Open Schools Journal for Open Science

Vol 3, No 6 (2020)

«Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω»: Μαθηματικά και Αρχαία Ελληνική Σκέψη

Νικόλας Κετέν, Παντελής Βενάρδος, Σοφία Νικολαΐδου

doi: [10.12681/osj.24309](https://doi.org/10.12681/osj.24309)

Open Schools Journal for Open Science

«Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω»: Μαθηματικά και Αρχαία Ελληνική Σκέψη

Κετέν Νικόλας[1], Βενάρδος Παντελής[2], Νικολαΐδου Σοφία[3]

[1]Πειραματικό Σχολείο Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, Θεσσαλονίκη, Ελλάδα,
[2]Μαθηματικός, Πειραματικό Σχολείο Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης,
[3]Φιλόλογος, Πειραματικό Σχολείο Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα Μαθηματικά υπήρξαν ένα πολύ σημαντικό πεδίο κατά την αρχαιότητα, καθώς ένας μεγάλος αριθμός μαθηματικών έθεσε με το έργο του τις βάσεις για την εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης. Με αφετηρία τη φράση που υπήρχε στην είσοδο της Ακαδημίας του Πλάτωνα, εξετάζουμε ποια ήταν η εξέλιξη της Μαθηματικής σκέψης στην αρχαιότητα, ποια ήταν η σχέση μεταξύ των Μαθηματικών και της αρχαίας ελληνικής φιλοσοφίας και πώς στοιχεία της αρχαίας ελληνικής γλώσσας επιβιώνουν έως σήμερα, μέσω των Μαθηματικών. Η μεθοδολογία της έρευνας που υιοθετούμε στην εργασία είναι η βιβλιογραφική επισκόπηση, ταυτόχρονα με τη μελέτη των σχολικών βιβλίων των Μαθηματικών. Από την εργασία αναδεικνύεται ο συνδετικός κρίκος μεταξύ Μαθηματικών και Φιλοσοφίας που δεν είναι άλλος από την έννοια της λογικής, της απόδειξης και της τεκμηρίωσης, τα οποία είναι βασικά στοιχεία, κοινά και για τις δύο επιστήμες. Επίσης, αποκαλύπτεται ότι στα Μαθηματικά, περισσότερο ίσως από κάθε γνωστικό αντικείμενο στο σχολείο η αρχαία ελληνική γλώσσα επιβιώνει, κυρίως μέσω μερών του λόγου της αρχαίας ελληνικής, τα οποία αποτελούν όρους και έννοιες της μαθηματικής επιστήμης.

ΛΕΞΕΙΣ-ΚΛΕΙΔΙΑ

Μαθηματικά, Φιλοσοφία, Αρχαία Ελληνικά

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σήμερα, θεωρείται κοινώς αποδεκτό το γεγονός ότι ένα πολύ μεγάλο μέρος του δυτικού πολιτισμού γεννήθηκε και αναπτύχθηκε, έχοντας ως βάση τον τρόπο σκέψης που διαμόρφωσαν οι αρχαίοι Έλληνες από τον 6^{ο} αι. έως και το τέλος του 4^{ου} αι. π.Χ. Ένα πολύ σημαντικό επίτευγμα αυτής της εποχής είναι η μετάβαση από τον *Μύθο* στον *Λόγο*, δηλαδή η καθιέρωση της επιστημονικής σκέψης που θα έρθει με την φιλοσοφία (Κάλφας, 2015α).

Επιστήμη και φιλοσοφία δε διαφοροποιούνται στην Αρχαία Ελλάδα, τουλάχιστον κατά τον 6^{ο} και τον 5^{ο} αιώνα. Η διάκριση επιστήμης και φιλοσοφίας είναι μεταγενέστερη και θα αρχίσει προς το τέλος του 5^{ου} αι. όταν τα μαθηματικά γίνονται ο πρώτος επιστημονικός κλάδος που αυτονομείται, διαχωρίζεται από τη φιλοσοφία δηλαδή και μετατρέπεται σε ένα αυτόνομο πεδίο, ενώ κατά το τέλος του 5ου προς τις αρχές του 4^{ου} αι. τον δρόμο των μαθηματικών παίρνει και η αστρονομία. Στην ουσία αυτές οι δύο επιστήμες θα μείνουν και σ' όλη τη διάρκεια της αρχαιότητας ως οι μόνες αυτόνομες επιστήμες. Όλες οι άλλες επιστήμες, όπως τις γνωρίζουμε σήμερα, ανήκουν στην Αρχαία Φιλοσοφία, και μ' αυτήν την έννοια η ανάπτυξη, κυρίως στα πρώτα στάδια της φιλοσοφικής σκέψης, είναι ανάπτυξη ταυτόχρονα και της επιστημονικής σκέψης.

