ePublishing
ΕΘΝΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ ΤΕΚΜΗΡΙΩΣΗΣ NATIONAL DOCUMENTATION CENTRE

Open Schools Journal for Open Science

Τόμ. 3, Αρ. 1 (2020)

Η τροχιά μιας βολής: από το πείραμα στην εξίσωση

Μιχαήλ-Ιάσων Γιαννακόπουλος, Ορφέας-Νικόλαος Ζαϊμάκης, Εμμανουήλ-Ευάγγελος Ζουριδάκης, Ειρήνη Περυσινάκη

doi: 10.12681/osj.22397

Copyright © 2020, Μιχαήλ-Ιάσων Γιαννακόπουλος, Ορφέας-Νικόλαος Ζαϊμάκης, Εμμανουήλ-Ευάγγελος Ζουριδάκης, Ειρήνη Περυσινάκη

Άδεια χρήσης Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0.

Βιβλιογραφική αναφορά:

Γιαννακόπουλος Μ.-Ι., Ζαϊμάκης Ο.-Ν., Ζουριδάκης Ε.-Ε., & Περυσινάκη Ε. (2020). Η τροχιά μιας βολής: από το πείραμα στην εξίσωση. *Open Schools Journal for Open Science*, *3*(1). https://doi.org/10.12681/osj.22397

https://epublishing.ekt.gr | **e-Εκδότης:** EKT | **Πρόσβαση:** 20/01/2026 17:45:49

Open Schools Journal for Open Science

Volume 4

Η τροχιά μιας βολής: από το πείραμα στην εξίσωση

Γιαννακόπουλος Μιχαήλ Ιάσων[1], Ζαϊμάκης Ορφέας Νικόλαος[1], Ζουριδάκης Εμμανουήλ Ευάγγελος[1], Ειρήνη Περυσινάκη[2]

[1] Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ηρακλείου, Κρήτη, Ελλάδα
[2] Μαθηματικός, Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ηρακλείου, Κρήτη, Ελλάδα

Περίληψη

Πραγματοποιήσαμε πλάγιες βολές σε κεκλιμένο επίπεδο σταθερής κλίσης, στις οποίες η μπάλα ήταν βαμμένη με νωπό χρώμα ώστε να αποτυπώνει το ίχνος της τροχιάς της σε χαρτί μιλιμετρέ. Στις βολές μεταβάλλαμε ελεγχόμενα τη γωνία βολής και την αρχική ταχύτητα. Στόχος μας ήταν να χρησιμοποιήσουμε μεθόδους αλγεβρικής ανάλυσης (υποβοηθούμενες από το λογισμικό GeoGebra) ώστε να εντοπίσουμε μια ενιαία εξίσωση με παραμέτρους την αρχική ταχύτητα και τη γωνία βολής, η οποία να περιγράφει τις αποτυπωμένες καμπύλες και κατ' επέκταση την πλάγια βολή σε κεκλιμένο επίπεδο. Η εξίσωση που εντοπίζουμε βρίσκεται σε πλήρη αναλογία με την εξίσωση πλάγιας βολής σε κατακόρυφο επίπεδο.

Λέξεις κλειδιά

βολές, παραβολή, εξίσωση καμπύλης

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο (Dennis & Confrey, 1995) αναφέρεται ότι ο Leibnitz πρώτα θεώρησε την μηχανική κατασκευή της παραβολής με έναν παραβολογράφο και έπειτα την μελέτησε και εξήγαγε την εξίσωσή της. Η προσέγγιση αυτή είναι πολύ διαφορετική από τη σημερινή όπου κάθε καμπύλη ορίζεται πρώτα από την εξίσωσή της στο καρτεσιανό επίπεδο και έπειτα διερευνώνται οι ιδιότητές της –το αν μπορεί να κατασκευαστεί μηχανικά, καθόλου δεν απασχολεί τον μαθηματικό.

Κι όμως, η Φυσική Επιστήμη φαίνεται να ακολουθεί την προσέγγιση του Leibnitz: αρχικά η παραβολή γίνεται αισθητή ως η τροχιά που διαγράφει ένα σώμα που εκτελεί οριζόντια ή πλάγια βολή και ακολούθως οι νόμοι της Μηχανικής προσδιορίζουν την εξίσωση της καμπύλης (Βλάχος κ.α., 2015). Η ανάλυση βέβαια είναι αρκετά θεωρητική, καθώς η παραβολή ως τροχιά παραμένει «αόρατη».

Οι συγγραφείς του άρθρου «NUMB3RS - Season 2 - "Hot Shot" - Parabolic Food Fight» (Texas Instruments, 2008) διατυπώνουν μια πολύ ενδιαφέρουσα επέκταση στη διδακτική τους πρόταση για την παραβολή, κατά την οποία η τροχιά μιας βολής παύει να είναι «αόρατη»: προτείνουν η πλάγια βολή να γίνει σε κεκλιμένο επίπεδο από μια μπάλα που θα είναι βαμμένη με νωπό χρώμα ώστε να αποτυπώνει το ίχνος της τροχιάς της επάνω στο επίπεδο.

