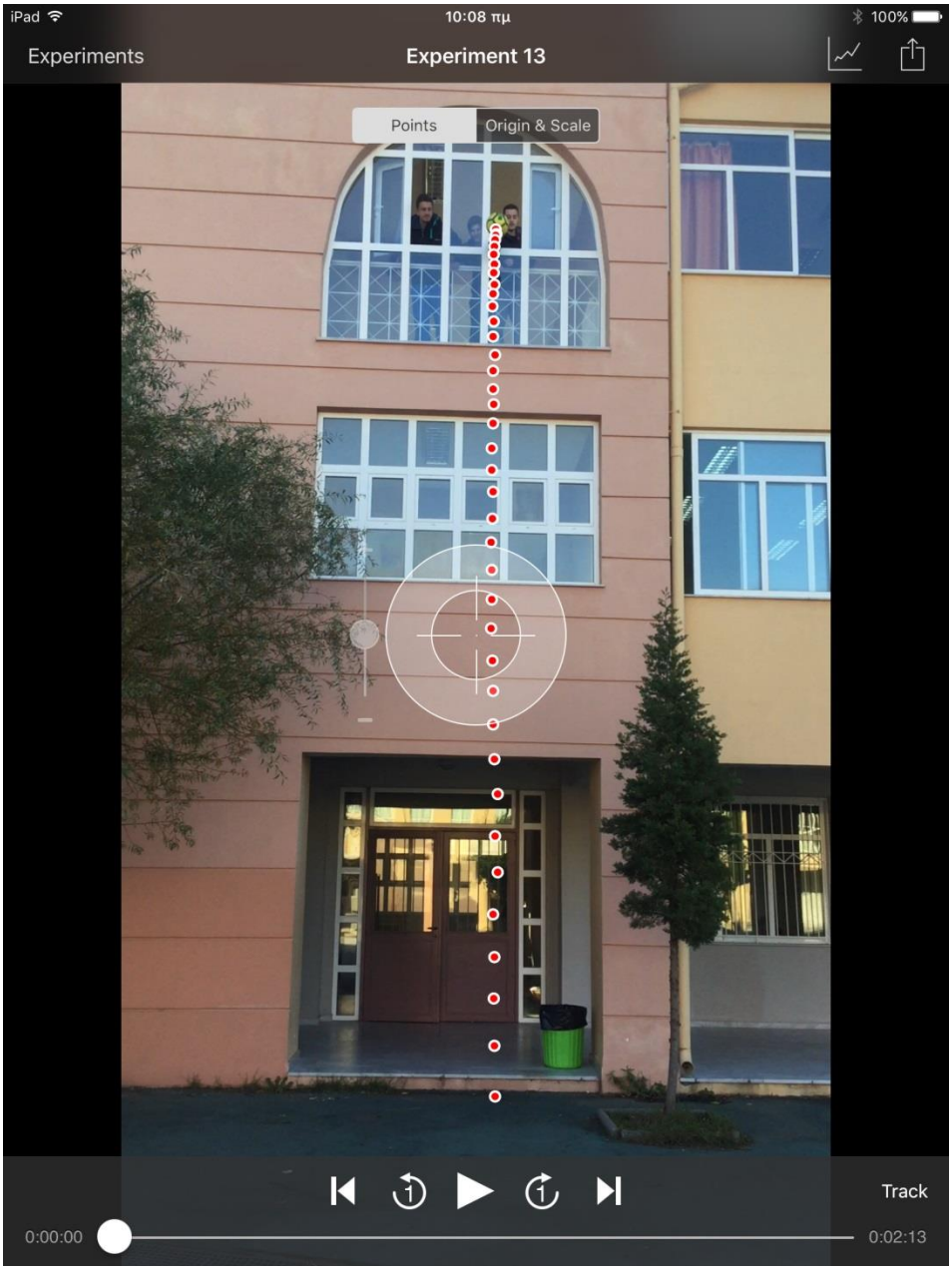
του ίχνους του αντικειμένου είναι ακόμα ένας λόγος για τον οποίο πρέπει η ποιότητα του βίντεο να είναι άριστη, ωστόσο αυτό δεν είναι πάντα εφικτό καθώς οι λήψεις γίνονται σε εξωτερικούς χώρους. Μια καταγραφή των διαδοχικών δέσεων ενός από τα αντικείμενα που αφήσαμε να πέσουν φαίνεται στην Εικόνα 2. Επιλέξαμε κίτρινη μπάλα ποδοσφαίρου, ώστε να είναι ευδιάκριτη στο συγκεκριμένο φόντο.



