ePublishing

Open Schools Journal for Open Science

Vol 2, No 1 (2019)

Special Issue Articles from the 1st Greek Student Conference on Research and Science

# Εφαρμογές του Θεωρήματος Μέσης Τιμής (Lagrange) στον υπολογισμό της παραγώγου: η περίπτωση της στιγμιαίας ταχύτητας

*Σπύρος Γλένης, Ηλίας Θεοδωρόπουλος, Νικόλα Καραγιάννη, Ευανθία Λεμονά, Αρετή Μπαρτατίλα, Αγγελική Σταμάτη, Καλλιόπη Τζουμάνη, Δημήτρης Λουκάτος*

doi: 10.12681/osj.19584

**To cite this article:**

Γλένης Σ., Θεοδωρόπουλος Η., Καραγιάννη Ν., Λεμονά Ε., Μπαρτατίλα Α., Σταμάτη Α., Τζουμάνη Κ., & Λουκάτος Δ. (2019). Εφαρμογές του Θεωρήματος Μέσης Τιμής (Lagrange) στον υπολογισμό της παραγώγου: η περίπτωση της στιγμιαίας ταχύτητας. *Open Schools Journal for Open Science*, *2*(1), 440–449. https://doi.org/10.12681/osj.19584

https://epublishing.ekt.gr | **e-Publisher:** EKT | **Downloaded at:** 17/08/2025 02:49:21

https://epublishing.ekt.gr | **e-Publisher:** EKT | **Downloaded at:** 17/08/2025 02:49:21

Open Schools Journal for Open Science

Volume 1

# Εφαρμογές του Θεωρήματος Μέσης Τιμής (Lagrange) στον υπολογισμό της παραγώγου: η περίπτωση της στιγμιαίας ταχύτητας

*Ηλίας Θεοδωρόπουλος[1], Νικόλα Καραγιάννη[1], Ευανθία Λεμονά[1], Αρετή Μπαρτατίλα[1], Αγγελική Σταμάτη[1], Καλλιόπη Τζουμάνη[1], Σπύρος Γλένης[1], Δημήτρης Λουκάτος[1]*

*[1]Πειραματικό Σχολείο Πανεπιστημίου Αθηνών*

## Περίληψη

Με αφορμή μια εφαρμογή στο Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.) Διαφορικού Λογισμού που υπάρχει στο σχολικό βιβλίο «Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου», αναπτύσσονται μαθηματικά εργαλεία, χρησιμοποιώντας το εν λόγω θεώρημα του Lagrange και το ανάπτυγμα Taylor, για τον υπολογισμό της παραγώγου σε κάποιο σημείο xo. Ως εφαρμογή μελετάται ο υπολογισμός της στιγμιαίας ταχύτητας v(to), λαμβάνοντας υπ' όψιν τη μέση ταχύτητα σε ένα δεδομένο χρονικό διάστημα. Στις ομαλά μεταβαλλόμενες κινήσεις, οι οποίες περιγράφονται από πολυώνυμα δευτέρου βαθμού, αποδεικνύεται με χρήση του Θ.Μ.Τ. ότι η στιγμιαία ταχύτητα v(to) ισούται με τη μέση ταχύτητα στο διάστημα [to-h, to+h], για οποιαδήποτε επιλογή του h>0. Στη συνέχεια, εξετάζεται αν τα ίδια αποτελέσματα επεκτείνονται και σε άλλα είδη κινήσεων που περιγράφονται από εκθετικές ή τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Εφαρμόζοντας το ανάπτυγμα Taylor, αποδεικνύεται ότι και σε αυτές τις κινήσεις η στιγμιαία ταχύτητα v(to) είναι περίπου ίση με τη μέση ταχύτητα στο διάστημα [to-h,to+h], όχι όμως για οποιαδήποτε επιλογή του h>0. Στο τέλος, υλοποιώντας κατάλληλες πειραματικές διατάξεις, σε διασύνδεση με μία υπολογιστική πλατφόρμα Arduino Uno, μετράται η στιγμιαία ταχύτητα και συγκρίνεται με τη μέση ταχύτητα σε διάφορα είδη κινήσεων, ελέγχοντας κατά πόσο οι προβλέψεις από το θεωρητικό πλαίσιο συμφωνούν με τα πειραματικά δεδομένα.