Σύμφωνα με τον Εξαρχάκο (2000), κατά κάποιο τρόπο το θεωρητικό πλαίσιο και το μοντέλο άσκησης και λειτουργίας της φιλοσοφίας, υιοθετήθηκε και τροφοδότησε σημαντικά τον τομέα των μαθηματικών, ως επιστήμης με κωδικοποιημένη γλώσσα, βασικά στοιχεία της οποίας είναι: (α) η θεώρηση του όλου, (β) ο παραγωγικός, (γ) ο επαγωγικός και (δ) ο αναλογικός συλλογισμός, (ε) η αφαίρεση και η γενίκευση.

Αντίστοιχα, τα μαθηματικά, όπως τα ξέρουμε σήμερα, γεννήθηκαν στην αρχαία Ελλάδα. Τα μαθηματικά των άλλων μεσογειακών λαών, δηλαδή των Βαβυλωνίων, των Ασσυρίων και των

Αιγυπτίων, αποτελούνταν κυρίως από υπολογιστικές τεχνικές και συστήματα αρίθμησης, που είχαν σχέση είτε με θρησκευτικά είτε με πρακτικά θέματα, όπως το μοίρασμα της γης και η είσπραξη των φόρων. Η μεγάλη στροφή στην μελέτη των μαθηματικών σημειώθηκε στην Αρχαία Ελλάδα από τους Έλληνες μαθηματικούς και φιλοσόφους οι οποίοι έστρεψαν την προσοχή τους στην ακριβολογία και την αυστηρή απόδειξη. Μελετούσαν τα Μαθηματικά ως επιστήμη όπως και την Αστρονομία και τα δίδασκαν στους σπουδαστές των Ακαδημιών, πιστεύοντας ότι προάγουν την καλλιέργεια του νου, όπως την προάγουν η Μουσική, ή η Γυμναστική.

Σημαντικές προσωπικότητες της μαθηματικής επιστήμης ήταν ο Ιππίας ο Ηλείος, ο Ιπποκράτης ο Χίος, ο Δημόκριτος, ο Αρχύτας ο Ταραντίνος, ο Αρχιμήδης που προχώρησαν στην πρακτική εφαρμογή των Μαθηματικών, ενώ πολύ σημαντική για την ανάπτυξη των Μαθηματικών υπήρξε και η συμβολή του Πυθαγόρα και των μαθητών του κατά τον 6^{ο} π.Χ., οι οποίοι πρέσβευαν ότι η «αρχή των πάντων είναι οι αριθμοί» (Κάλφας, 2015β).

Μεταγενέστερα, περίπου το 300 π.Χ., ο Ευκλείδης, θεωρώντας ότι τα Μαθηματικά πρέπει να είναι διαχωρισμένα από την εμπειρική γνώση οδηγήθηκε στη θεμελίωση του πρώτου αξιωματικού συστήματος των Μαθηματικών. Πιο συγκεκριμένα, με το βιβλίο του ‘Στοιχεία’ που το αποτελούσαν 13 τόμοι, ήταν ο πρώτος που τοποθέτησε τη γεωμετρία σε αξιωματική βάση, δημιουργώντας αυτό που γνωρίζουμε σήμερα ως «Ευκλείδεια γεωμετρία» (Κολλινιάτη, 2011).

Αξιοσημείωτο στοιχείο αναφοράς, αποτελεί και το γεγονός ότι σχεδόν όλες οι μέθοδοι απόδειξης (Μέθοδος της Συνεπαγωγής / Συνθετική Μέθοδος/ Αναλυτική Μέθοδος/ Μέθοδος της εις άτοπον Απαγωγής/ Μέθοδος της τέλειας Επαγωγής) που αναπτύχθηκαν στην αρχαία Ελλάδα από φιλοσόφους (π.χ. Αριστοτέλης, Πλάτων) και ύστερα από μαθηματικούς (π.χ. Ευκλείδης, Πυθαγόρας), χρησιμοποιούνται ακόμη και σήμερα (Εξαρχάκος, 2000).

Στη συνέχεια, θα παρουσιάσουμε συνοπτικά τη συμβολή του Πλάτωνα, του Αριστοτέλη και του Ευκλείδη στην ταυτόχρονη ανάπτυξη των δύο αυτών επιστημονικών πεδίων, της Φιλοσοφίας και των Μαθηματικών.

