Open Schools Journal for Open Science

Vol 3, No 1 (2020)

Από τους εμπειρικούς νόμους κίνησης των Πλανητών (Kepler) και τους νόμους κίνησης του Newton στη Βαρυτική Δύναμη: Μια προσέγγιση με τη βοήθεια του GeoGebra

Βάιος Αρβανιτάκος, Αλέξανδρος Παπαδόπουλος, Σπυρίδων Γλένης, Παναγιώτης Δημητριάδης, Λαμπρινή Παπατσίμπα, Καλλιόπη Τζουμάνη

doi: [10.12681/osj.22321](https://doi.org/10.12681/osj.22321)

Open Schools Journal
for Open Science

Volume 4

Από τους εμπειρικούς νόμους κίνησης των Πλανητών (Kepler) και τους νόμους κίνησης του Newton στη Βαρυτική Δύναμη: Μια προσέγγιση με τη βοήθεια του GeoGebra

Βάιος Αρβανιτάκος[1], Αλέξανδρος Παπαδόπουλος[1], Γλένης Σπυρίδων[2], Δημητριάδης Παναγιώτης[3], Παπατσίμπα Λαμπρινή[3], Τζουμάνη Καλλιόπη[4]

[1] Πειραματικό Σχολείο Πανεπιστημίου Αθηνών, Αθήνα, Ελλάδα
[2] Μαθηματικός, Πειραματικό Σχολείο Πανεπιστημίου Αθηνών, Αθήνα, Ελλάδα
[3]Φυσικός, Πειραματικό Σχολείο Πανεπιστημίου Αθηνών, Αθήνα, Ελλάδα
[3] Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία θα προσεγγίσουμε με τη βοήθεια του λογισμικού GeoGebra την ιστορική απόδειξη των Newton και Feynman για τη σύνδεση του νόμου της βαρύτητας με τους εμπειρικούς νόμους του Kepler και τους τρεις νόμους του Newton για την κίνηση. Αρχικά αποδεικνύουμε ότι αν συνδυαστεί ο νόμος των ίσων εμβαδών του Kepler με τους νόμους του Newton για την κίνηση οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η δύναμη που προκαλεί την κίνηση των πλανητών γύρω από τον Ήλιο είναι κεντρική. Στη συνέχεια, στην ειδική περίπτωση της κυκλικής τροχιάς, συνδυάζοντας το νόμο του Kepler για τις περιόδους κίνησης των πλανητών με τον 2ο νόμο του Newton συμπεραίνουμε ότι το μέτρο της δύναμης που προκαλεί την κίνηση των πλανητών γύρω από τον Ήλιο είναι ανάλογο του 1/R2. Τέλος, στην περίπτωση που βαρυτική δύναμη ακολουθεί το νόμο του αντιστρόφου τετραγώνου, χρησιμοποιώντας τα επιχειρήματα του Feynman με τη βοήθεια του λογισμικού κατασκευάζουμε την τροχιά που διαγράφει ο πλανήτης και διαπιστώνουμε ότι υπό ορισμένες προϋποθέσεις είναι έλλειψη.

Λέξεις κλειδιά

Βαρύτητα, Νόμοι του Κέπλερ, Νόμοι κίνησης του Νεύτωνα, Έλλειψη, Μαθηματικές Αρχές της Φυσικής Φιλοσοφίας, Κεντρικές δυνάμεις

ΕΙΣΑΓΩΓΗ – ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Έναυσμα για την εργασία μας αυτή απετέλεσε το ερώτημα που προέκυψε στα μαθήματα του ομίλου της Φυσικής στο Πειραματικό Σχολείο του Πανεπιστημίου Αθηνών όταν μιλήσαμε για τους εμπειρικούς νόμους του Κέπλερ, που περιγράφουν την κίνηση των πλανητών γύρω από τον Ήλιο: O Newton διατύπωσε το νόμο της βαρύτητας συνδυάζοντας τους τρεις νόμους του Κέπλερ με τους τρεις νόμους της κίνησης; Αρχικά θεωρήσαμε τη θετική απάντηση ως προφανή, αναζητώντας όμως στη βιβλιογραφία την επιβεβαίωση διαπιστώσαμε ότι το θεωρούμενο ως προφανές δεν ήταν και τόσο προφανές (Greg Markowsky, 2011), (David Tong, 2012) .