Λέξεις κλειδιά
Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού (Lagrange), ανάπτυγμα Taylor, στιγμιαία ταχύτητα, μέση ταχύτητα, πειραματική επιβεβαίωση

## Εισαγωγή

Στο βιβλίο «Μαθηματικά Γ΄ Γενικού Λυκείου Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής» υπάρχει μία εφαρμογή του Θεωρήματος Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού για την εύρεση του αριθμού $\xi \in (x_1, x_2)$, , ώστε για τη συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + c$ να ισχύει: $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Προκύπτει ότι αυτή η τιμή $\xi$ είναι το μέσο του διαστήματος $(x_1, x_2)$, δηλαδή $\xi = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ , ανεξάρτητα από τις παραμέτρους $a, b, c$ της συνάρτησης. Επομένως είναι δυνατός ο προσδιορισμός της παραγώγου της δευτεροβάθμιας συνάρτησης $f$ σε ένα σημείο $x$,, υπολογίζοντας τις τιμές , $f(x+h)$, $f(x-h)$ , για οποιονδήποτε θετικό αριθμό $h$.. Ωστόσο, αποδεικνύεται ότι δεν ισχύει αντίστοιχο αποτέλεσμα για τις υπερβατικές συναρτήσεις $y = ae^{bx}$ και $y = a\sin(\omega x + \phi)$ . Όμως, γνωρίζοντας ότι κάθε συνάρτηση προσεγγίζεται τοπικά από μία άλλη δευτεροβάθμια συνάρτηση $f$ , η τιμή της παραγώγου στο σημείο $x$ θα προσεγγιστεί από τις τιμές , $f(x+h)$, $f(x-h)$ , για έναν αρκούντως μικρό θετικό αριθμό $h$ . Κατάλληλη δευτεροβάθμια συνάρτηση $f$ κρίνεται το πολυώνυμο Taylor δευτέρου βαθμού, μέσω της οποίας θα εξεταστεί και το εύρος του θετικού αριθμού $h$, ως ανεκτό σφάλμα στην προσέγγιση. Στη συνέχεια, τα θεωρητικά αποτελέσματα θα εφαρμοστούν στον υπολογισμό της στιγμιαίας ταχύτητας για δεδομένες κινήσεις: τις κινήσεις με οριακή ταχύτητα μορφής $y = ae^{bx}$ και τις ταλαντώσεις μορφης $y = a\sin(\omega x)$ . Παράλληλα, θα αναπτυχθούν πειραματικές διατάξεις, προκειμένου να διαπιστωθεί αν τα πειραματικά αποτελέσματα συμφωνούν με το θεωρητικό πλαίσιο.

## Θεώρημα μέσης τιμής (LAGRANGE)

**Θεώρημα**: Αν μια συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα $(\alpha, \beta)$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$

Για τη συνάρτηση $x(t)=at^2+bt+c$ ο αριθμός $t_o$ του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[t_1,t_2]$ είναι $\xi=(t_1+t_2)/2$. Για τη συνάρτηση $x(t)=be^{ct}$, $b,c\in\mathbb{R}$ εφαρμόζοντας πάλι το Θ.Μ.Τ. στο $[t_1,t_2]$ προκύπτει

$$x'(t_0)=\frac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1}\Rightarrow cbe^{ct_0}=\frac{be^{ct_2}-be^{ct_1}}{t_2-t_1}\Rightarrow t_o=\frac{1}{c}\ln\left(\frac{e^{ct_2}-e^{ct_1}}{c(t_2-t_1)}\right)$$