Εικόνα 1: Εισαγωγή αρχικών δεδομένων στο Video Physics

Στην Εικόνα 1 φαίνονται επίσης η δυνατότητα προσδιορισμού των αξόνων Χ και Υ, με επιλογή περιστροφής τους και η βαθμονόμηση με καθορισμό των αρχικών μεγεθών. Εδώ ορίζουμε το ύψος (8 m), όπως φαίνεται στο ένθετο. Το δαχτυλίδι που φαίνεται στην Εικόνα 2 χρησιμοποιείται για να σηματοδοτήσουμε το αντικείμενο μελέτης, εδώ το σώμα που πέφτει. Με αυξομείωση του δακτυλίου πετυχαίνουμε να ορίσουμε ακριβώς το σώμα που μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε.

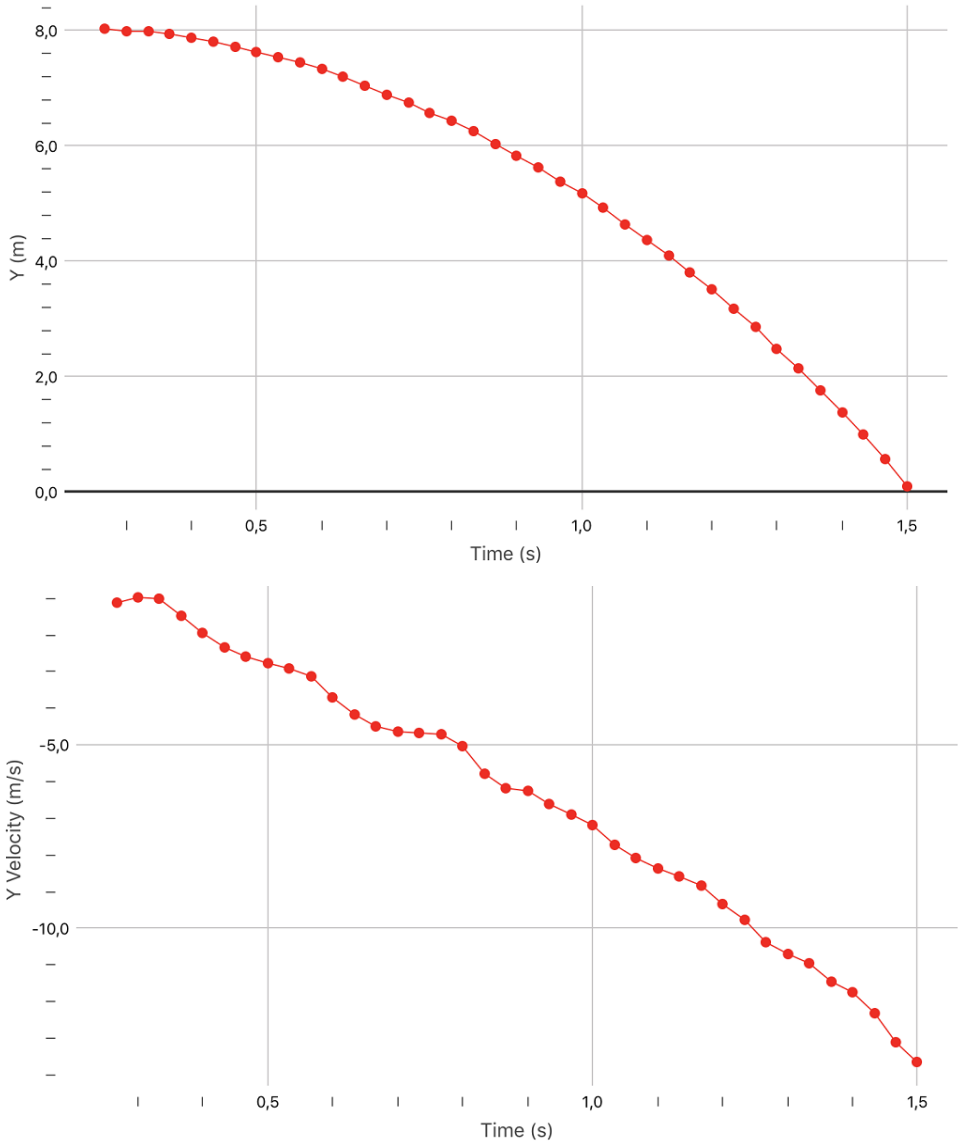
Στη συνέχεια το λογισμικό δημιουργεί τις γραφικές παραστάσεις: τροχιάς (Χ-Υ), θέσης – χρόνου (Χ-t) και (Υ- t) και ταχύτητας – χρόνου (u-t) για τη μετατόπιση στον άξονα Χ και στον άξονα Υ. Ενδεικτική γραφική παράσταση φαίνεται στην Εικόνα 3.