Λάβαμε λοιπόν την πρόκληση της πλάγιας βολής σε κεκλιμένο επίπεδο σταθερής κλίσης και θέσαμε τους εξής ερευνητικούς στόχους:

1. Να ερευνήσουμε εάν η τροχιά είναι πραγματικά παραβολή (όπως εικάζουν οι συγγραφείς του άρθρου).
2. Να μελετήσουμε βολές με το ίδιο μέτρο αρχικής ταχύτητας αλλά με διαφορετική γωνία βολής. Θεωρώντας τον οριζόντο άξονα του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο εκκίνησης, η «γωνία βολής» είναι η επίπεδη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της αρχικής ταχύτητας με αυτόν τον άξονα, το «βεληνεκές» είναι η οριζόντια απομάκρυνση του σώματος από το σημείο εκκίνησης (όταν το σώμα επανέρχεται στον οριζόντιο άξονα) και το «μέγιστο ύψος» είναι η μεγαλύτερη απόσταση που λαμβάνει το σώμα από τον οριζόντιο άξονα (κατά το χρονικό διάστημα από την εκκίνηση μέχρι την επαναφορά στον οριζόντιο άξονα). Οπότε τείθεται το ερώτημα: «πώς η μεταβολή της γωνίας βολής επηράζει το βεληνεκές και το μέγιστο ύψος»;
3. Όμοια με το προηγούμενο, κρατώντας την ίδια γωνία βολής αλλά μεταβάλλοντας την αρχική ταχύτητα, να μελετήσουμε το πώς αυτό επηρεάζει το βεληνεκές και το μέγιστο ύψος.
4. Να συγκρίνουμε τα αποτελέσματά μας για το βεληνεκές με εκείνα της πλάγιας βολής σε κατακόρυφο επίπεδο. Συγκεκριμένα: ισχύει και εδώ ότι η γωνία 45° δίνει το μέγιστο βεληνεκές ενώ οι συμπληρωματικές γωνίες οδηγούν στο ίδιο βεληνεκές;
5. Να καταλήξουμε σε εξισώσεις κίνησης που θα έχουν ως παράμετρο την αρχική ταχύτητα και την γωνία βολής.

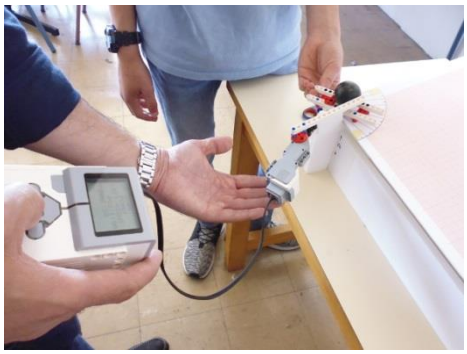
Θεωρούμε ότι η προσέγγιση είναι πρωτότυπη καθώς περνάμε από τα δεδομένα ενός πειράματος (η αποτυπωμένη καμπύλη) στην εξίσωση που περιγράφει την καμπύλη και κατ' επέκταση στους νόμους κίνησης. Μάλιστα, όπως περιγράφουμε στη μεθοδολογία μας, στο πέρασμα αυτό δεν χρησιμοποιούμε καθόλου τους νόμους της Μηχανικής αλλά χρησιμοποιούμε αλγεβρική ανάλυση της αποτυπωμένης καμπύλης, κάτι αντίστοιχο με την ιδέα του Leibnitz.

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Για να είμαστε σε θέση να απαντήσουμε στα ερευνητικά μας ερωτήματα, ήταν σαφές πως θα έπρεπε να έχουμε «ακριβή» πειράματα, δηλαδή:

1. Οι βολές να πραγματοποιούνται σε κεκλιμένο επίπεδο σταθερής κλίσης. Το επιτύχαμε αυτό με ειδική κατασκευή από μακετόχαρτο, όπου η γωνία κλίσης του επιπέδου είχε ημίτονο ¼.
2. Να ελέγχουμε τη μεταβολή της αρχικής γωνίας βολής με σχετική ακρίβεια. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιήσαμε υποτυπώδες μοιρογνωμόνιο.
3. Να ελέγχουμε τη μεταβολή της αρχικής ταχύτητας. Αυτή ήταν και η δυσκολότερη ρύθμιση. Παρόλο που ήταν σαφές εξαρχής ότι θα πρέπει να βάλλουμε πάντα την ίδια μπάλα (μηδενικής ελαστικότητας και σταθερής μάζας), οι πρώτες βολές με ελάσματα ήταν μάλλον ανεπιτυχείς, καθώς δεν υπήρε τρόπος να συγκρίνουμε τα μέτρα των αρχικών ταχυτήτων. Τελικά χρησιμοποιήσαμε την κεντρική μονάδα, τουβλάκι EV3 (EV3 Brick), της πλατφόρμας Lego Mindstorm EV3 συνδεδεμένο με έναν μεγάλο σερβο-κινητήρα (Large Motor). Από το τουβλάκι EV3 ρυθμίζαμε την παράμετρο «Ισχύς» (Power) του κινητήρα (πραγματοποιήσαμε βολές με τις τιμές 40, 50 και 60) και δίναμε την εντολή να περιστραφεί ένας βραχίονας για να χτυπήσει την μπάλα. Για να επιτύχουμε την επιθυμητή γωνία βολής (30°, 45° ή 60°), η μπάλα ήταν τοποθετημένη ανάμεσα σε δύο μακρόστενα τουβλάκια Lego, μέρος της μηχανικής κατασκευής μας, τα οποία ευθυγραμμίζαμε στη σωστή κατεύθυνση ακολουθώντας το μοιρογνωμόνιο (βλέπε σχήμα 1).

   Η ρύθμιση της παραμέτρου «Ισχύς» από το τουβλάκι EV3 γίνεται σε μονάδες της γλώσσας προγραμματισμού του ρομπότ και ως εκ τούτου οι τιμές 50 και 60 δεν αντιστοιχούν σε ταχύτητες 50m/sec και 60m/sec, όμως διατηρείται ο λόγος 50/60 για τις ταχύτητες που αποδίδουν.