Ομοίως για τη συνάρτηση $x(t)=A\sin\omega t,\ A,\omega\in\mathbb{R}$, σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο $[t_1,t_2]$, υπάρχει $t_0\in(t_1,t_2)$ τέτοιο, ώστε

$$x'(t_0)=\frac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1}\Rightarrow \omega A\cos\omega t=\frac{A\sin\omega t_2-A\sin\omega t_1}{t_2-t_1}\Rightarrow$$

$$\omega A\cos\omega t=\frac{2A\cos\left(\frac{\omega t_2+\omega t_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega t_2-\omega t_1}{2}\right)}{t_2-t_1}\Rightarrow \cos\omega t=\frac{2\cos\frac{\omega(t_2+t_1)}{2}\sin\frac{\omega(t_2-t_1)}{2}}{\omega(t_2-t_1)}\Rightarrow$$

$$t=\frac{1}{\omega}\cos^{-1}\left(\frac{2\cos\frac{\omega(t_2+t_1)}{2}\sin\frac{\omega(t_2-t_1)}{2}}{\omega(t_2-t_1)}\right)$$

Από τη σκοπιά της Φυσικής, στο τριώνυμο, που αντιπροσωπεύει τις ομαλά μεταβαλλόμενες κινήσεις, η μέση ταχύτητα είναι πάντοτε ίση με τη στιγμιαία ταχύτητα στο μέσο του χρονικού διαστήματος. Αντίθετα, στις άλλες δυο περιπτώσεις που εκφράζουν την κίνηση με οριακή ταχύτητα και την απλή γραμμική ταλάντωση αντίστοιχα, η μέση ταχύτητα ισούται με τη στιγμιαία, για κάποιο χρόνο $t_o$, που εξαρτάται όχι μόνο από το χρονικό διάστημα αλλά και από τις παραμέτρους της κίνησης.

## Θεώρημα Taylor

**Θεώρημα**: Αν η συνάρτηση $f$ και οι παράγωγοι $f'$ και $f''$, $f'''$ ορίζονται στο κλειστό διάστημα $[a,x]$, τότε για τη συνάρτηση

$$R_a(x) = f(x) - f(\alpha) - f'(\alpha)(x-\alpha) - \frac{f''(\alpha)}{2}(x-\alpha)^2 = f(x) - P_2(x)$$

ισχύουν:

(1) $R_\alpha(x) = \frac{f'''(\xi)}{2}(x-\xi)^2(x-\alpha)$ για κάποιο $\xi \in (\alpha, x)$

(2) $R_\alpha(x) = \frac{f'''(\xi)}{6}(x-\alpha)^3$ για κάποιο $\xi \in (\alpha, x)$

(3) $R_\alpha(x) = \int_\alpha^x \frac{f'''(t)}{2}(x-t)^2 dt$.

Η συνάρτηση $f(x) = be^{cx}$ από το θεώρημα Taylor προσεγγίζεται από πολυώνυμο 2ου βαθμού $P_2(x)$ και γράφεται ως:

$$f(x) = be^{ca} + bce^{ca}(x-a) + \frac{bc^2}{2}e^{ca}(x-a)^2 + \frac{f'''(\xi)}{6}(x-\alpha)^3.$$

Στην περίπτωση που $c\xi < 0$, το απόλυτο σφάλμα είναι:

$$|R_a(x)| = \left|\frac{bc^3}{6}e^{c\xi}(x-a)^3\right| = \frac{|bc^3|}{6}e^{c\xi}|x-a|^3 \le \frac{|bc^3|}{6}|x-a|^3,$$

διότι, όταν $c\xi \le 0$, τότε $e^{c\xi} \le 1$.

