# Open Schools Journal for Open Science

Vol 2, No 1 (2019)

Special Issue Articles from the 1st Greek Student Conference on Research and Science



## Εργαλεία σχεδίασης καμπυλών: Οι ελλειψογράφοι

*Καλλιόπη Σιώπη, Άγγελος Μαγνήσαλης*

doi: 10.12681/osj.19582

Open Schools Journal for Open Science

Volume 1

# Εργαλεία σχεδίασης καμπυλών: Οι ελλειψογράφοι

*Μαγνήσαλης Άγγελος[1], Καλλιόπη Σιώπη[1]*

*[1]Πρότυπο Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης*

## Περίληψη

Η διαπίστωση ήδη από τον 5ο αι. π.Χ. ότι υπάρχουν προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών που δεν μπορούν να επιλυθούν με τα ευκλείδεια μέσα (χάρακα- διαβήτη), οδήγησε στην ανακάλυψη άλλων καμπυλών εκτός του κύκλου και στην επινόηση εξειδικευμένων εργαλείων και μηχανισμών που να επιτρέπουν το σχεδιασμό τους μέσω της συνεχούς κίνησης. Η εργασία εστιάζει στους μηχανισμούς που επινοήθηκαν και επιτρέπουν το σχεδιασμό της καμπύλης της έλλειψης, καθώς η έλλειψη και ο κύκλος ανήκουν στην ίδια κατηγορία καμπυλών και έχουν παρεμφερείς ιδιότητες. Η διερεύνηση των χαρακτηριστικών απλών μηχανισμών που σχετίζονται με το σχεδιασμό της έλλειψης- κοινώς ελλειψογράφοι, οδήγησε στην απόδοση μαθηματικού νοήματος στα χαρακτηριστικά της κατασκευής και της λειτουργίας ενός τεχνήματος και ανέδειξε τη σχέση των μαθηματικών με εργαλεία και μηχανισμούς που εφευρέθηκαν κατά τη διάρκεια των αιώνων δίνοντας νόημα στη γεωμετρία και στα μαθηματικά που διδάσκονται στο λύκειο.

## Λέξεις κλειδιά
Γεωμετρία, κωνικές τομές, έλλειψη, ελλειψογράφοι

## Εισαγωγή

Στο ιστορικό σημείωμα της σελίδας 72 στο σχολικό βιβλίο της Ευκλείδειας γεωμετρίας (2015) αναφέρεται ότι οι γεωμετρικές προτάσεις διακρίνονται σε ‘θεωρήματα’, όπου ζητείται να αποδειχθεί ότι ένα αντικείμενο έχει μια ορισμένη ιδιότητα και σε ‘προβλήματα’, όπου ζητείται να κατασκευαστεί ένα αντικείμενο (σχήμα) που να έχει μια ορισμένη ιδιότητα. Κάθε κατασκευή προϋποθέτει τη χρήση ενός οργάνου/εργαλείου κατασκευής, ικανού να την πραγματοποιήσει, να κατασκευάζει δηλαδή είτε συγκεκριμένα σημεία, είτε και σύνολα σημείων που πληρούν ορισμένες συνθήκες.

Τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη διατυπώθηκαν με βάση τον κανόνα και τον διαβήτη και οι κατασκευές κατοχυρώνονται από τα τρία πρώτα αιτήματα του Βιβλίου Ι.

- α΄. Αιτήσω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.
- β΄. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν.
- γ΄. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.

Κατά τον Μπρίκα (1970) είναι δυνατόν να επινοηθούν πάρα πολλά εργαλεία κατασκευής και ήταν φυσικό οι Αρχαίοι Έλληνες να χρησιμοποιήσουν τα απλούστερα: το χάρακα και τον διαβήτη. Το πρώτο σχεδιάζει το συντομότερο δρόμο μεταξύ δυο σημείων του επιπέδου, την ευθεία. Το δεύτερο, κατασκευάζει το γεωμετρικό σχήμα του κύκλου, ως το σύνολο των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόσταση από ένα δεδομένο σημείο, ισούται με ένα δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα. Τα εργαλεία αυτά επιλύανε απλά προβλήματα της Γεωμετρίας όπως διχοτόμηση τμήματος, κατασκευή καθέτου σε σημείο ευθείας, κατασκευή καθέτου από σημείο σε δοθείσα σε ευθεία, κατασκευή παράλληλης προς δοθείσα ευθεία.