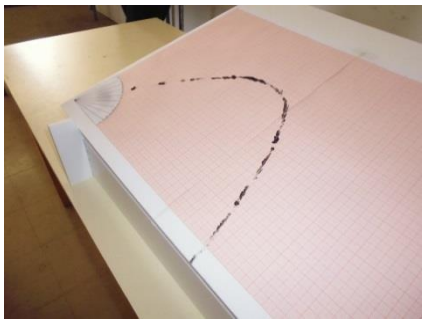


Σχήμα 1: Μηχανική κατασκευή για βολές με ελεγχόμενη αρχική ταχύτητα

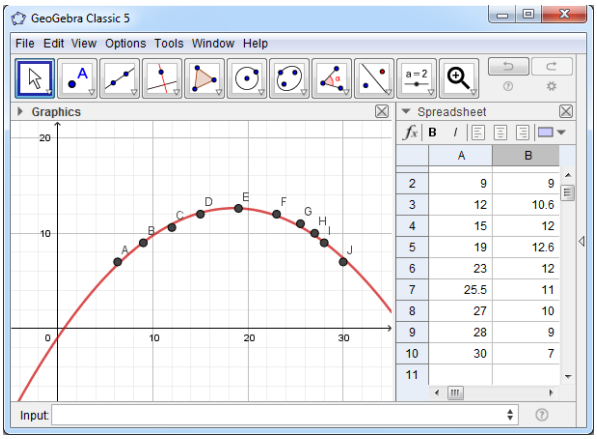
4. Να ελαχιστοποιήσουμε τις τριβές και να διασφαλίσουμε ότι η μπάλα πραγματοποιεί κύλιση στο κεκλιμένο επίπεδο και όχι κύλιση και ολίσθηση μαζί. Η μείωση των τριβών επιτεύχθηκε με αραιή νωπή βαφή (μελάνι μαρκαδόρων υαλοπίνακα) στην οποία εμβάπταμε περιμετρικά την μπάλα μας και όχι σε όλη της την έκταση, ενώ η ολίσθηση αποφεύχθηκε με την επιλογή σχετικά μικρών ταχυτήτων καθώς και με την έναρξη της κίνησης στον αυλό που σχημάτιζαν τα δύο μακρόστενα κυβάκια Lego.

Μεθοδολογία της ανάλυσης των πειραμάτων

Για να επιτύχουμε τον πρώτο μας στόχο, δηλαδή να διαπιστώσουμε εάν η καμπύλη είναι παραβολή, χρησιμοποιήσαμε χαρτί μιλιμετρέ που τοποθετούσαμε στην κεκλιμένη επιφάνεια και που ο άξονας $x'x$ του χαρτιού ήταν παράλληλος με τον οριζόντιο άξονα του κεκλιμένου επιπέδου. Εκεί αποτυπωνόταν η καμπύλη (βλέπε σχήμα 2). Έπειτα, λαμβάναμε τις συντεταγμένες αρκετών σημείων από από την καμπύλη και τις εισαγάγαμε σε δύο στήλες του λογιστικού φύλλου (spreadsheet) του λογισμικού GeoGebra, η πρώτη στήλη για τις τετμημένες και η δεύτερη για τις τεταγμένες των σημείων. Επιλέγοντας τα ζεύγη αυτών των τιμών δημιουργούσαμε λίστα σημείων τα οποία αυτόματα εμφανίζονταν στο σύστημα συντεταγμένων του λογισμικού. Τέλος, με την εντολή «FitPoly(<λίστα σημείων>, 2)» προσαρμόζαμε στη λίστα των σημείων μια πολυωνυμική καμπύλη 2^{ου} βαθμού (μια παραβολή). Αν το πείραμα είχε γίνει προσεκτικά, οι αποκλίσεις από τα σημεία ήταν μικρές (βλέπε σχήμα 3) και φυσικά, το συμπέρασμα ήταν ότι όντως, η τροχιά της κίνησης είναι παραβολή.

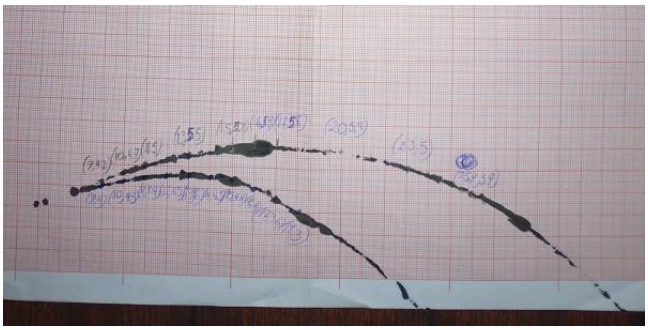


Σχήμα 2: Η αποτύπωση μιας τροχιάς σε μιλιμετρέ χαρτί επί του κεκλιμένου επιπέδου.



Σχήμα 3: Λογισμικό GeoGebra: αποτυπώνοντας σημεία από τις συντεταγμένες τους και προσαρμόζοντας σε αυτά μια παραβολή

Για τη μέτρηση του βεληνεκούς (με χάρακα) ήταν απαραίτητο να γνωρίζουμε το ακριβές σημείο εκκίνησης της μπάλας. Όμως, δεν ήταν απαραίτητα το πρώτο σημείο που θα αποτυπωνόταν στο μιλιμετρέ, καθώς το σύνηθες ήταν να υπάρχουν κενά στην αποτυπωμένη καμπύλη. Σκεφτήκαμε λοιπόν για τον εντοπισμό του να πραγματοποιήσουμε και δεύτερη βολή υπό την ίδια γωνία αλλά με διαφορετική ταχύτητα (δηλαδή, να μην αλλάξουμε θέση ή προσανατολισμό στη μηχανική μας κατασκευή, αλλά απλά να μεταβάλουμε την τιμή της παραμέτρου «Ισχύς»). Εκεί που οι δύο καμπύλες συναντώνται, θα είναι θεωρητικά και το κοινό σημείο εκκίνησης των βολών (βλέπε σχήμα 4).