Ομοίως η συνάρτηση $g(x) = A\sin(\omega x)$ προσεγγίζεται από πολυώνυμο 2ου βαθμού $P_2(x)$ και γράφεται ως:

$$g(x) = A\sin(\omega a) + \omega A\cos(\omega a)(x-a) - \frac{\omega^2 A}{2}\sin(\omega a)(x-a)^2 + \frac{f'''(\xi)}{6}(x-\alpha)^3.$$

Το απόλυτο σφάλμα σε αυτή την περίπτωση είναι:

$$|R_a(x)| = \left|-\frac{\omega^3 A\cos\omega x}{6}(x-a)^3\right| \le \frac{\omega^3 A|x-a|^3}{6}, \text{ για } \omega, A > 0.$$

## Προσεγγιστικός υπολογισμός της $f'$ από τιμές της f

Στο βιβλίο «Μαθηματικά Γ' Γενικού Λυκείου Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής» υπάρχει, επιπλέον, η εξής άσκηση:

Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$, τότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{h} = 2f'(x_0).$$

Λόγω αυτής της άσκησης, θα μπορούσε κανείς να θεωρήσει ότι ο υπολογισμός της παραγώγου στο διάστημα $[x_0-h, x_0+h]$ γίνεται ευκολότερος μέσω του υπολογισμού του εν λόγω ορίου. Ωστόσο, η χρήση του ορίου αυτού ενδείκνυται προφανώς για εξαιρετικά μικρές τιμές του $h>0$ και, συνεπώς, δεν μπορεί να δώσει απάντηση στο ερώτημα για το εύρος των τιμών που μπορεί να λάβει το $h$, ώστε να είναι ικανοποιητική η προσέγγιση. Τα υπόλοιπα Taylor, λοιπόν, είναι προτιμότερα, διότι δίνουν και μια εκτίμηση του απόλυτου σφάλματος. Άμεσα προκύπτουν οι δυο επόμενες ισότητες:

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+R_x(x+h),$$

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+R_x(x-h)$$

και, αφαιρώντας κατά μέλη,

$$f(x+h)-f(x-h)=2f'(x)h+R_x(x+h)-R_x(x-h)\Rightarrow$$

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}-f'(x)=\frac{R_x(x+h)-R_x(x-h)}{2h}.$$

Επομένως, για τη συνάρτηση $f(x)=be^{cx}$, με $cx<0$, ισχύει

$$R_x(x+h)\le\frac{|bc^3|}{6}h^3,\ R_x(x-h)\le\frac{|bc^3|}{6}h^3.$$

Άρα

$$|f'(x)-\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}|\le\frac{|R_x(x+h)|+|R_x(x+h)|}{2|h|}\le\frac{2\frac{|bc^3|}{6}|h|^3}{2|h|}=\frac{|bc^3|}{6}h^2.$$

Η προσέγγιση $f'(x)$; $\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ έχει σφάλμα το πολύ $\frac{|bc^3|}{6}h^2$.

Για τη συνάρτηση $f(x)=e^x$ ζητείται, λοιπόν, προσεγγιστικός υπολογισμός του $f'(-2.5)$. Η πραγματική τιμή με ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων (χρησιμοποιώντας υπολογιστή τσέπης) είναι

$$f'(-2.5)=e^{-2.5}=0.0821.$$

Προσεγγιστικά για h=0.25 προκύπτει:

$$f'(-2,5);\ \frac{f(-2.25)-f(-2.75)}{0.5}=\frac{e^{-2.25}-e^{-2.75}}{0.5};\ 0.0829,$$

όπου το σφάλμα είναι $0.0829\text{-}0.0821=0.0008$, μικρότερο από $\frac{1}{6}\cdot 0.25^2=0.0104$.

Για h=0.5 προκύπτει:

$$f'(-2,5);\ f(-2)-f(-3)=e^{-2}-e^{-3};\ 0.0855,$$

όπου το σφάλμα είναι $0.0855\text{-}0.0821=0.0034$, μικρότερο από $\frac{1}{6}\cdot 0.5^2 = 0.0417$.