Κατά τη διάρκεια του 17ου αιώνα, το παραπάνω ερώτημα είχε απασχολήσει μεγάλους φυσικούς όπως τον Edmond Halley, τον Robert Hooke και τον Christopher Wren. Πρώτος όμως ήταν ο Newton ο οποίος δημοσίευσε στις Μαθηματικές Αρχές της Φυσικής Φιλοσοφίας (Principia) μια αυστηρή μαθηματική αλλά και δυσνόητη απόδειξη. Μερικούς αιώνες αργότερα ο R. Feynman δημοσιεύει μια δική του προσέγγιση για την επίλυση του προβλήματος. Σε αυτήν την προσέγγιση αποφεύγεται η εκτεταμένη χρήση γεωμετρίας με δυσνόητες ιδιότητες των ελλείψεων. Στην παρούσα εργασία στηριζόμενοι στα βήματα των Newton και Feynman, θα αντιμετωπίσουμε το ίδιο πρόβλημα με τη βοήθεια του λογισμικού GeoGebra, στοχεύοντας σε μια πιο κατανοητή λύση αλλά και ένα νέο τρόπο ανάλυσης και επίλυσης προβλημάτων.

ΝΟΜΟΙ ΤΟΥ KEPLER

Πρώτος νόμος του Kepler: Η τροχιά των πλανητών είναι ελλειπτική με τον Ήλιο να βρίσκεται στη μία εστία της έλλειψης

Δεύτερος νόμος του Kepler: Η ακτίνα που συνδέει τον Ήλιο με τον πλανήτη διαγράφει σε ίσους χρόνους ίσα εμβαδά.

Τρίτος νόμος του Kepler: Το τετράγωνο της περιόδου περιφοράς του πλανήτη είναι ανάλογο με τον κύβο του μήκους του μεγάλου ημιάξονα της έλλειψης που διαγράφει.

ΝΟΜΟΙ ΚΙΝΗΣΗΣ ΤΟΥ NEWTON

Πρώτος νόμος του Newton: Ένα υλικό σημείο παραμένει ακίνητο ή κινείται με σταθερή ταχύτητα αν δεν ασκείται σε αυτό δύναμη ή αν συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδέν.

Δεύτερος νόμος του Newton: Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής υλικού σημείου είναι ανάλογος της δύναμης που ασκείται.:

$$\vec{F} = \frac{d(m\cdot\vec{\upsilon})}{dt} \text{ και για m σταθερό } \vec{F}\cdot \Delta t = m\cdot\overrightarrow{\upsilon_2} - m\cdot\overrightarrow{\upsilon_1} \text{ ή } \frac{\vec{F}}{m}\cdot \Delta t = \overrightarrow{\upsilon_2} - \overrightarrow{\upsilon_1} \quad (\mathbf{1})$$

Η ΒΑΡΥΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ ΕΙΝΑΙ ΚΕΝΤΡΙΚΗ

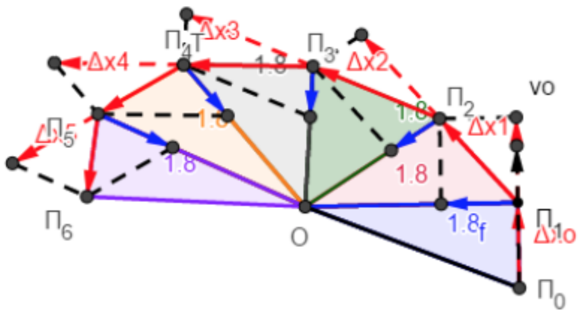
Ένα βασικό συμπέρασμα το οποίο προκύπτει από τον συνδυασμό του 2ου νόμου του Kepler και των 1ου, 2ου νόμων του Newton για τη κίνηση είναι ότι η βαρυτική δύναμη είναι κεντρική, δηλαδή έχει κατεύθυνση προς τον Ήλιο, ο οποίος θεωρείται ακίνητος.