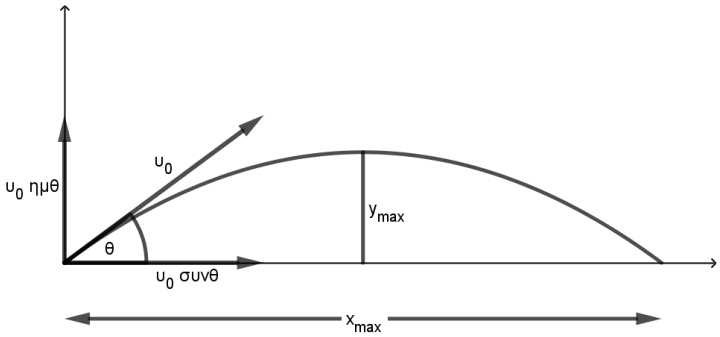
Σχήμα 4: Δύο τροχιές με την ίδια γωνία βολής αλλά διαφορετικές αρχικές ταχύτητες

Τελικά, πραγματοποιήσαμε πάνω από 20 βολές κατ' αυτόν τον τρόπο (σε ζεύγη). Άλλες από αυτές απέκλιναν πολύ από την παραβολή (δίνουμε κάποια ερμηνεία στα συμπεράσματα) ενώ άλλες δεν είχαν διακριτό σημείο εκκίνησης. Όμως υπήρχαν και εκείνες που πληρούσαν τις προϋποθέσεις για να προχωρήσουμε στην ανάλυσή τους.

Πριν όμως παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα της ανάλυσης, καλό είναι να δούμε τις εξισώσεις κίνησης μιας πλάγιας βολής σε κατακόρυφο επίπεδο, ώστε να μπορέσουμε να αντιστοιχήσουμε τα δικά μας αποτελέσματα με αυτά που ισχύουν στο κατακόρυφο επίπεδο.

ΠΛΑΓΙΑ ΒΟΛΗ ΣΕ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Εάν αναζητήσουμε στο el.wikipedia.org το λήμμα «κινητική» θα δούμε μεταξύ άλλων τις εξισώσεις της πλάγιας βολής. Αναφερόμαστε σε δύο εξισώσεις και όχι σε μία καθώς η κίνηση της μπάλας είναι, σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, η σύνθεση δύο απλών κινήσεων: α) μιας οριζόντιας όπου δεν εφαρμόζεται κάποια δύναμη, συνεπώς είναι ευθύγραμμη ομαλή και β) μιας κατακόρυφης όπου εφαρμόζεται το βάρος, οπότε είναι ομαλά επιταχυνόμενη (με την αρνητική επιτάχυνση της βαρύτητας $-g$).



Σχήμα 5: πλάγια βολή σε κατακόρυφο επίπεδο με αρχική γωνία βολής θ και ταχύτητα υ_0.

Για τις εξισώσεις κίνησης θεωρούμε ότι η εκκίνηση της βολής γίνεται στην αρχή των αξόνων. Έτσι, η θέση του σώματος από τη στιγμή εκκίνησης ($t = 0$) ως τη στιγμή που επιστρέφει στον άξονα $x'x$ ($t = t_{max}$) περιγράφεται με τις συντεταγμένες:

$$x = \upsilon_0 \, \text{συν}\theta \, t \tag{1}$$

$$y = \upsilon_0 \, \text{ημ}\theta \, t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{2}$$

όπου θ είναι η γωνία βολής (βλέπε σχήμα 5) και υ_0 είναι η αρχική ταχύτητα. Οπότε προφανώς, η αρχική ταχύτητα κατά την οριζόντια κίνηση είναι υ_0 συνθ ενώ κατά την κατακόρυφη είναι υ_0 ημθ.

Για να υπολογίσουμε το βεληνεκές x_{max} συναρτήσει της αρχικής γωνίας βολής θ, υπολογίζουμε πρώτα το t_{max} από την (2): Καθώς για $t = t_{max}$ είναι $y = 0$, λαμβάνουμε διαδοχικά:

$$0 = \upsilon_0 \, \text{ημ}\theta \, t_{max} - \frac{1}{2} g \, t_{max}^2 \Leftrightarrow$$

$$0 = \upsilon_0 \, \text{ημ}\theta - \frac{1}{2} g \, t_{max} \Leftrightarrow$$

$$t_{max} = \frac{2\upsilon_0 \, \text{ημ}\theta}{g}$$

Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή του χρόνου στην εξίσωση (1) παίρνουμε ότι το βεληνεκές ισούται με

$$x_{max} = \frac{2\upsilon_0^2 \, \text{ημ}\theta \, \text{συν}\theta}{g} = \frac{\upsilon_0^2 \, \text{ημ}2\theta}{g} \tag{3}$$

Η δεύτερη ισότητα ισχύει γιατί $\eta\mu 2\theta = 2\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta$, όπως αποδεικνύεται στο λήμμα που παραθέτουμε παρακάτω.

Ποια είναι λοιπόν τα άμεσα συμπεράσματα της σχέσης (3);

α) Το βελληνεκές γίνεται **μέγιστο** όταν $\theta = 45°$ γιατί τότε

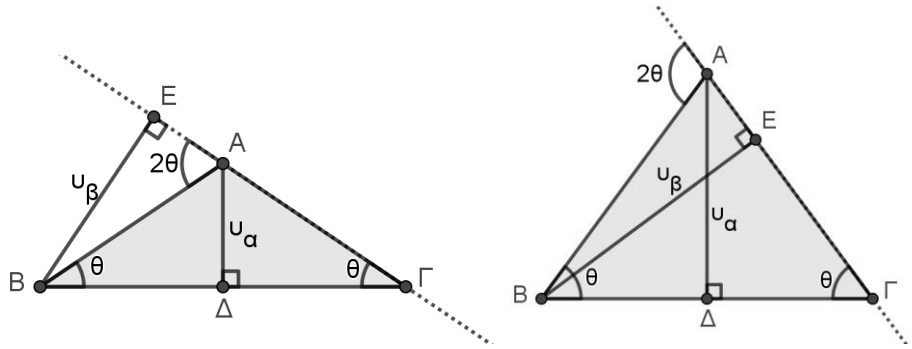
$$\eta\mu 2\theta = \eta\mu 90° = 1.$$

β) Στην περίπτωση που δυο βολές έχουν αρχικές γωνίες βολής **συμπληρωματικές γωνίες**, τότε **το βελληνές τους είναι ίδιο** μια και τα ημίτονα των διπλασίων των γωνιών είναι ημίτονα παραπληρωματικών γωνιών, άρα ίσα.