Εικόνα 2: Καταγραφή της τροχιάς (διαδοχικές θέσεις) ενός αντικειμένου (μπάλα ποδοσφαίρου) που πέφτει, με τη βοήθεια του tracker στο λογισμικό Video Physics.

Από την Εικόνα 3 παρατηρούμε ότι υπάρχει διασπορά στις πειραματικές μετρήσεις. Αυτό είναι λογικό, καθώς οι μετρήσεις είναι σε πραγματικές συνθήκες, αλλά επίσης υπεισέρχονται και σφάλματα κατά την αποτύπωση, όπως στιγμιαία απώλεια καταγραφής του ίχνους από τον tracker. Για το λόγο αυτό επεξεργαζόμαστε τα δεδομένα μας με τη χρήση των λογισμικών Graphical ή Graphical Analysis (διατίθενται δωρεάν στο διαδίκτυο) ή ακόμα και με το Excel. Με

τα προγράμματα αυτά προσομοιώνουμε τις μετρήσεις, ώστε να εξάγουμε τις καμπύλες μετρήσεων και τις αντίστοιχες εξισώσεις που τις περιγράφουν. Ενδεικτική προσομοίωση των μετρήσεων της Εικόνας 3 μπορείτε να δείτε στην Εικόνα 4.



Εικόνα 3:Γραφικές παραστάσεις θέσης – χρόνου (Y- t) και ταχύτητας – χρόνου (u-t) στο άξονα Y, όπως προέκυψαν από το λογισμικό Video Physics για πτώση μπάλας ποδοσφαίρου.