Μελετούμε την κίνηση της Γης γύρω από το Ήλιο θεωρώντας ίσα χρονικά διαστήματα (Δt) και ότι η δύναμη που μεταβάλλει την ταχύτητα του πλανήτη ασκείται από τον Ήλιο στο τέλος κάθε χρονικού διαστήματος ακαριαία και έχει κατεύθυνση προς τον Ήλιο. Ο πλανήτης ξεκινά από μια θέση Π_0 τη χρονική στιγμή t_0 με ταχύτητα $\overrightarrow{\upsilon_0}$ και διανύει μετατόπιση $\Delta\overrightarrow{x_0} = \overrightarrow{\upsilon_0}\cdot\Delta t$ μέχρι που φτάνει στην θέση

$Π_1$, τη χρονική στιγμή t_1 κινούμενος σύμφωνα με το πρώτο νόμο του Newton ευθύγραμμα και ομαλά. Τη χρονική στιγμή t_1 επιδρά στιγμιαία η δύναμη $\vec{F}$ με κατεύθυνση προς τον Ήλιο.
Σύμφωνα με τον $2^{ο}$ νόμο του Νεύτωνα η δύναμη προκαλεί μεταβολή στην ταχύτητα του πλανήτη (σχέση 1):

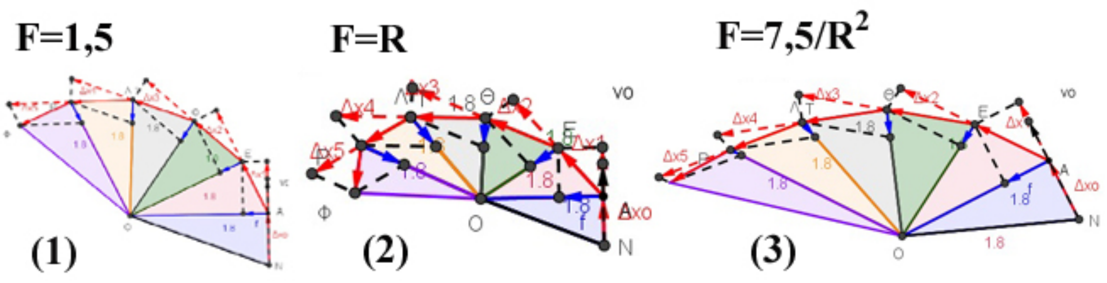
$$\frac{\vec{F}}{m}\cdot\Delta t^2 = \overrightarrow{\upsilon_1}\cdot\Delta t - \overrightarrow{\upsilon_0}\cdot\Delta t \;\text{ ή }\; \frac{\vec{F}}{m}\cdot\Delta t^2 = \overrightarrow{\Delta x_1} - \overrightarrow{\Delta x_0} \;\text{ ή }\; \frac{\vec{F}}{m}\cdot\Delta t^2 + \overrightarrow{\Delta x_0} = \overrightarrow{\Delta x_1} \quad \textbf{(2)}$$

Για χάριν απλότητας και σε αυθαίρετο σύστημα μονάδων θεωρούμε m=1. Επομένως αν στο $Π_1$ κατασκευάσουμε το παραλληλόγραμμο με πλευρές τα διανύσματα $\vec{F}\cdot\Delta t^2$ και $\overrightarrow{\Delta x_0}$ τότε η διαγώνιος του παραλληλογράμμου θα είναι το $\overrightarrow{\Delta x_1}$, και η κορυφή του το $Π_2$. Με αντίστοιχο τρόπο προσδιορίζουμε τα $Π_3$, $Π_4$, $Π_5$, κ.ο.κ. (εικόνα1). Υπολογίζουμε τα εμβαδά των αντίστοιχων τριγώνων και προκύπτουν ίσα (σε αυθαίρετες *μονάδες* στο σχήμα μας 1,8).



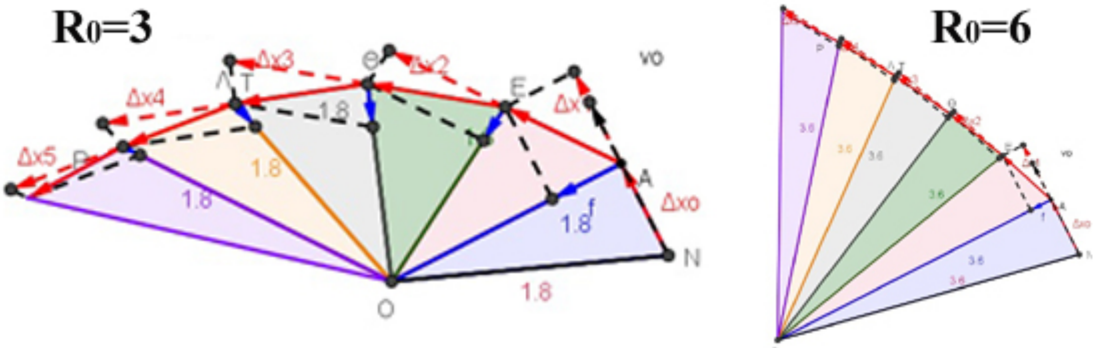
Εικόνα 1: Γεωμετρική κατασκευή με χρήση του GeoGebra της τροχιάς του πλανήτη με την επίδραση κεντρικής δύναμης

Το πρόγραμμα έχει σχεδιαστεί ώστε να δίνει τη δυνατότητα να μεταβάλουμε τη μορφή της δύναμης (F=f(R)) (εικ. 2), την αρχική απόσταση του πλανήτη από τον ήλιο (R_0) (εικ.3), την αρχική του ταχύτητα $υ_0$ (εικ. 4) καθώς και το χρονικό διάστημα Δt.