Λήμμα (το ημίτονο του διπλασίου οξείας γωνίας)

Αν $0° < \theta < 90°$ τότε $\eta\mu 2\theta = 2\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta$

Απόδειξη: Εφόσον $0° < \theta < 90°$, μπορούμε να θεωρήσουμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ=1) με γωνίες βάσης θ, όπως φαίνεται στο σχήμα 6. Σε αυτό φέρνουμε και τα ύψη του ΑΔ και ΒΕ (το ΑΔ είναι και διάμεσος).



Σχήμα 6: Το ημίτονο του διπλασίου γωνίας.

Τότε βέβαια, η $\widehat{A_{\varepsilon\xi}} = 2\theta$ και από στοιχειώδη τριγωνομετρία στα ορθογώνια ΑΒΕ και ΑΒΔ παίρνουμε ότι:

$$\upsilon_\beta = BE = \eta\mu 2\theta$$

$$\upsilon_\alpha = A\Delta = \eta\mu\theta$$

$$\alpha = B\Gamma = 2B\Delta = 2\sigma\upsilon\nu\theta$$

Το ζητούμενο τώρα έπεται από τον τύπο εμβαδού του τριγώνου δηλαδή την ισότητα:

$$\frac{1}{2}\beta\,\upsilon_\beta = \frac{1}{2}\alpha\,\upsilon_\alpha \Leftrightarrow \eta\mu 2\theta = 2\sigma\upsilon\nu\theta\,\eta\mu\theta$$

ΑΠΟ ΤΙΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΣΤΟΝ ΤΥΠΟ ΓΙΑ ΤΟ ΒΕΛΗΝΕΚΕΣ ΜΙΑΣ ΠΛΑΓΙΑΣ ΒΟΛΗΣ ΣΕ ΚΕΚΛΙΜΕΝΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Όπως ήδη αναφέραμε στην παράγραφο «μεθοδολογία της ανάλυσης», τα πειράματά μας ήταν ζεύγη βολών με την ίδια γωνία βολής αλλά διαφορετικές αρχικές ταχύτητες (στον Πίνακα 1 τα ζεύγη βολών δηλώνονται με το ίδιο γράμμα στην 1η στήλη –φαίνεται βέβαια ότι στο πείραμα ε έχουμε τριάδα βολών με την ίδια ταχύτητα αλλά διαφορετικές γωνίες βολής). Έτσι μπορούσαμε να εντοπίσουμε το κοινό σημείο εκκίνησης και στη συνέχεια να μετρήσουμε το βεληνεκές κάθε βολής.

Έχουμε δηλαδή δύο μεγέθη που μεταβάλλαμε στα πειράματά μας –την γωνία βολής $\boldsymbol{\theta}$ και την αρχική ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon_0}$ – και ένα μέγεθος που μπορούμε να μετρήσουμε στην αποτυπωμένη καμπύλη –το βεληνεκές $\mathbf{x_{max}}$. Το ερώτημα είναι: πώς συνδέονται μεταξύ τους, ακολουθούν κάποια σχέση παρόμοια με την (3); Λέμε «παρόμοια» και όχι «ακριβώς ίδια» αφενός γιατί στο κεκλιμένο επίπεδο αναμένουμε ως επιτάχυνση ένα κλάσμα της επιτάχυνσης της βαρύτητας g και αφετέρου γιατί οι ταχύτητες (όπως εξηγήσαμε) είναι σε μονάδες της γλώσσας προγραμματισμού και όχι σε $^{m}/_{sec}$.

Συνεπώς, ο στόχος μας σε αυτή την ενότητα είναι να εξετάσουμε εάν υπάρχει σταθερά λ τέτοια ώστε να ισχύει

$$x_{max} = \lambda\, \upsilon_0^2\, \eta\mu 2\theta \qquad (4)$$

Οι μετρήσεις που παραθέτουμε στον Πίνακα 1 αναφέρονται σε βολές που χαρακτηρίστηκαν «καλές» απλώς και μόνο γιατί η καμπύλη που προέκυψε από το ίχνος της μπάλας ήταν «αρκετά κοντά» σε μια παραβολή (ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράψαμε στην παράγραφο «μεθοδολογία της ανάλυσης των πειραμάτων» και που εικονίζεται στο σχήμα 3).