Αντίστοιχα, για τη συνάρτηση $g(x) = A\sin(\omega x)$ ισχύει

$$|g'(x) - \frac{g(x+h)-g(x-h)}{2h}| \le \frac{|R_x(x+h)|+|R_x(x+h)|}{2|h|} \le \frac{|A\omega^3|}{6}h^2$$

Επομένως η προσέγγιση $g'(x)$; $\frac{g(x+h)-g(x-h)}{2h}$ έχει σφάλμα το πολύ $\frac{|A\omega^3|}{6}h^2$.

Για τη συνάρτηση $g(x) = \sin x$ ζητείται, επίσης, προσεγγιστικός υπολογισμός της τιμής $g'(2.5)$. Η πραγματική τιμή με ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων (χρησιμοποιώντας υπολογιστή τσέπης) είναι

$g'(2.5) = \cos 2.5 = -0.8011$.

Εκλέγοντας h=0.25 προκύπτει:

$g'(2,5)$; $\frac{g(2.75)-g(2.25)}{0.5} = \frac{\sin 2.75 - \sin 2.25}{0.5}$; $-0.7928$,

όπου το σφάλμα είναι $0.8011\text{-}0.7928 = 0.0083$, μικρότερο από $\frac{1}{6}\cdot 0.25^2 = 0.0104$.

Για h = 0.5 προκύπτει:

$g'(2,5)$; $g(3)-g(2) = \sin 3 - \sin 2$; $-0.7682$,

με σφάλμα $0.8011\text{-}0.7682 = 0.0329$, μικρότερο από $\frac{1}{6}\cdot 0.5^2 = 0.0417$.

## Πειραματικός έλεγχος του θεωρητικού πλαισίου

Προκειμένου να ελεγχθεί το θεωρητικό πλαίσιο πειραματικά, θα πρέπει να συγκριθεί η μέση ταχύτητα σε ορισμένο χρονικό διάστημα με τις τιμές της στιγμιαίας ταχύτητας στο ίδιο χρονικό διάστημα. Η μέτρηση της μέσης ταχύτητας επιτυγχάνεται με τη μέτρηση της μετατόπισης. Μελετάται, λοιπόν, η κίνηση μιας γυάλινης μπάλας, η οποία αφήνεται από ύψος h, λίγο μικρότερο από μισό μέτρο. Η σφαίρα κατά την πτώση της συμπαρασύρει λεπτό νήμα κινώντας σύστημα αισθητήρων. Η χρησιμοποιούμενη διάταξη, που έγινε σε συνεργασία με τον Όμιλο Καινοτόμων Υπολογιστικών Συστημάτων του Σχολείου, φαίνεται στο Σχήμα 1.

Η μέτρηση της στιγμιαίας ταχύτητας πραγματοποιείται με αυτοσχέδιο αισθητήρα που βρίσκεται σε σύνδεση με υπολογιστικό σύστημα Arduino Uno (Arduino_Uno, 2017). Μέσω του Arduino Uno, καταγράφεται η επαγωγική τάση που αναπτύσσεται, η οποία είναι ανάλογη της στιγμιαίας γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του σταθερής γεωμετρίας τροχού. Η όλη τεχνική βρίσκεται σε συμφωνία με τη μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε σε πρόσφατη εργασία (Λουκάτος & Παπατσίμπα, 2016).

Ταυτόχρονα, με τη βοήθεια του αισθητήρα φωτός, που βρίσκεται επίσης σε σύνδεση με τον Arduino, μετράται ο αριθμός των στροφών του τροχού κατά το χρονικό διάστημα εξέλιξης της πτώσης της σφαίρας. Με τον τρόπο αυτό γνωστοποιείται και η χρονική εξέλιξη της μετατόπισης της σφαίρας κατά την πτώση της.