Εικόνα 2: Σε αυθαίρετες μονάδες θέτουμε την αρχική ταχύτητα του πλανήτη $υ_0$=2, την αρχική απόσταση από τον Ήλιο R_0= 3 και το Δt=0,6. Μεταβάλουμε τη μορφή της δύναμης.

Παρατήρηση 1: Στην περίπτωση που μεταβάλλεται η μορφή της δύναμης, ενώ διατηρούνται σταθερά η αρχική ταχύτητα, η απόσταση από τον Ήλιο και το χρονικό διάστημα παρατηρούμε ότι τα εμβαδά είναι ίσα για κάθε Δt και ανεξάρτητα από τη μορφή της δύναμης.



Εικόνα 3: Σε αυθαίρετες μονάδες θέτουμε την αρχική ταχύτητα του πλανήτη $υ_0$=2, τη μορφή της δύναμης $F=7,5/R^2$ και το Δt=0,6. Μεταβάλουμε την αρχική απόσταση από τον Ήλιο R_0, τότε σε διπλάσια απόσταση αντιστοιχεί διπλάσιο εμβαδόν

Παρατήρηση 2: Αντίστοιχα διατηρούμε σταθερή τη μορφή της δύναμης, την αρχική ταχύτητα και το χρονικό διάστημα και μεταβάλλουμε την αρχική απόσταση του πλανήτη από τον Ήλιο (R_0). Παρατηρούμε ότι τα εμβαδά διατηρούνται ίσα για κάθε Δt και είναι ανάλογα του R_0.

Παρατήρηση 3: Ομοίως αν διατηρήσουμε σταθερή τη μορφή της δύναμης, την αρχική απόσταση, το Δt και μεταβάλλουμε την αρχική ταχύτητα θα διαπιστώσουμε με τη βοήθεια του λογισμικού ότι τα εμβαδά διατηρούνται ίσα για κάθε Δt και είναι ανάλογα του $υ_0$.

Συμπέρασμα: Από τις παρατηρήσεις 1, 2, 3 προκύπτει ότι αν συνδυάσουμε τον 1ο και 2ο νόμο του Newton για την κίνηση και τον 2ο νόμο του Kepler οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η δύναμη που προκαλεί την κίνηση των πλανητών είναι κεντρική (έχει κατεύθυνση προς τον Ήλιο) αλλά δεν μπορούμε να εξάγουμε τη μορφή της (σταθερή, ανάλογη του R κ.α.).

Επίσης δυο σημαντικές παρατηρήσεις:

A) Τα εμβαδά που διαγράφει ο πλανήτης σε ίσους χρόνους είναι ανάλογα του γινομένου υ·R ή διαφορετικά κατά την κίνηση του πλανήτη το γινόμενο υ·R παραμένει σταθερό, δηλαδή η επίδραση μιας κεντρικής δύναμης διατηρεί την παραπάνω ποσότητα. Την παρατήρηση αυτή αναφέρει και ο Newton ενώ πολύ αργότερα η ποσότητα αυτή σχετίζεται με σημαντικό μέγεθος της κίνησης, την στροφορμή (David L.Goodstein, Judith R. Goodstein, 1997).

B) Αν η δύναμη που ασκείται σε έναν πλανήτη είναι κεντρική τότε τα εμβαδά που διαγράφει είναι ανάλογα των χρονικών διαστημάτων.