Το ενδιαφέρον φυσικά στον Πίνακα 1 εστιάζεται στην τελευταία στήλη όπου υπολογίζεται ο λόγος $\frac{x_{max}}{\upsilon_0^2\, \eta\mu 2\theta}$, δηλαδή το πιθανό λ. Έχουμε τα σημειώσουμε τα εξής:

1. Η μέση τιμή των αριθμών της τελευταίας στήλης είναι $\lambda = 0{,}006675$
2. Οι αριθμοί της τελευταίας στήλης δεν αποκλίνουν ιδιαίτερα από τη μέση τιμή τους. Η μεγαλύτερη απόκλιση είναι στο ζεύγος α με $\upsilon_0 = 50$ και $\theta = 30°$, όπου $\lambda = 0{,}008683$. Αλλά δεδομένου ότι μία από τις βολές στο ζεύγος δ έχει επίσης $\upsilon_0 = 50$, $\theta = 30°$ αλλά $\lambda = 0{,}007621$, θα μπορούσαμε να παραβλέψουμε το γεγονός της «μεγάλης απόκλισης».
3. Τα ζεύγη βολών έχουν περίπου το ίδιο λ, με το χειρότερο να είναι πάλι το ζεύγος α (επισημαίνουμε και πάλι ότι στα ζεύγη βολών η γωνία βολής είναι ίδια).
4. Αν θεωρήσουμε βολές με την ίδια ταχύτητα, βλέπουμε ότι σχεδόν πάντα το μικρότερο βεληνεκές είναι για γωνία βολής 60°, ελαφρώς μεγαλύτερο είναι για γωνία βολής 30° και μέγιστο γίνεται για γωνία βολής 45°.

Αντιστοιχία ζευγών βολών	Αρχική ταχύτητα υ_0	Γωνία βολής θ	Βεληνεκές x_{max}	$\frac{x_{max}}{\upsilon_0^2 \, ημ2\theta}$ (πιθανό λ)
α	40	30°	9	0,006495
β	40	45°	10,5	0,006563
γ	40	60°	8,2	0,005918
δ	50	30°	16,5	0,007621
α	50	30°	18,8	0,008683
ε	50	45°	13,562	0,005425
στ	50	45°	15,86	0,006344
γ	50	60°	12,7	0,005866
ε	60	30°	20,587	0,006603
δ	60	30°	21,25	0,006816
β, στ	60	45°	25,25	0,007014
ε	60	60°	20,015	0,006420

Πίνακας 1: Αριθμητικά αποτελέσματα των πειραμάτων

Αξιολογώντας το εύρημα (3), οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι σε βολές με την ίδια γωνία βολής το βεληνεκές είναι ανάλογο του τετραγώνου της αρχικής ταχύτητας βολής. Εδώ να σημειώσουμε ότι μπορεί τα ζεύγη βολών να δηλώνονται ότι είχαν για παράδειγμα αρχική γωνία βολής $\theta = 30°$, όμως στην πραγματικότητα να ήταν ελαφρώς διαφορετική, ας πούμε $\theta = 35°$, με συνέπεια να μην βρίσκουμε για το λ την τιμή 0,006675 αλλά την τιμή 0,007621. Συνεπώς, δεν είναι η ακριβής τιμή του λ που μας οδηγεί στο συμπέρασμα που αναφέραμε για την αναλογία του βεληνεκούς με το τετράγωνο της αρχικής ταχύτητας, αλλά το γεγονός ότι έχουμε περίπου το ίδιο λ όταν οι βολές έχουν την ίδια αρχική γωνία βολής (αντιπροσωπευτικό παράδειγμα αποτελεί το ζεύγος γ).

Στο εύρημα (4) έχουμε και την απάντηση κάποιων από τα ερευνητικά μας ερωτήματα, όπως το ότι το μέγιστο βεληνές είναι για γωνία βολής $45°$ και ότι οι συμπληρωματικές γωνίες βολής (όπως για παράδειγμα οι γωνίες $30°$ και $60°$) δίνουν περίπου το ίδιο βεληνεκές. Παρατηρούμε βέβαια ότι το βεληνεκές είναι ελαφρώς μικρότερο για γωνία βολής $60°$ ίσως γιατί είναι πιο έντονο το φαινόμενο της ολίσθησης κατά την κάθοδο της μπάλας (καθώς κατέρχεται από μεγαλύτερο ύψος).

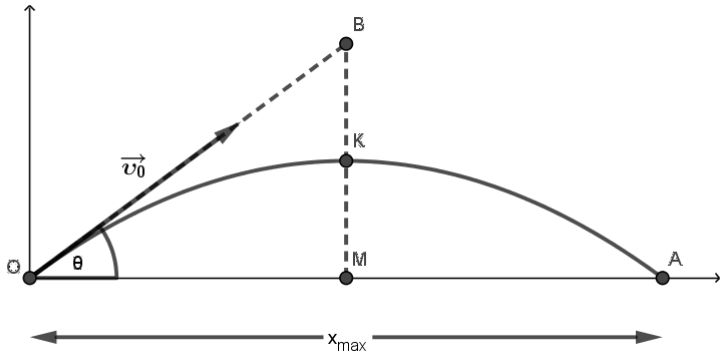
Όλα τα παραπάνω συγκλίνουν στο να συμπεράνουμε ότι πραγματικά υπάρχει μια σταθερά λ (περίπου 0,006675) έτσι ώστε να ισχύει η σχέση (4) για κάθε βολή στο κεκλιμένο μας επίπεδο.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΣΤΗΝ ΠΛΑΓΙΑ ΒΟΛΗ ΣΕ ΚΕΚΛΙΜΕΝΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

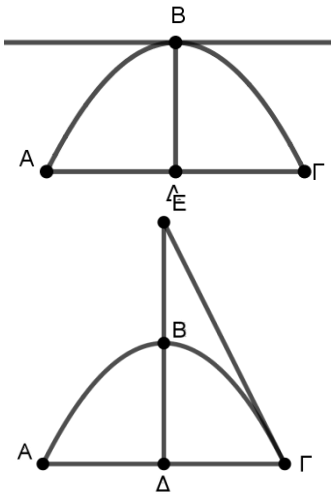
Ο τελευταίος μας στόχος είναι να καταλήξουμε στις εξισώσεις (ή στην εξίσωση) κίνησης της πλάγιας βολής σε κεκλιμένο επίπεδο. Ουσιαστικά πρόκειται για την εξίσωση της καμπύλης που διέγραψε η μπάλα σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων που η αρχή των αξόνων βρίσκεται στο σημείο εκκίνησης της βολής και ο άξονας $x'x$ είναι ο οριζόντιος άξονας που διέρχεται από το σημείο εκκίνησης.