Ο ΠΛΑΤΩΝ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Όταν ο Πλάτων, ο μεγάλος φιλόσοφος του 4ου αι. π.Χ., δημιουργούσε τη φημισμένη Ακαδημία του το 387 π.Χ., φρόντισε με μια επιγραφή σε κεντρικό κτίριο να περάσει ένα σημαντικότατο μήνυμα. Η φράση «Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω», που σημαίνει ότι αν δεν ξέρεις μαθηματικά δεν έχεις καμία ελπίδα να γίνεις φιλόσοφος, εξηγούσε ακριβώς τη στάση που κρατούσε ο αρχαίος φιλόσοφος απέναντι στα μαθηματικά, όπως αποδεικνύεται και από το έργο του, θεωρώντας τα ως μια πύλη στον "κόσμο του Είναι", μια πύλη την οποία πρέπει κανείς να περάσει εάν θέλει να έχει κάποια ελπίδα να μεταβεί στον κόσμο των "Ιδεών". Επίσης, και στο πρόγραμμα εκπαίδευσης που έθετε στους νέους στην Πολιτεία του προϋποτίθενται δέκα χρόνια μελέτης στις μαθηματικές επιστήμες, πριν την ενασχόληση με τη φιλοσοφία.

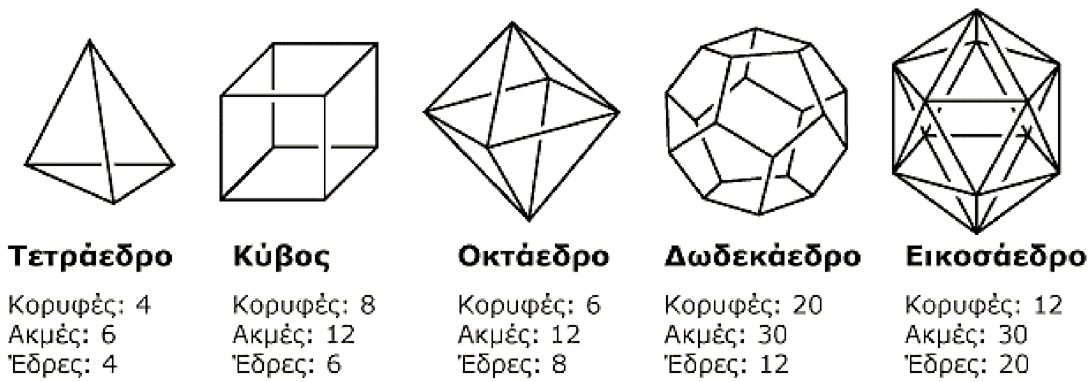
Ο Πλάτων, λοιπόν, που πίστευε στην ύπαρξη του κόσμου των "Ιδεών", θεωρούσε τον άνθρωπο δέσμιο του αισθητού κόσμου και θεωρούσε τα μαθηματικά ως μέσο για να εξυψωθεί το πνεύμα πέρα από τον υλικό κόσμο στον αιώνιο κόσμο του "Είναι" (Κάλφας, 2015β). Ένα παράδειγμα του κόσμου των "Ιδεών" και της σχέσης του με τον φυσικό κόσμο, αποτελεί κατά τον Πλάτωνα η γεωμετρία, αφού τα γεωμετρικά αντικείμενα ως αιώνια και αναλλοίωτα δεν υπάρχουν στον φυσικό κόσμο, κατά συνέπεια βασική προϋπόθεση για την ανακάλυψη του κόσμου των "Ιδεών", ο φιλόσοφος θεωρεί τη μελέτη και χρήση των Μαθηματικών. Για τον Πλάτωνα, λοιπόν, η αποστολή της φιλοσοφίας ήταν να αποκαλύψει την αληθινή γνώση πίσω από το πέπλο της δοξασίας και της φαινομενικότητας, της μεταβλητότητας και της απατηλότητας του προσωρινού κόσμου. Στο έργο τού Πλάτωνα, τα Μαθηματικά είχαν μια κεντρική θέση, επειδή η μαθηματική γνώση ήταν το κύριο υπόδειγμα γνώσης απαλλαγμένης από την εμπειρία των αισθήσεων, γνώσης των αιώνιων και αναγκαίων αληθειών, αν και ο μαθηματικός, για τον Πλάτωνα, δεν εφευρίσκει νέες μαθηματικές αλήθειες. Απλά αυτές υπάρχουν ανεξάρτητα από αυτόν και αναμένουν υπομονετικά τον εξερευνητή τους. Επίσης, ο Πλάτων θεωρούσε τη σπουδή των Μαθηματικών απαραίτητη προϋπόθεση για τη σπουδή της φιλοσοφίας, ενώ η μελέτη των αριθμών και των γεωμετρικών σχημάτων και στερεών ήταν ο καταλληλότερος τρόπος για την

τελική απελευθέρωση της ανθρώπινης σκέψης από τα δεσμά του εφήμερου κόσμου http://axia-logou.blogspot.com/2013/08/blog-post_14.html).