Με την προϋπόθεση ότι το νήμα δε γλιστράει στον τροχό, προσδιορίζεται η στιγμιαία ταχύτητα της μπάλας που πέφτει. Έτσι λαμβάνονται οι παρακάτω μετρήσεις:

| Χρόνος σε s | Στιγμιαία ταχύτητα σε cm/s | Θέση σε cm |
|---|---|---|
| **0** | **0** | **0** |
| **0,005** | **5** | |
| **0,01** | **20** | |
| **0,02** | **25** | |
| **0,05** | **31** | |
| **0,055** | **36** | |
| **0,06** | **46** | |
| **0,065** | **57** | |
| **0,07** | **67** | |
| **0,075** | **72** | |
| **0,08** | **77** | |
| **0,085** | **82** | |
| **0,09** | **88** | |
| **0,095** | **88** | |
| **0,1** | **93** | |
| **0,13** | **114** | |
| **0,135** | **119** | |
| **0,14** | **129** | |
| **0,145** | **139** | **8** |

| | | |
|---|---|---|
| **0,185** | **165** | |
| **0,19** | **181** | |
| **0,195** | **191** | |
| **0,2** | **202** | |
| **0,24** | **217** | **24** |
| **0,245** | **228** | |
| **0,25** | **238** | |
| **0,265** | **233** | |
| **0,275** | **243** | **32** |

**Πίνακας 1**: Μετρήσεις χρόνου σε s, στιγμιαίας ταχύτητας cm/s και θέσης σε cm

Για τα αντίστοιχα χρονικά διαστήματα υπολογίζεται η μέση ταχύτητα και κατασκευάζεται ο Πίνακας 2.

| Χρονικό διάστημα | Μετατόπιση σε cm | Μέση ταχύτητα σε cm/s |
|---|---|---|
| 0s - 0, 145s | 8 | 55 |
| 0,145-0,240 | 8 | 168 |
| 0,240-0,275 | 8 | 229 |
| 0 – 0,240 | 24 | 100 |

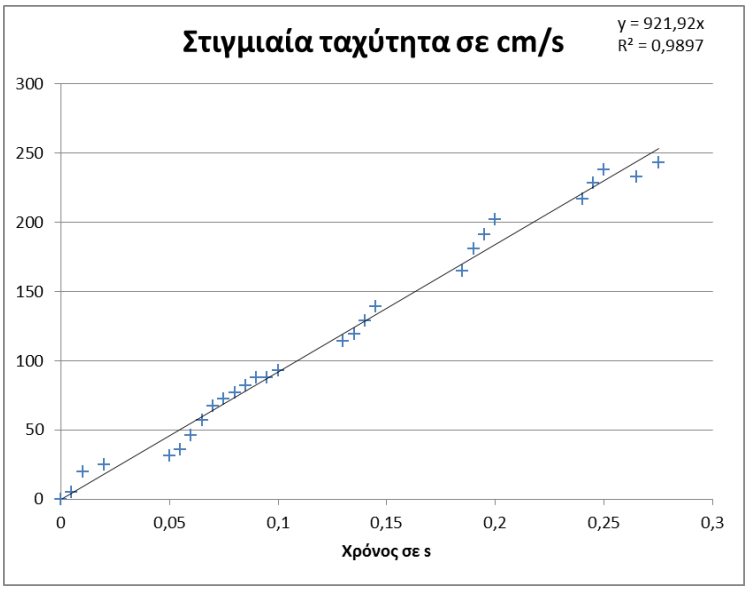
**Πίνακας2:** Υπολογισμός μέσης ταχύτητας

Από τον Πίνακα 2 παρατηρείται ότι:

α) για το χρονικό διάστημα 0s - 0, 145s η μέση ταχύτητα είναι ίση με τη στιγμιαία τη χρονική στιγμή 0,065s (κοντά το μέσο του χρονικού διαστήματος),

β) για το χρονικό διάστημα 0,145s-0,240s η μέση ταχύτητα είναι ίση με τη στιγμιαία τη χρονική στιγμή 0,185s (κοντά το μέσο του χρονικού διαστήματος),