Για τον εντοπισμό της εξίσωσης θα χρειαστούμε τα εξής, τα οποία απεικονίζονται και στο Σχήμα 7:

1. Η καμπύλη που διαγράφει η μπάλα είναι παραβολή (όπως προέκυψε από την ανάλυση της καμπύλης με το λογισμικό GeoGebra).
2. Η παραβολή διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο (η δική μας επιλογή για τη θέση των αξόνων).
3. Η παραβολή διέρχεται και από το σημείο $A(x_{max}, 0)$, όπου το x_{max} περιγράφεται από την εξίσωση (4).
4. Το διάνυσμα της αρχικής ταχύτητας $\overrightarrow{\upsilon_0}$ εφάπτεται στην παραβολή στην αρχή των αξόνων και σηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία θ.



Σχήμα 7: Παραβολή που διέρχεται από τα Ο και Α και που η εφαπτομένη της στο Ο σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία θ

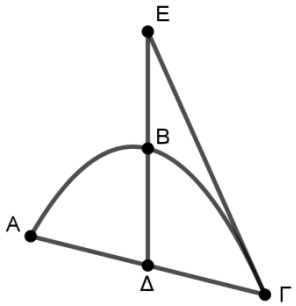


Επιπλέον, θα χρειαστούμε και τις Προτάσεις (α) και (β) από το έργο του Αρχιμήδη «Τετραγωνισμός Παραβολής» (Σταμάτης, 1972), γι' αυτό και τις παραθέτουμε σε μετάφραση του Ευάγγελου Σταμάτη:

Πρόταση (α): *Ἐὰν δοθῇ τομή ὀρθογωνίου κώνου (παραβολὴ) ἤτοι ἡ ΑΒΓ, καὶ ἡ ΒΔ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον (τὸν ἄξονα τῆς παραβολῆς) ἢ ἡ ἴδια νὰ εἶναι διάμετρος, ἡ δὲ ΑΓ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς παραβολῆς εἰς τὸ σημεῖον Β, τότε ἡ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς*

τὴν ΔΓ· καὶ ἂν ἡ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΓ τότε ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ σημεῖον Β εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ.

Πρόταση (β): *Ἐὰν δοθῇ τομή ορθογωνίου κώνου (παραβολή) ἡ ΑΒΓ, εἶναι δὲ ἡ ΒΔ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ἢ ἴδια εἶναι διάμετρος, (ἄξων παραβολῆς) ἡ δὲ ΑΔΓ παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς παραβολῆς εἰς τὸ σημεῖον Β, ἡ δὲ ΕΓ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς εἰς τὸ σημεῖον Γ, τότε ἡ ΒΔ=ΒΕ.*



Συνδυάζοντας τις δύο προτάσεις του Αρχιμήδη έχουμε μια πολύ ενδιαφέρουσα ιδιότητα για την παραβολή: Αν ΑΓ είναι μια χορδή της παραβολής, Δ το μέσο της και η ΔΒ είναι παράλληλη προς τον άξονα της παραβολής, τότε αφενός η εφαπτομένη της παραβολής στο Β είναι παράλληλη στη χορδή ΑΓ και αφετέρου η εφαπτομένη της παραβολής στο Γ θα τμήσει την προέκταση της ΔΒ σε σημείο Ε έτσι ώστε ΒΕ=ΒΔ.

Στην παραβολή που εικονίζεται στο Σχήμα 7, η κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από το μέσο Μ του διαστήματος ΟΑ θα τμήσει την παραβολή στο σημείο Κ που σύμφωνα με τα παραπάνω είναι το μέσο της ΜΒ (Β το σημείο τομής της κατακόρυφης από το Μ και της εφαπτομένης στο Ο). Δεδομένου ότι το Β έχει τεταγμένη $\frac{x_{max}}{2} \cdot \varepsilon\varphi\theta$, το Κ θα έχει συντεταγμένες

$$K\left(\frac{x_{max}}{2}, \frac{x_{max} \cdot \varepsilon\varphi\theta}{4}\right)$$

Οπότε το πρόβλημα του προσδιορισμού της εξίσωσης της παραβολής ανάγεται στον προδιορισμό της παραβολής που διέρχεται από τα σημεία Ο, Α και Κ.

Όλες οι παραβολές που έχουν δύο ρίζες x_1, x_2 έχουν εξίσωση της μορφής

$$y = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$$

και κατά συνέπεια, η παραβολή του σχήματος 7 θα έχει εξίσωση

$$y = \alpha x(x - x_{max}) \tag{5}$$

Για να προσδιορίσουμε το α αξιοποιούμε το γεγονός ότι οι συντεταγμένες του Κ επαληθεύουν την εξίσωση της παραβολής (5), ισχύει δηλαδή

$$\frac{x_{max} \cdot \varepsilon\varphi\theta}{4} = -\alpha\frac{x_{max}^2}{4} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\varepsilon\varphi\theta}{x_{max}}$$

Με αντικατάσταση στην (5) παίρνουμε την εξίσωση που περιγράφει την παραβολή του σχήματος 7:

$$y = -\frac{\varepsilon\varphi\theta}{x_{max}}x^2 + \varepsilon\varphi\theta \cdot x \Leftrightarrow$$

$$y = -\frac{1}{2\lambda\, \upsilon_0^2 \sigma\upsilon\nu^2\theta}x^2 + \varepsilon\varphi\theta \cdot x \tag{6}$$

Στην εξίσωση (6) εμφανίζονται ως παράμετροι η αρχική ταχύτητα υ_0 και η γωνία βολής θ καθώς και η σταθερά λ η οποία εξαρτάται από την κλίση του επιπέδου και από την αντιστοιχία των μονάδων ταχύτητας της ψηφιακής συσκευής EV3 σε $^{m}/_{sec}$.