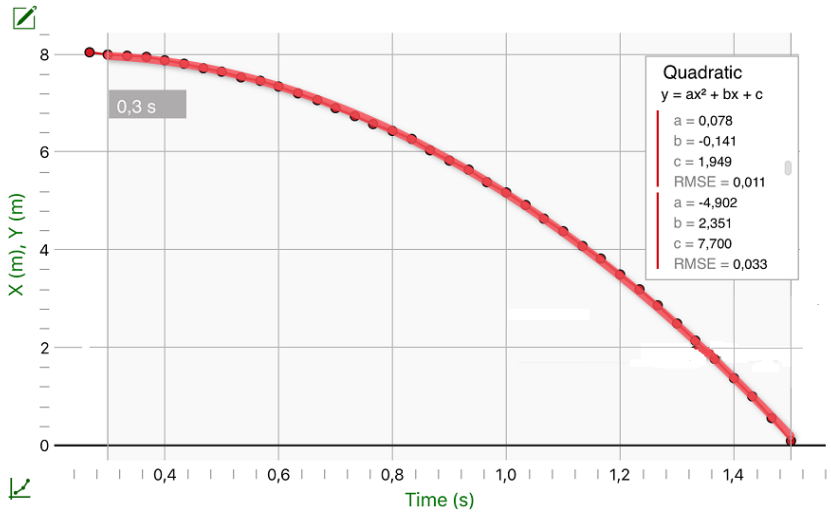
Συμπεράσματα

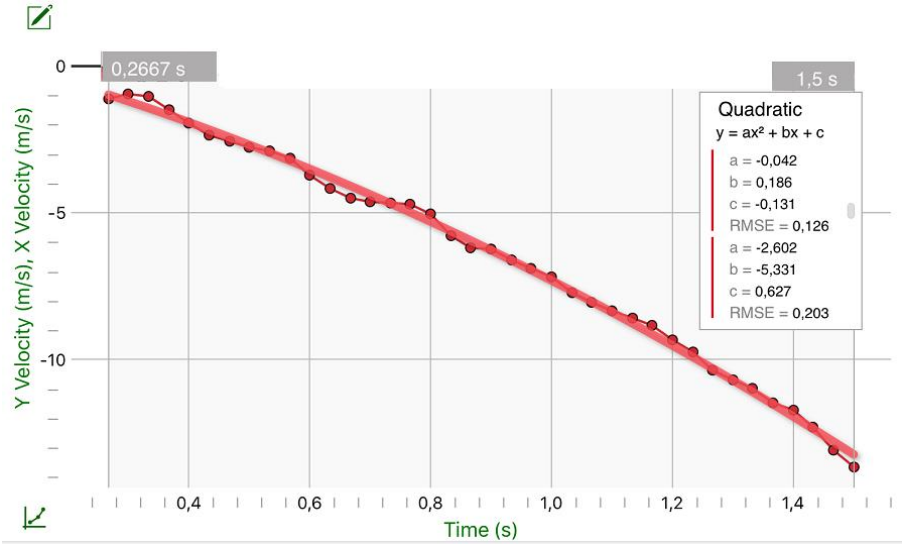
Από τις πειραματικές μετρήσεις μπορούμε να εξάγουμε τα παρακάτω συμπεράσματα για το χρόνο πτώσης των διαφόρων αντικειμένων σε σχέση με τα φυσικά χαρακτηριστικά τους (Πίνακας 2)

Αντικείμενο	**Μπάλα Καλαθοσφαίρισης**	**Μπάλα Ποδοσφαίρου**	**Μπάλα Αντισφαίρισης**	**Μπάλα Επιτραπέζιας Αντισφαίρισης**
Μάζα (Kg)	0,640	0,445	0,08	0,003
Περίμετρος (m)	0,76	0,68	0,20	0,12
Χρόνος Πτώσης (s)	1,48	1,5	2,4	4,0

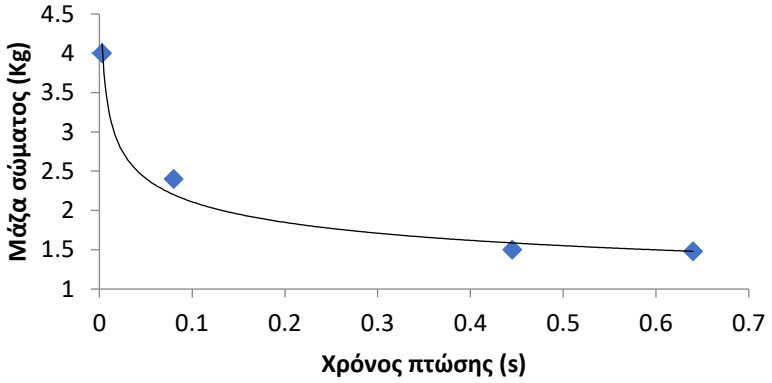
Πίνακας 2: Φυσικά χαρακτηριστικά σωμάτων που εκτελούν πτώση και οι αντίστοιχοι χρόνοι πτώσης.

Αρχικά διαπιστώνουμε εξάρτηση του χρόνου πτώσης από τη μάζα των σωμάτων. Όσο βαρύτερο είναι ένα σώμα τόσο μικρότερος ο χρόνος πτώσης (Εικόνα 5) σε αντίθεση με όσα προβλέπονται από τις εξισώσεις της ελεύθερης πτώσης. Η περίμετρος των σωμάτων (ουσιαστικά το μέγεθός τους) δε φαίνεται να παίζει σημαντικό ρόλο τουλάχιστον στη συγκεκριμένη σειρά πειραμάτων. Το μπαλάκι της επιτραπέζιας αντισφαίρισης χρειάζεται σχεδόν 4 δευτερόλεπτα για να φτάσει στο έδαφος αν και εξαιρετικά μικρού μεγέθους και με κατά πολύ μικρότερη αντίσταση από τις άλλες μπάλες. Ωστόσο, είναι τόσο ελαφρύ που καθυστερεί να προσκρούσει στο έδαφος. Το ίδιο ισχύει και για το μπαλάκι του τένις (Εικόνα 6).