Με την πάροδο του χρόνου τέθηκαν νέα γεωμετρικά προβλήματα τα οποία δεν ήταν επιλύσιμα με τα επιτρεπτά τότε εργαλεία κατασκευής, όπως ο διπλασιασμός του κύβου, ο τετραγωνισμός του κύκλου και η τριχοτόμιση της γωνίας. Η αποτυχία των γεωμετρών να επιλύσουν αυτά τα προβλημάτων, οδήγησε στη διατύπωση ερωτημάτων όπως, κατά πόσο η λύση των εν λόγω προβλημάτων δεν είναι δυνατόν να επιτευχθεί μόνο με τον κανόνα και τον διαβήτη.

Η μη επιλυσιμότητα των παραπάνω γεωμετρικών προβλημάτων κινητοποίησε το ενδιαφέρον διαφόρων μαθηματικών-γεωμετρών να αναζητήσουν τις λύσεις τους μέσω της επινόησης και χρήσης άλλων εργαλείων. Παράλληλα, εμφανίζεται η κατηγοριοποίηση των γεωμετρικών προβλημάτων σε α) επίπεδα (: αυτά που μπορούν να κατασκευαστούν με χάρακα και διαβήτη), β) στερεά (: εκείνα που επιλύονται με τη βοήθεια κωνικών καμπυλών) και γ) γραμμικά (: όλα τα υπόλοιπα) (Ευκλείδεια Γεωμετρία, 2015, σελ. 72; Μπρίκας, 1970).

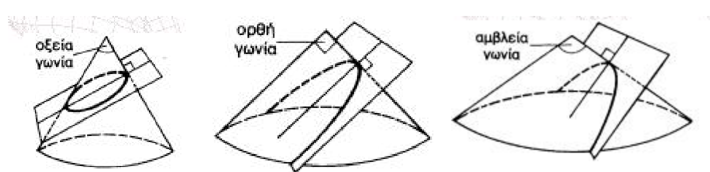
Πριν την ανάπτυξη της αναλυτικής γεωμετρίας από τον René Descartes (1596-1650), όλα τα γεωμετρικά αντικείμενα περιγράφονταν από μετρήσεις που λαμβάνονταν με κανόνα και διαβήτη. Ο Descartes στα πλαίσια της νέας γεωμετρίας του ['La Géométrie, 1637] έδωσε απάντηση στο ερώτημα πώς να γίνονται γεωμετρικές κατασκευές που δεν μπορούν να κατασκευαστούν με κανόνα και διαβήτη και άλλαξε τους ρόλους του χάρακα και του διαβήτη από αποκλειστικά γεωμετρικά εργαλεία για τη γεωμετρία σε μηχανικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση των μαθηματικών (Μπρίκας, 1970; Taimina et al., 2007) .

Η συγκεκριμένη εργασία α) διερευνά την έννοια της κωνικής καμπύλης (: κωνική τομή) από την άποψη της ιστορικής της προέλευσης και εστιάζει στα βασικά χαρακτηριστικά της έλλειψης, ως της καμπύλης που φαίνεται να σχετίζεται με τον κύκλο (: βασικό γεωμετρικό αντικείμενο της ευκλείδειας γεωμετρίας που διδάσκεται στη βαθμίδα του λυκείου), β) χαρτογραφεί τα χαρακτηριστικά απλών εργαλείων σχεδίασης της έλλειψης και γ) αποδίδει νόημα την κατασκευή και τη λειτουργία ενός υλικού μοντέλου, αντίγραφο ελλειψογράφου του Αρχιμήδη. Το μοντέλο του ελλειψογράφου που παρουσιάζεται είχε κατασκευαστεί στο πλαίσιο του μαθήματος της Τεχνολογίας κατά τη διάρκεια των σπουδών μου στη βαθμίδα του γυμνασίου. Στο πλαίσιο εργασίας που μου ανατέθηκε στο μάθημα της γεωμετρίας στην πρώτη τάξη του λυκείου κατά το σχολικό έτος 2015-2016 και αφορούσε τη διερεύνηση των χαρακτηριστικών των γεωμετρικών κατασκευών, το τέχνημα αυτό από εργαλείο μηχανικής απόκτησε νόημα μηχανικού εργαλείου που ενσωματώνει γεωμετρικές ιδιότητες και σχέσεις στη δομή και τη λειτουργία του.