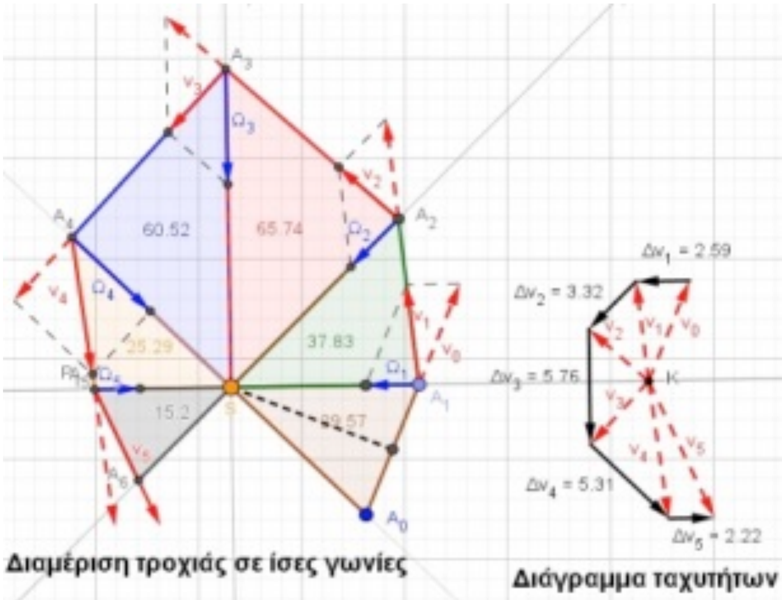
Η γεωμετρική απόδειξη της παραπάνω ιδιότητας παρουσιάζεται σε πολλά βιβλία και έχει γίνει για πρώτη φορά από τον Newton στα Principia.

Η ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΒΑΡΥΤΙΚΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ

Από το διάγραμμα των θέσεων στο διάγραμμα των ταχυτήτων

Για να διευκολυνθούμε στην εξαγωγή των συμπερασμάτων θα ακολουθήσουμε τα επιχειρήματα του Feynman. Κατασκευάζουμε το διάγραμμα των θέσεων διαμερίζοντας την κίνηση σε ίσες γωνίες (Δθ) και όχι σε ίσους χρόνους Δt (η τεχνική του Newton). Θεωρούμε ότι ο πλανήτης βρίσκεται αρχικά στη θέση A_0 και βρίσκεται σε απόσταση R_0 από τον Ήλιο και έχει ταχύτητα $\overrightarrow{υ_0}$. Υποθέτουμε ότι στον πλανήτη ασκούνται στιγμιαίες ωθήσεις ($\vec{Ω} = \vec{F} \cdot Δt$) οι οποίες μεταβάλλουν την ταχύτητα του σύμφωνα με το 2ο νόμο του Νεύτωνα: $\vec{Ω} + \vec{υ}_{αρχικό} = \vec{υ}_{τελικο}$ (για λόγους ευκολίας θεωρούμε τη μάζα 1) κάθε φορά που διαγράφει γωνία Δθ. Απόσταση του πλανήτη από τον ήλιο όταν αυτός βρίσκεται στη θέση A_1 ορίζεται το ύψος ενός ισοσκελούς τριγώνου με γωνία κορυφής το Δθ και ίσου εμβαδού με το (A_0SA_1), όπου S το κέντρο του Ήλιου. Μεταξύ των δύο διαδοχικών ωθήσεων ο πλανήτης κινείται ευθύγραμμα και ομαλά (1^{ος} νόμος του Νεύτωνα) οπότε το Δt υπολογίζεται από τη σχέση $\vec{\upsilon} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$. Το μέτρο του Δx υπολογίζεται γραφικά (μήκος A_0A_1).

Από το διάγραμμα των θέσεων θα κατασκευάσουμε το διάγραμμα των ταχυτήτων με την παρακάτω τεχνική. Θεωρούμε ένα σημείο Κ στο οποίο μεταφέρουμε τα διανύσματα των ταχυτήτων τα οποία υπολογίζονται από τα διανύσματα των $\Delta\vec{\upsilon} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$, οπότε κατασκευάζουμε το διάγραμμα των ταχυτήτων (εικόνα 4). Στο σχήμα παριστάνονται επίσης και τα διανύσματα της μεταβολής της ταχύτητας: $\Delta\vec{\upsilon}$. Παρατηρούμε ότι τα $\Delta\vec{\upsilon}$ είναι παράλληλα με την ευθεία που συνδέει κάθε φορά τον πλανήτη με το κέντρο της δύναμης (απόρροια του 2^{ου} νόμου του Newton).



Εικόνα 4: Σχηματική αναπαράσταση της διαδικασίας μετάβασης από το διάγραμμα των θέσεων στο διάγραμμα των ταχυτήτων

Στην περίπτωση που ο πλανήτης εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας r, τότε το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό και συμπίπτει με τη μέση ταχύτητα:

$$\upsilon = \frac{2\cdot\pi\cdot r}{T} \qquad \mathbf{(3)},$$

όπου Τ η περίοδος της κυκλικής κίνησης.