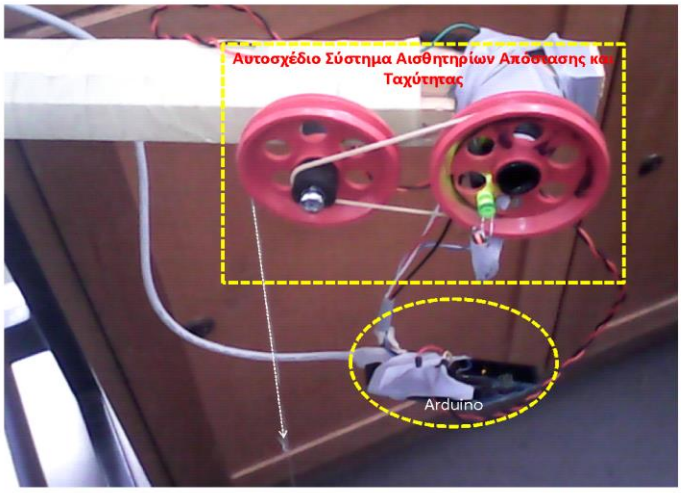
γ) για το χρονικό διάστημα 0,240s-0,275s η μέση ταχύτητα είναι ίση με τη στιγμιαία τη χρονική στιγμή 0,250s (κοντά το μέσο του χρονικού διαστήματος).




**Πίνακας 3**: ευθεία παλινδρόμησης

## Συμπεράσματα - Συζήτηση

Παρατηρώντας τους Πίνακες 1, 2 και 3 διαπιστώνεται ότι τα πειραματικά δεδομένα επιβεβαιώνουν το θεωρητικό πλαίσιο. Όμως πρέπει να σημειωθεί ότι έχει μελετηθεί πειραματικά μόνο ένα είδος κίνησης, της ευθύγραμμης ομαλά μεταβαλλόμενης, που αντιστοιχεί σε συνάρτηση δευτέρου βαθμού. Μια πλήρης επιβεβαίωση απαιτεί τη μελέτη διαφορετικών τύπων κινήσεων (συναρτήσεων), για την οποία η πειραματική διάταξη χρειάζεται να βελτιωθεί, ώστε να μειωθούν τα πειραματικά σφάλματα.




**Σχήμα 1:** Πειραματική διάταξη

## Ευχαριστίες

Ευχαριστούμε την κυρία Λαμπρινή Παπατσίμπα για τις πολύτιμες υποδείξεις της.

## Βιβλιογραφία

1. Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Μέτης Σ., Μπρουχούτας Κ., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ. (2014) «Μαθηματικά Γ΄ Γενικού Λυκείου ομάδας προσανατολισμού Θ.Σ. και Σ.Ο.&Π.»
2. Νεγρεπόντης Σ., Γιωτόπουλος Σ., Γιαννακούλιας Ε. (1995) «Απειροστικός Λογισμός, τόμος ΙΙβ», εκδ. Αίθρα.
3. Λουκάτος Δ. & Παπατσίμπα Λ., (2016), «Διδακτική αξιοποίηση του υπολογιστικού συστήματος arduino uno για την επιβεβαίωση υδροδυναμικών νόμων της Φυσικής», Πρακτικά του συνεδρίου Hellenic Conference on Innovating STEM Education, Αθήνα, 16-18 Δεκεμβρίου 2016.
5. Spivak M. (2008) «Διαφορικός κι Ολοκληρωτικός» εκδ. ΠΕΚ.
6. Levy D. (2010) «Introduction to Numerical Analysis I». Ανακτήθηκε από τον ιστότοπο http://www.math.umd.edu/~dlevy/books/na.pdf
7. Excel (2017). Ανακτήθηκε τον Φεβρουάριο του 2017 από τον ιστότοπο: https://en.wikipedia.org/wiki/Microsoft_Excel
8.. Arduino_Uno (2017). Ανακτήθηκε τον Φεβρουάριο του 2017 από τον ιστότοπο: https://www.arduino.cc/en/main/arduinoBoardUno