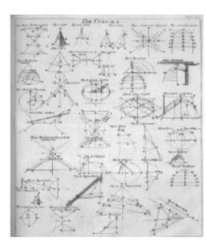
## Οι κωνικές τομές

Η ανακάλυψη των κωνικών καμπυλών αποδίδεται στον αρχαίο Έλληνα μαθηματικό Μέναιχμο, εταίρο στην Ακαδημία του Πλάτωνα,  περί τα έτη 360-350 π.Χ. Η φράση ‘Μεναιχμείους κωνοτομείν τριάδας’ αναφέρεται σε ένα επίγραμμα του Ερατοσθένη του Κυριναίου (250 περίπου π.Χ.)(Μαθηματικά Κατεύθυνσης Β λυκείου,2015, σελ. 79). Υπάρχουν αναφορές ότι ο Μέναιχμος (380-320 π.Χ.) επινόησε μια μηχανική συνδεσμολογία για την κατασκευή καμπυλών (κωνικών) τις οποίες χρησιμοποιούσε για να επιλύσει το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου (Taimina et al., 2007).

Ο όρος κωνική καμπύλη, καθώς και οι ειδικότερες ονομασίες ‘έλλειψη’, ‘παραβολή’ και ‘υπερβολή’ είναι μεταγενέστερες του Μεναίχμου και εισήχθησαν από τον Απολλώνιο, το Μέγα Γεωμέτρη. Αυτές οι καμπύλες γύρω στο 300 π.Χ. ταυτίστηκαν με τις τομές που δημιουργούνται στην επιφάνεια ενός κώνου από ένα επίπεδο κάθετο στη γενέτειρά του. Ανάλογα με τη γωνία της κορυφής του κώνου (οξεία- ορθή- αμβλεία) ορίζονταν ως ‘οξυγώνιου’ κώνου, ‘ορθογωνίου’ κώνου ή ‘αμβλυγωνίου’ κώνου καμπύλες, αντίστοιχα (Σχήμα 1, 2). Οι όροι αυτοί χρησιμοποιούνταν από τον Αρχιμήδη (287-212) στα έργα του ‘Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής’ και ‘Περί κωνοειδών και σφαιροειδών’ (Μαθηματικά Κατεύθυνσης Β Λυκείου, 2015, σελ.80).



*Έλλειψη* *Παραβολή* *Υπερβολή*



*Σχήμα 1: Σχηματική αναπαράσταση των τριών κωνικών καμπυλών ως τομές κώνου – επιπέδου.*

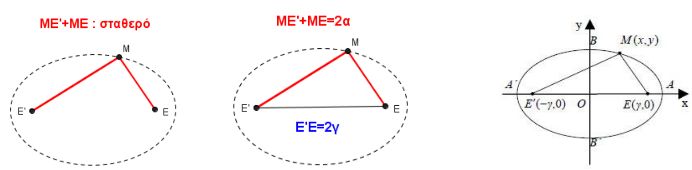
**Σχήμα 2:** Πίνακας Κωνικών, Cyclopaedia (1728, στο Barrallo et al., 2011)

## Η έλλειψη

Οι κωνικές καμπύλες είχαν σχεδόν ξεχαστεί για 12 αιώνες μέχρι ότου ο Johannes Kepler (1571-1630) ανακάλυψε την ελλειπτική φύση της πλανητικής κίνησης, ένα από τα σημαντικότερα βήματα στην ιστορία της επιστήμης (Εικόνα 2). Η έλλειψη είναι μια κλειστή καμπύλη του επιπέδου που κάθε σημείο της έχει την ιδιότητα το άθροισμα των αποστάσεων του από δυο σταθερά σημεία (εστίες) να είναι το ίδιο (σταθερό). (Σχήμα 3α).

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών Κατεύθυνσης της Β Λυκείου (σελ. 102-103) η έλλειψη (ως μαθηματικό αντικείμενο) ορίζεται ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από δυο σταθερά σημεία Ε’ και Ε του επιπέδου (εστίες της έλλειψης) είναι σταθερό και μεγαλύτερο του Ε’Ε. Το σταθερό αυτό άθροισμα συμβολίζεται συνήθως με 2α και την απόσταση των εστιών Ε’ και Ε (εστιακή απόσταση) με 2γ (Σχήμα 3β).
Το μαθηματικό αυτό αντικείμενο περιγράφεται από τη μαθηματική σχέση.

$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ όπου $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$ . Δυο επιπλέον στοιχεία προσδιορίζουν μια έλλειψη: ο μεγάλος της άξονας μήκους 2α και ο μικρός της άξονας μήκους 2β (στο Σχήμα 3γ, Α’Α=2α και Β’Β=2β).