Το δε διάγραμμα των ταχυτήτων θα είναι ένας κύκλος με κέντρο το Κ και ακτίνα υ. Οι μεταβολές των ταχυτήτων

$$\Delta\vec{\upsilon_1} = \vec{\upsilon_1} - \vec{\upsilon_0} \qquad \mathbf{(4)}$$

θα είναι πλευρές ενός κανονικού ν-γώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο και το μέτρο της μεταβολής της ταχύτητας σε μια περίοδο θα είναι ίσο με την περίμετρο του πολυγώνου. Αν θεωρήσουμε τις γωνίες πολύ μικρές τότε η περίμετρος του πολυγώνου θα ταυτίζεται με το μήκος της περιφέρειας του κύκλου, δηλ.

$$\Delta\upsilon_{ολικο} = 2\cdot\pi\cdot\upsilon \quad \mathbf{(5)}$$

Από τον τρίτο νόμο του Κέπλερ και το διάγραμμα ταχυτήτων στη μορφή της βαρυτικής δύναμης

Μπορούμε να θεωρήσουμε τον κύκλο ως μια ειδική περίπτωση έλλειψης όπου οι δυο εστίες ταυτίζονται με το κέντρο του κύκλου, επομένως ο νόμος του Κέπλερ θα ισχύει και για κυκλικές τροχιές πλανητών. Σε αυτήν την περίπτωση το μέτρο της δύναμης είναι σταθερό αφού η απόσταση του πλανήτη από τον ήλιοι είναι σταθερή, επομένως $F = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{\Delta\upsilon_{ολικο}}{T}$.

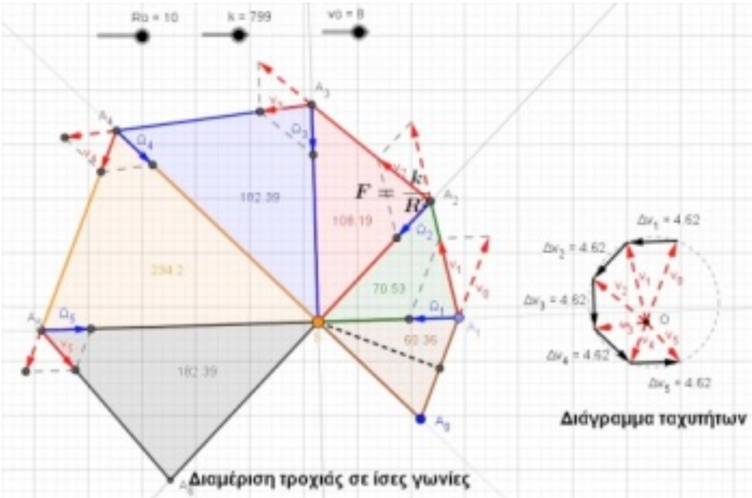
Από τις (5) και (3) λαμβάνουμε: $F = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2}$ $(\boldsymbol{6})$

Λαμβάνοντας υπόψη τον 3^{ο} νόμο του Κέπλερ $T \sim r^{\frac{3}{2}}$ η (6) γίνεται $F \sim \frac{4 \cdot \pi^2}{r^2}$ $(\boldsymbol{7})$.

Συμπέρασμα: Η βαρυτική δύναμη ακολουθεί το νόμο του αντιστρόφου τετραγώνου γεγονός που προκύπτει από το συνδυασμό του 2^{ου} νόμου του Νεύτωνα με το 2^{ο} νόμο του Κέπλερ λαμβάνοντας υπόψη ότι η βαρυτική δύναμη είναι κεντρική.