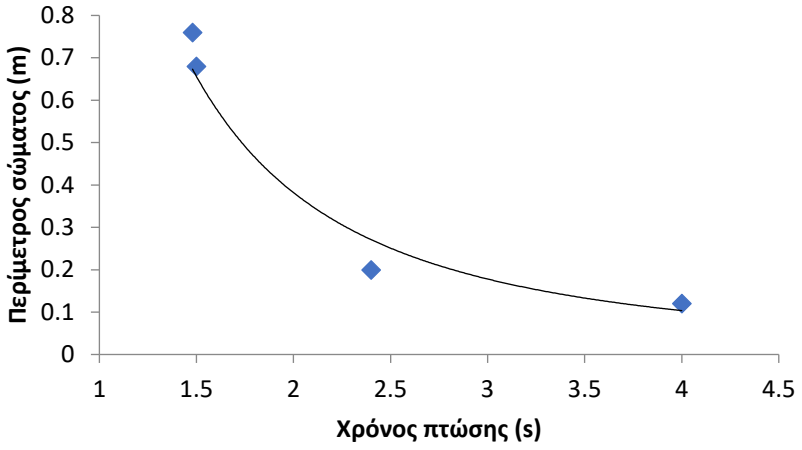




Εικόνα 4: Προσομοιώσεις πειραματικών μετρήσεων θέσης – χρόνου (Y- t) και ταχύτητας – χρόνου (u-t) στο άξονα Y, για πτώση αντικειμένου (μπάλα ποδοσφαίρου)

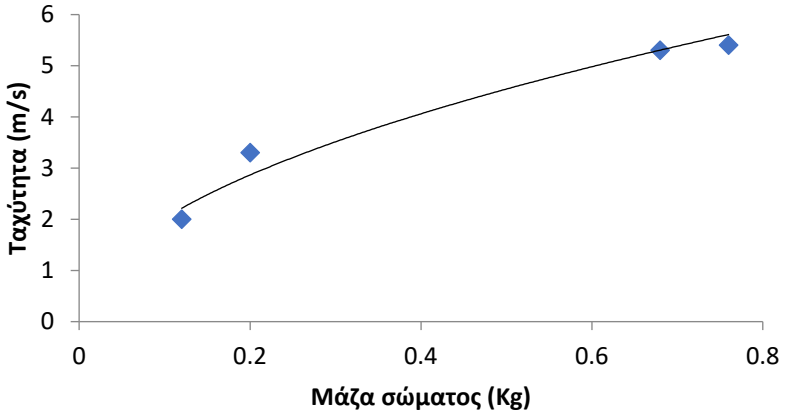


Εικόνα 5: Μάζα σώματος σε σχέση με το χρόνο πτώσης



Εικόνα 6: Περίμετρος σώματος σε σχέση με το χρόνο πτώσης

Τέλος, στην παρακάτω Εικόνα 7 φαίνονται οι μέσες ταχύτητες πτώσεις σε σχέση με τη μάζα των σωμάτων. Τα βαρύτερα σώματα αποκτούν μεγαλύτερες ταχύτητες πτώσης.



Εικόνα 7: Μέση ταχύτητα πτώσης σε σχέση με τη μάζα των σωμάτων

Βιβλιογραφία

[1] Asimov, I. (1972). Asimov's biographical encyclopedia of science and technology; the lives and achievements of 1195 great scientists from ancient times to the present, chronologically arranged.

[2] Ball, P. (2005) "Science history: Setting the record straight". The Hindu.

[3] Dijksterhuis, E. J. (Ed.). (1955). the Principal Works of Simon Stevin: Vol. 1-3 (i 4 Bd). CV Swets & Zeitlinger.
[4] Drake, S. (1978). Galileo at work: his scientific biography. Courier Corporation.
[5] Drake, Stillman (2003) Galileo at work: his scientific biography (Facsim. ed.). Mineola (N.Y.): Dover publications.
Galilei, G. Galileo Galilei Explained.
[6] Groleau, R. (2002) "Galileo's Battle for the Heavens".
[7] Sharratt, M. T., & Sharratt, J. K. (1994). Potential health benefits of active living for persons with chronic conditions. Champaign: Human Kinetics, 39-45.
[8] Van Helden, A., & Burr, E. (1995). The Galileo Project. Department of History, Rice University, 2001.