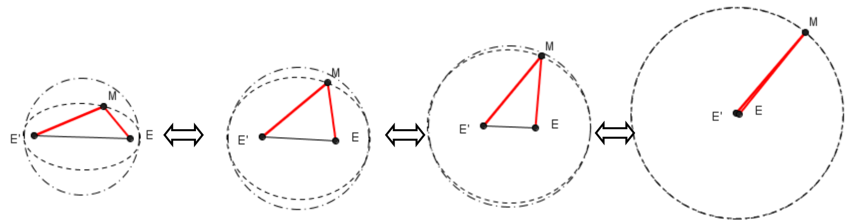



(α) (β) (γ)

Σχήμα 3: (α), (β), (γ) Σχηματικές αναπαράσταση της έλλειψης σε ευκλείδειο και αναλυτικό επίπεδο

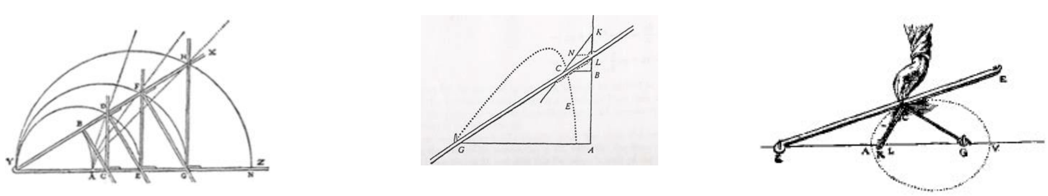
Μια παράμετρος που καθορίζει τη μορφή της έλλειψης είναι η εκκεντρότητά της η οποία εκφράζεται με το λόγο $\frac{\gamma}{\alpha}<1$. Επειδή $\gamma=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$, θα έχουμε $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\alpha}\Leftrightarrow\varepsilon^2=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}\Leftrightarrow\varepsilon^2=1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\Leftrightarrow\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{1-\varepsilon^2}$ .

Όσο μεγαλώνει η εκκεντρότητα, τόσο μικραίνει ο λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$ και κατά συνέπεια τόσο πιο επιμήκης γίνεται η έλλειψη. Όταν το τείνει στη μονάδα τότε ο λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$ τείνει στο μηδέν και η έλλειψη τείνει να εκφυλιστεί σε ευθύγραμμο τμήμα. Στην περίπτωση που το τείνει στο μηδέν (αυτό συμβαίνει όταν το σημεία Ε' και Ε τείνουν να ταυτιστούν) τότε η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος. Συνεπώς, ο κύκλος είναι μια ειδική κατηγορία έλλειψης και η μεταξύ τους σχέση γίνεται αντιληπτή (Σχήμα 4).




*Σχήμα 4 : Φάσεις μετασχηματισμού μιας έλλειψης σε κύκλο.*

Η εξίσωση $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, , που περιγράφει μια έλλειψη, ήταν άγνωστη πριν τον XVII αιώνα. Ο Descartes δεν κατασκευάζει καμπύλες μέσω της γραφικής απεικόνισης σημείων μιας εξίσωσης (Taimina et al., 2007), αλλά χρησιμοποιεί συνδεσμολογίες (μηχανικές κατασκευές) για να μελετήσει τις καμπύλες (Εικόνα 6). Διακρίνει τις πολυπλοκότερες των κωνικών καμπυλών, σε γεωμετρικές και μηχανικές και κατατάσσει την έλλειψη στις μηχανικές. Φτάνει στην έννοια της εξίσωσης δοθείσης καμπύλης, και παραμερίζοντας τις μηχανικές, διακρίνει τις γεωμετρικές καμπύλες βάσει του βαθμού της εξίσωσης της κάθε μιας (Μπρίκας, 1970). Η μελέτη των καμπυλών από τον Descartes οδήγησε στην ανάπτυξη της αναλυτικής γεωμετρίας, ενίσχυσε τη διερεύνηση της μηχανικής και επηρέασε τις επιστήμες και τη νόηση.