Ιδιότητες του διαγράμματος ταχυτήτων για κεντρικές δυνάμεις που ακολουθούν το νόμο του αντιστρόφου τετραγώνου

Κατασκευάζουμε το διάγραμμα ταχυτήτων για κεντρικές δυνάμεις που ακολουθούν τον νόμο το αντιστρόφου τετραγώνου (εικόνα 5)



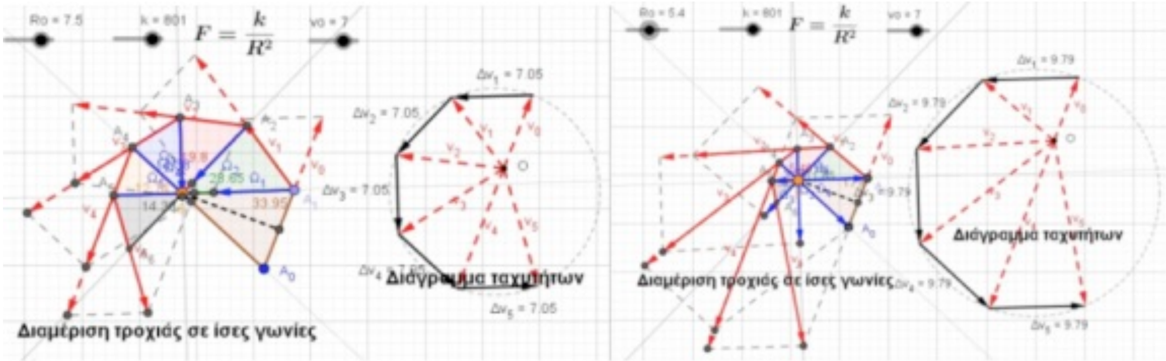
Εικόνα 5: Διάγραμμα ταχυτήτων με την επίδραση κεντρικής δύναμης στην περίπτωση διαμερίσεων σε ίσες γωνίες.

Παρατήρηση 4: Υπολογίζουμε αριθμητικά τα εμβαδά των τριγώνων που σχηματίζονται, προσδιορίζουμε τα αντίστοιχα χρονικά διαστήματα και επιβεβαιώνουμε ότι αυτά είναι ανάλογα των χρονικών διαστημάτων.

Παρατήρηση 5: Οι ταχύτητες με τις οποίες κινείται ο πλανήτης εξαρτώνται από την απόσταση του πλανήτη από τον Ήλιο και μάλιστα στη μεγαλύτερη απόσταση R_4 αντιστοιχεί η μικρότερη ταχύτητα, όπως περιμένουμε και από τον 2^{ο} νόμο του Kepler.

Παρατήρηση 6: Οι μεταβολές των ταχυτήτων είναι ίσες για κάθε Δθ. Δηλαδή οι μεταβολές των ταχυτήτων είναι πλευρές ενός κανονικού ν-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας $υ_K$.

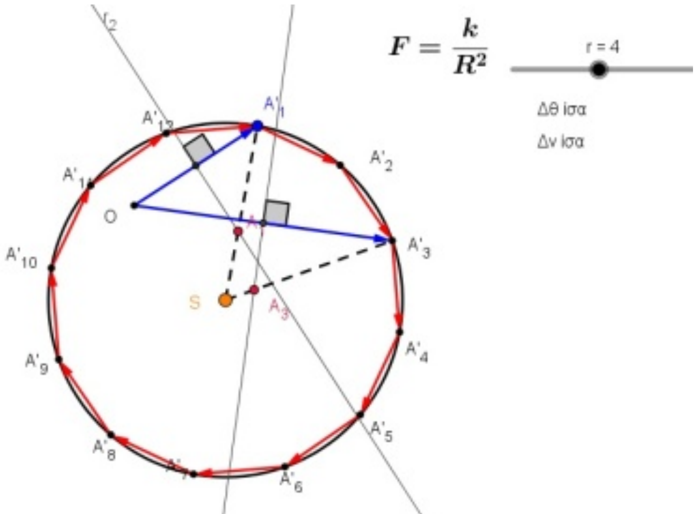
Μεταβάλουμε την αρχική απόσταση του πλανήτη από τον Ήλιο καθώς και την αρχική ταχύτητα και κατασκευάζουμε τα αντίστοιχα διαγράμματα (εικόνα 6)