Το γεγονός ότι απουσιάζει ο χρόνος ως παράμετρος οφείλεται στην αλγεβρική προσέγγιση που επιχειρήσαμε, χωρίς να εμπλέξουμε τους νόμους της Μηχανικής. Άλλωστε, και στην πλάγια βολή σε κατακόρυφο επίπεδο, που περιγράφεται όπως είδαμε με τις εξισώσεις (1) και (2), αν εξαλείψουμε την παράμετρο του χρόνου θα πάρουμε μια παρόμοια εξίσωση παραβολής, την

$$y = -\frac{g}{2\upsilon_0^2 \sigma\upsilon\nu^2\theta} x^2 + \varepsilon\varphi\theta \cdot x$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σε αυτή την εργασία ασχοληθήκαμε με ένα πρόβλημα της Μηχανικής που δεν εξετάζεται στο Λύκειο: την πλάγια βολή σε κεκλιμένο επίπεδο. Μεταβλητά μεγέθη στους πειραματισμούς μας ήταν η αρχική ταχύτητα και η γωνία βολής, ενώ η κλίση του επιπέδου παρέμενε σταθερή. Στόχος μας ήταν ο εντοπισμός της εξίσωσης της κίνησης από την αποτυπωμένη τροχιά της (βαμμένης με νωπό χρώμα) μπάλας στο μιλιμετρέ χαρτί.

Απαραίτητη προϋπόθεση ήταν οι ακριβείς ρυθμίσεις γωνίας βολής και αρχικής ταχύτητας στα πειράματά μας, αλλά και οι εξίσου ακριβείς μετρήσεις του βεληνεκούς. Η αδυναμία μας να έχουμε την απαιτούμενη ακρίβεια καθώς και οι τριβές και οι ολισθήσεις της μπάλας κατά την κίνηση, δυσκόλεψαν το έργο μας και εξαιτίας τους σημειώθηκαν αποκλίσεις στη σταθερά αναλογίας βεληνεκούς (x_{max}) προς το γινόμενο του τετραγώνου της αρχικής ταχύτητας με το ημίτονο του διπλασίου της γωνίας βολής (υ_0^2 ημ2θ). Οι αποκλίσεις όμως δεν ήταν πολύ μεγάλες και γι'αυτό δεχθήκαμε ότι τα δύο μεγέθη είναι πράγματι ανάλογα και μάλιστα κατά προσέγγιση ο λόγος τους είναι $\lambda = 0{,}006675$.

Η παραμετρική εξίσωση του βεληνεκούς που εντοπίσαμε με την ανάλυση των στοιχείων του Πίνακα 1 (εξίσωση 4) και το γεγονός ότι οι αποτυπωμένες καμπύλες ήταν παραβολές κατά προσέγγιση (εύρημα με το λογισμικό GeoGebra) αρκούσαν για να οδηγηθούμε στη ζητούμενη εξίσωση βολής (εξίσωση 6), αξιοποιώντας γεωμετρικές ιδιότητες της παραβολής γνωστές από την αρχαιότητα. Σε αυτή την πορεία δεν χρησιμοποιήσαμε τους νόμους της Μηχανικής.

Διαπιστώσαμε ακόμα ότι η εξίσωση (6) για την πλάγια βολή σε κεκλιμένο επίπεδο είναι σε πλήρη αναλογία με την εξίσωση της πλάγιας βολής σε κατακόρυφο επίπεδο, όταν εξαλείψουμε την παράμετρο του χρόνου.

Και πριν από αυτό, όταν εξετάσαμε την εξίσωση (4) για το βεληνεκές, βεβαιωθήκαμε ότι το βεληνεκές μεγιστοποιείται για γωνία βολής $45°$ και ότι οι συμπληρωματικές γωνίες βολής (όπως είναι οι γωνίες $30°$ και $60°$) δίνουν περίπου το ίδιο βεληνεκές.

Ίσως τελικά να μην είναι υπερβολικό να πούμε ότι όταν κατανοήσουμε τα μαθηματικά της τροχιάς μιας κίνησης έχουμε κατανοήσει και τους νόμους της Φυσικής που διέπουν την κίνηση.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστούμε τον καθηγητή Φυσικής και Ρομποτικής του σχολείου μας κ. Γιώργο Χατζησάββα για τη διάθεση της πλατφόρμας Lego Mindstorm EV3, την καθοδήγησή του για τη χρήση της καθώς και την παρουσία του στα πειράματά μας.

Βιβλιογραφία

[1] Dennis, D. & Confrey, J. (1995), *Functions of a Curve: Leibniz's Original Notion of Functions and its Meaning for the Parabola*, The College Mathematics Journal, March 1995, Vol. 26, #2, 124-130.

[2] Texas Instruments (2008), *NUMB3RS - Season 2 - "Hot Shot" - Parabolic Food Fight*, https://education.ti.com/en/activity/detail?id=79249DB7C6234BBBBB708E0EF224F8BB

[3] Βλάχος, Ι., Γραμματικάκης, Ι., Καραπαναγιώτης, Β., Κόκκοτας, Π., Περιστερόπουλος, Π., & Τιμοθέου, Γ. (2015), *Φυσική (Α' Γενικού Λυκείου - Γενικής Παιδείας) - Βιβλίο Μαθητή*, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

[4] Σταμάτης, Ε. (1972), *Αρχιμήδους Τετραγωνισμός Παραβολής*, Επιστημονικαί Εργασίαι Άρθρα, Τόμος Α