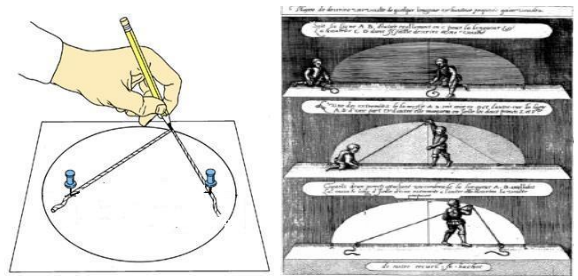


**Σχήμα 5:** Εργαλεία σχεδίασης καμπυλών από τον Descartes στο Taimina et al., (2007)

## Ελλειψογράφοι - εργαλεία σχεδίασης έλλειψης

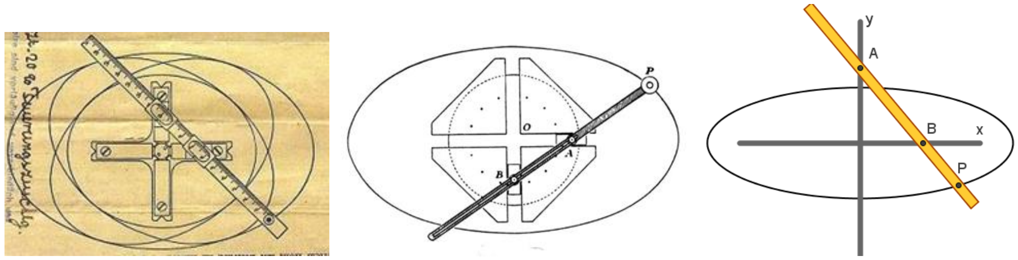
Ένας ελλειψογράφος είναι ένας μηχανισμός που ιχνογραφεί μια έλλειψη. Κατά καιρούς επινοήθηκαν διάφοροι τύποι τέτοιων μηχανισμών που κατασκευάζουν μια έλλειψη μέσω συνεχούς κίνησης.

• Χάραξη έλλειψης με τη βοήθεια νήματος- Μέθοδος του κηπουρού: Η πιο γνωστή μηχανική κατασκευή μιας έλλειψης είναι η σχεδίαση της με σχοινί/ κορδόνι/σπάγκο η οποία χρονολογείται από την αρχαία Ελλάδα, ή ακόμα και νωρίτερα (Σχήμα 6). Ο Coolidge (1873-1958) αναφέρει ότι ‘οι Έλληνες πρέπει να είχαν αντιληφθεί ότι αν τα δύο άκρα ενός κομματιού σπάγκου στερεωθούν σε δύο σημεία των οποίων η απόσταση είναι μικρότερη από το μήκος του σχοινιού, ο τόπος που γράφει ένα σημείο κρατώντας τεντωμένο το σχοινί, μια έλλειψη, των οποίων οι εστίες είναι τα δυο δεδομένα σημεία’ (στο Taimina et al., 2007). Ο Descartes αποκαλεί αυτή τη μέθοδο χάραξης της έλλειψης μέθοδο των κηπουρών. Η ιδιότητα στην οποία στηρίζεται αυτή (σταθερό άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου της έλλειψης από τις εστίες της) έχει αποδειχθεί από τον Απολλώνιο (Μπρίκας, 1970). Οι Barrallo et al., (2011) σημειώνουν ότι ο πρώτος που χρησιμοποίησε αυτή τη μέθοδο για τη χάραξη της ελλείψεως από ήταν ο Ανθέμιος ο Τραλλιανός, ένας από τους αρχιτέκτονες της Αγίας Σοφίας, τον 6ο αιώνα.



**Σχήμα 6:** Χρήση κορδονιού για το σχεδιασμό έλλειψης: Σχηματική (αριστερά) και εικονική αναπαράσταση (δεξιά) (Bachot, 1598 στο Barrallo et al., 2011)

• Ελλειψογράφος του Αρχιμήδη : Οι Tiamina et al. (2007) υποστηρίζουν ότι αυτός ο μηχανισμός ιχνογράφησης μιας έλλειψης αν και περιγράφεται από τον Πρόκλο (412-485 μ.Χ., νεοπλατωνικό φιλόσοφο και διευθυντή της ακαδημίας του Πλάτωνα από το 450 μ.Χ. μέχρι το θάνατό του) αποδίδεται στον Αρχιμήδη (287-212 π.Χ., μαθηματικό, φυσικό και μηχανικό). Πρόκειται για μια διάταξη δυο ράβδων που φέρουν αύλακα και συνδέονται κάθετα στα μέσα τους. Μια τρίτη ράβδος [AB] φέρει πείρους- οδηγούς σε σταθερές θέσεις [A, B] κατά μήκος της. Αυτή η ράβδος αρθρώνεται στο σύστημα των δυο άλλων με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε ένας από τους οδηγούς να κινείται μόνο στον αύλακα της ράβδου που έχει τοποθετηθεί. Όταν οι οδηγοί κινούνται μπρος-πίσω, ο καθένας κατά μήκος του αύλακα που έχει τοποθετηθεί, τότε το άκρο [P] της ράβδου κινείται σε έλλειψη με άξονες τους αύλακες. Συνήθως, η απόσταση των οδηγών είναι ρυθμιζόμενη έτσι ώστε το σχήμα και το μέγεθος της έλλειψης να μπορεί να αλλάζει (Σχήμα 7).