Εικόνα 6: Διάγραμμα ταχυτήτων για διαφορετικές αρχικές αποστάσεις από τον Ήλιο

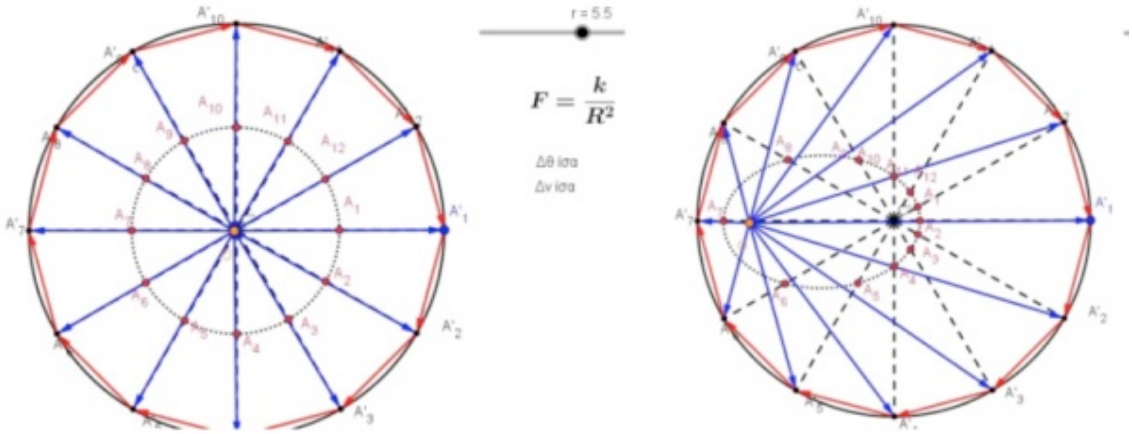
Παρατήρηση 7: Για οποιαδήποτε μεταβολή των αρχικών παραμέτρων ($υ_0$, R_0, K) οι ιδιότητες του διαγράμματος ταχυτήτων δεν μεταβάλλονται. Τα Δυ εξακολουθούν να σχηματίζουν κανονικό πολύγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο, που όμως το κέντρο του δεν συμπίπτει με την αρχή των διανυσμάτων των ταχυτήτων.

Από το διάγραμμα των ταχυτήτων στην εύρεση της τροχιάς.
Ο Feynman πρότεινε ένα κατασκευαστικό/γεωμετρικό τρόπο για να βρεθούν σημεία της τροχιάς του πλανήτη. Η παραπάνω κατασκευή δίνεται στην εικόνα 7



Εικόνα 7: Στο κέντρο του κύκλου τοποθετούμε τον Ήλιο. Το κέντρο των ταχυτήτων O είναι αυθαίρετο. Έστω OA_1 η ταχύτητα του πλανήτη στη θέση 1. Το σημείο τομής της μεσοκαθέτου OA_1 και της SA_1 είναι η θέση του πλανήτη

.



Εικόνα 8: Με βάση το κανόνα της εικόνας 7 βρίσκουμε τις θέσεις του πλανήτη (A_1, A_2, A_3, …….) για κάθε Δθ. Όταν το κέντρο των ταχυτήτων ταυτιστεί με τον Ήλιο τότε η τροχιά είναι κύκλος.

Παρατήρηση 8: Με το GeoGebra διαπιστώνουμε ότι όλες οι θέσεις του πλανήτη βρίσκονται πάνω σε μια έλλειψη με εστίες το κέντρο του κύκλου των ταχυτήτων και το κέντρο των ταχυτήτων. Δηλαδή οι τροχιές που διαγράφουν οι πλανήτες με την επίδραση της βαρυτικής δύναμης είναι ελλειπτικές (1ος νόμος του Kepler)
Όταν οι δυο εστίες της έλλειψης ταυτιστούν ή τα δυο κέντρα συμπίπτουν τότε ο πλανήτης διαγράφει κυκλική τροχιά (εικόνα 8)

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ανακεφαλαιώνοντας τις παρατηρήσεις 1,2,3, 8 επιβεβαιώσαμε αριθμητικά την γεωμετρική απόδειξη των Newton και Feynman, που επιβεβαιώνει ότι ο Νόμος Βαρύτητας του Newton μπορεί να προκύψει από τους Νόμους κίνησης του Newton και τους εμπειρικούς νόμους του Kepler.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστούμε τους συμμαθητές μας στον όμιλο φυσικής για τις συζητήσεις και τον προβληματισμό που αναπτύξαμε κατά τη διάρκεια των μαθημάτων του ομίλου και μας βοήθησαν στην εκπόνηση της παραπάνω εργασίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Markowsky G. (2011), *A retelling of Newton's work on Kepler's Laws*, Expositiones Mathematicae 29 253–282

[2] Tong D. (2012), *What Would Newton Do?,* Adams Society, University of Cambridge

[3] David L. Goodstein and Judith R. Goodstein (1997), *Feynman's Lost Lecture The Motion of Planets Around the Sun*, Vintage

Τα αρχεία GeoGebra είναι επίσης αναρτημένα στο παρακάτω link: http://eclass.sch.gr/modules/document/index.php?course=EL18123&openDir=/5bc648cfRfuf