*Σχήμα 7: Σχηματικές αναπαραστάσεις του ελλειψογράφου του Αρχιμήδη*

• Ελλειψογράφος του Schooten -Αντιπαραλληλόγραμμο (antiparallelogramma): Η δημοτικότητα του έργου 'La Géométrie του Descartes οφειλόταν σε μεγάλο βαθμό στον Frans van Schooten (1615-1660), ολλανδό καθηγητή των μαθηματικών ο οποίος μετέφρασε την εργασία του Descartes στα λατινικά και έγραψε ένα σχόλιο σε αυτό συμπληρώνοντας πολλά κενά. Ο Van Schooten επινόησε διάφορα εργαλεία για την κατασκευή κωνικών καμπυλών. Επρόκειτο για συνδεσμολογίες ράβδων που αρθρώνονται μεταξύ τους με κάποιο τρόπο. Αναπαραστάσεις ενός τέτοιου ελλειψογράφου απεικονίζονται στο Σχήμα 8.

Πρόκειται για μια συνδεσμολογία τεσσάρων ράβδων (AB, AD, BC, DC) που συνδέονται ανά δύο με αρθρώσεις (αρθρωτό τετράπλευρο) δημιουργώντας ένα μη κυρτό ισοσκελές τραπέζιο έτσι ώστε οι δυο απέναντι ράβδοι (AB, CD) να είναι οι μη παράλληλες πλευρές του τραπεζίου, ενώ οι άλλες δυο (AD,BC) να είναι οι διαγώνιοί του, οι οποίες φέρουν αύλακα και συνδέονται με σύνδεσμο (P) έτσι ώστε AP=PC και PB=PD. Η άρθρωση P μπορεί να ολισθαίνει στις αύλακες διατηρώντας την ισότητα των τμημάτων καθώς το αντιπαραλληλόγραμμο ABDC, ως ισοσκελές τραπέζιο, έχει άξονα συμμετρίας και το P ανήκει σε αυτόν. Επομένως, θα είναι PA+PB=PA+PD=AD =σταθερό. Αν μια από τις μικρότερες ράβδους (π.χ. AB) είναι στεριωμένη πάνω σε μια επιφάνεια στα άκρα της, οι αρθρώσεις C και D κινούνται σε κύκλους με κέντρα τα A και B, ενώ η άρθρωσης P κινείται σε έλλειψη με εστίες τα A και B.

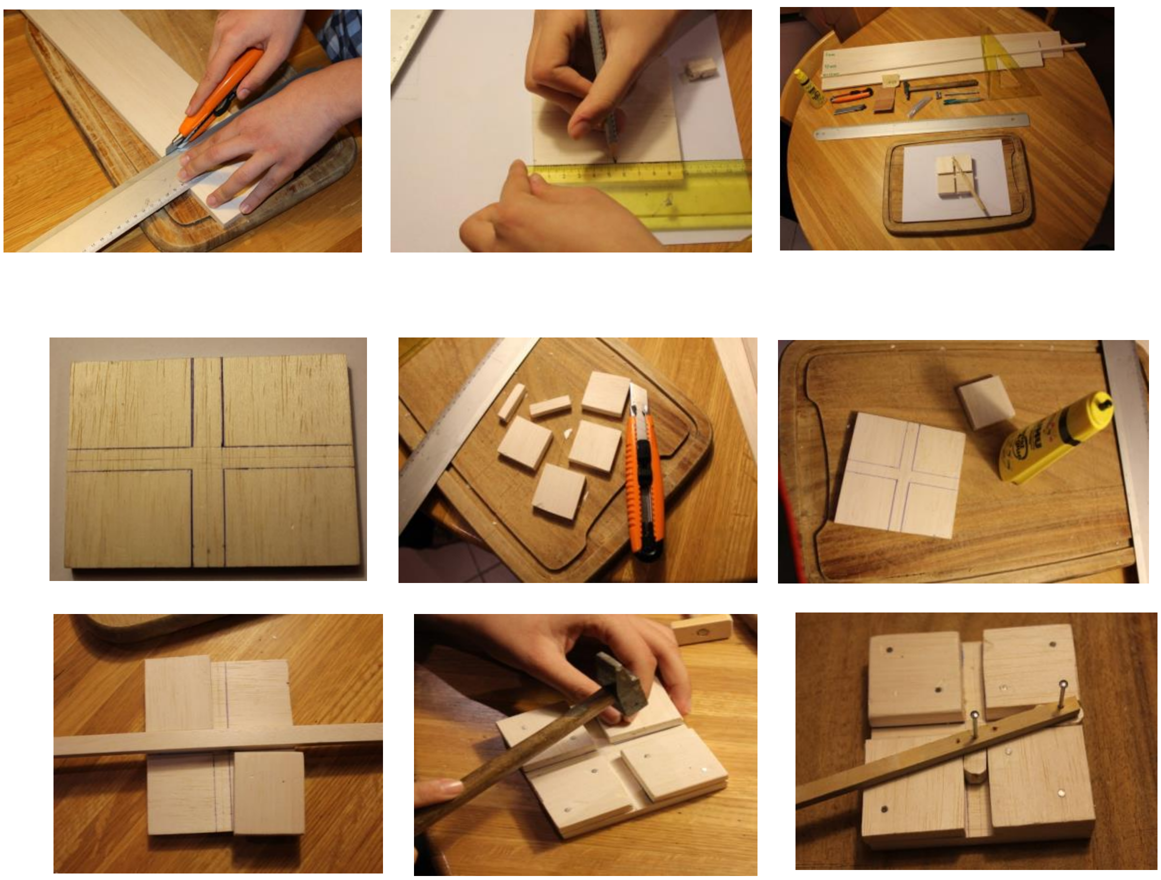

*Σχήμα 8: Αναπαραστάσεις μοντέλου ελλειψογράφου του Frans van Schooten*

Open Schools Journal
for Open Science



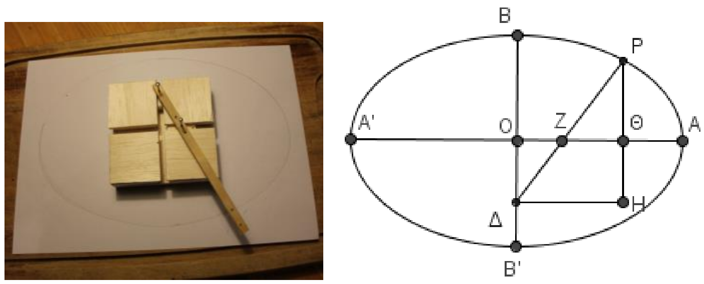
## Περιγραφή κατασκευής ενος μοντέλου ελλειψογράφου

Για την κατασκευή ενός μοντέλου ελλειψογράφου που Αρχιμήδη τα υλικά που χρησιμοποιήθηκαν ήταν: 9 τετράγωνα κομμάτια ξύλου μπάλσας [1 κομμάτι 10Χ10, 4 κομμάτια 4Χ4, 4 κομμάτια 4,5Χ4,5], ένα κοπίδι, σφυρί, 12 καρφιά, κόλλα, γυαλόχαρτο, ένα μολύβι σχεδίου Φ.1. Οι διάφορες φάσεις κατασκευής αποτυπώνονται στις ακόλουθες φωτογραφίες Φ.2 έως Φ.9 στο Σχήμα 9.



*Σχήμα 9: Φάσεις κατασκευής υλικού αντιγράφου του ελλειψογράφου του Αρχιμήδη*

Γιατί η καμπύλη που σχεδιάζει το εργαλείο είναι έλλειψη;
Στο Σχήμα 10 (δεξιά) αναπαριστάνεται σχηματικά το εργαλείο και η καμπύλη. Όταν το σημείο Ζ βρεθεί στο Ο τότε το Ρ θα βρεθεί στο Β και όταν Δ βρεθεί στο Ο τότε το Ρ θα βρεθεί στο Α, ορίζοντας τους ημιάξονες β=ΟΒ=ΖΡκαι α= ΔΡ της έλλειψης αντίστοιχα.




*Σχήμα 10: Σχέδιο έλλειψης με το εργαλείο (αριστερά) –Γεωμετρική αναπαράσταση ( δεξιά)*

Σχεδιάζουμε την κάθετη από το Ρ στην ΟΑ και την κάθετη στην ΟΒ' στο Δ και έστω Η το σημείο τομής τους.

- Τότε $\frac{P\Theta}{PH}=\frac{PZ}{P\Delta}$ λόγω των όμοιων τριγώνων ΡΖΘ και ΡΔΗ.
- Όμως, ΡΖ=ΟΒ=ΟΒ΄ και ΡΔ=ΟΑ=ΟΑ΄, άρα $\frac{P\Theta^2}{PH^2}=\frac{OB^2}{OA^2}$ (1)
- Επίσης, $PH^2=P\Delta^2-\Delta H^2=OA^2-O\Theta^2$ (2)
- Τότε, η (1) γίνεται $P\Theta^2=\left(\frac{OB^2}{OA^2}\right)\cdot PH^2=\left(\frac{OB^2}{OA^2}\right)\cdot\left(OA^2-O\Theta^2\right)$ (3)
- Αν Ρ(x, y) τότε ΡΘ=y, ΟΘ=x και ΟΑ=α, ΟΒ=β, τότε η (3) γίνεται:

$$y^2=\frac{\beta^2\left(\alpha^2-x^2\right)}{\alpha^2}\Leftrightarrow y^2=\beta^2\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)\Leftrightarrow\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$$, που είναι εξίσωση έλλειψης.

## Εν κατακλείδι

Όταν υλοποίησα την κατασκευή του ελλειψογράφου, στο πλαίσιο των γυμνασιακών μου σπουδών, στα μάτια μου θαύμαζε αποκλειστικά ως μια κατασκευή, μία μηχανή, μια ξυλοτεχνία, που δεν είχε την παραμικρή σχέση με μαθηματικά εργαλεία ή μαθηματικές σχέσεις. Αποτελούσε απλώς μία κατασκευή που σχεδίαζε ελλείψεις. Δεν είχα ενδιαφερθεί ούτε για το τι είναι η έλλειψη και ποια είναι η θέση της στα Μαθηματικά, ούτε ποιους μαθηματικούς προβληματισμούς μπορεί να επιλύει αυτό το εργαλείο.

Η έρευνα με πλαίσιο την ιστορία των Μαθηματικών και η διαφορετική προσέγγιση των χαρακτηριστικών της κατασκευής και της λειτουργίας του συγκεκριμένου τεχνήματος, του ελλειψογράφου, του έδωσε μια άλλη διάσταση: το τέχνημα μετασχηματίστηκε σε μαθηματικό εργαλείο που ενσωματώνει στην κατασκευή του γεωμετρικές ιδιότητες και μαθηματικές σχέσεις και επιλύει προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών που δεν μπορεί να επιλυθούν με τα παραδοσιακά γεωμετρικά εργαλεία, το χάρακα και το διαβήτη.

Αν και η κατεύθυνση των σπουδών μου δε σχετίζεται με το πεδίο της Μαθηματικής Επιστήμης, η ανάλυση των χαρακτηριστικών της δομής και της λειτουργίας του και η συσχέτισή τους με τη γεωμετρική θεωρία που έχω διδαχθεί μέχρι τώρα συνέβαλε στην εμπέδωση εννοιών και διαδικασιών της γεωμετρικής θεωρίας όπως, αυτών των χαρακτηριστικών μιας γεωμετρικής κατασκευής, της έννοιας του γεωμετρικού τόπου, των μετρικών σχέσεων και της ομοιότητας τριγώνων, αλλά και στην επέκταση των γνώσεων μου για τα χαρακτηριστικά ενός άλλου πεδίου των μαθηματικών αυτού της Αναλυτικής Γεωμετρίας, άγνωστου για εμένα μέχρι σήμερα, στο πλαίσιο του οποίου η μελέτη των μαθηματικών που ενσωματώνει ο ελλειψογράφος έγινε άμεσα κατανοητά

## Βιβλιογραφία

1 Αδαμόπουλος Λ., Βισκαδουράκης Β., Γαβαλάς Δ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Α. (2015). Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης. Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα.
2 Αργυρόπουλος Η., Βλάμος Π., Κατσούλης Γ., Μαρκάτης Σ., Σίδερης Π. (2015). Ευκλείδεια Γεωμετρία. Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα.
3 Μπρίκας Μ. Α. (1970). Τα περίφημα άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας. Αθήνα.
4 Barrallo, J., & Oñati, E. A. P. (2011, May). Ovals and Ellipses in Architecture. In Proceedings of ISAMA 2011 Tenth Interdisciplinary Conference of the International Society of the Arts, Mathematics, and Architecture, Columbia College, Chicago, Illinois (pp. 9-18).
5 Taimina, D., Pan, B., Gay, G., Saylor, J., Hembrooke, H., Henderson, D., & Paventi, C. (2007). 6 Historical mechanisms for drawing curves. Hands On History: A Resource for Teaching Mathematics, 89-104.