Ειδικότερα, ο Πλάτων υποστήριξε ότι το τρίγωνο είναι ένα βασικό υλικό που πάνω του είναι κατασκευασμένο το σύμπαν, παρουσιάζοντας την ιδέα ότι το σύμπαν δημιουργήθηκε έτσι ώστε

να μοιάζει με μια γεωμετρική ακολουθία. Τα τρίγωνα, σύμφωνα με τον Πλάτωνα, δημιουργούν 5 στερεά, τα οποία ανήκουν στο σύνολο των γεωμετρικών σχημάτων που ονομάζονται πολύεδρα. Πολύεδρο είναι ένα στερεό που οριοθετείται από επίπεδα πολύγωνα και ως κανονικό πολύεδρο θεωρείται αυτό που όλες οι πλευρές του είναι κανονικά πολύγωνα. Μόνο 5 κανονικά στερεά είναι πιθανά: ο κύβος, το τετράεδρο, το οκτάεδρο, το δωδεκάεδρο και το εικοσάεδρο (Αναλυτικότερα, βλ. https://thalesandfriends.org/wp-content/uploads/2012/03/math-yliko1_Part3.pdf).

Παράλληλα, σύμφωνα με την πλατωνική φιλοσοφία ο κόσμος στηρίζεται πάνω σε πέντε βασικά στοιχεία. Αυτά είναι: η φωτιά, ο αέρας, το νερό, η γη και το σύμπαν. Σε κάθε ένα από αυτά τα στοιχεία αντιστοιχεί και ένα κανονικό κυρτό πολύεδρο εγγράψιμο σε μια σφαίρα. Όλες οι έδρες των πολυέδρων αυτών είναι κανονικά πολύγωνα, όλες οι ακμές είναι μεταξύ τους ίσες, όλες οι γωνίες του είναι στερεές και επίπεδες και είναι αντίστοιχα μεταξύ τους ίσες. Δηλαδή το τετράεδρο, το οκτάεδρο και το εικοσάεδρο κατασκευάζονται από ίσα μεταξύ των ισόπλευρα τρίγωνα, το εξάεδρο δηλαδή ο κύβος κατασκευάζεται από ίσα τετράγωνα και το δωδεκάεδρο κατασκευάζεται από ίσα κανονικά πεντάγωνα. Τα πέντε αυτά αποκαλούνται σήμερα “πλατωνικά στερεά”, επειδή ο Πλάτων τα χρησιμοποίησε για την συγκρότηση του υλικού σύμπαντος και ταύτιζε την τελειότητα του κόσμου με την απαράμιλλη ομορφιά των κανονικών αυτών πολυέδρων. Τα πολύεδρα αυτά απεικονίζονται στο σχήμα 1.



Σχήμα 1: Τα “πλατωνικά στερεά”: https://tovivlio.net/κείμενα-για-την-αρχαία-ελληνική-φιλοσ/

Ο Θεαίτητος, μαθηματικός και συνεργάτης του Πλάτωνα στην Ακαδημία, προχώρησε στην κατασκευή αυτών των στερεών και κατά πάσα πιθανότητα είναι αυτός που απέδειξε ότι υπάρχουν ακριβώς πέντε, ενώ την ίδια πρόταση περί μοναδικότητας των στερεών αυτών βρίσκουμε και στον Ευκλείδη (http://photodentro.edu.gr/lor/handle/8521/2098). Ωστόσο η απόδειξη αυτής της μοναδικότητας δε θεωρείται αξιόπιστη, επειδή δε στηρίζεται στα μαθηματικά αλλά μόνο στη φιλοσοφία (Μπερκέτης, 2009).

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ – ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Εξίσου σημαντική με τον Πλάτωνα ήταν και η σχέση του Αριστοτέλη με τα Μαθηματικά, εφόσον αντλούσε γενικά συμπεράσματα με βάση τη μαθηματική πρακτική. Για παράδειγμα, όπως γνωρίζουμε ότι ισχύει για όλα τα τρίγωνα, το άθροισμα των γωνιών των ισοσκελών τριγώνων ισούται με δύο ορθές γωνίες και αυτό είναι δυνατόν να αποδειχθεί. Όμως δεν αρκεί απλώς να φτάσουμε στο σωστό συμπέρασμα· είναι σημαντικό να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα και με το σωστό τρόπο. Έτσι, ο Αριστοτέλης υποστηρίζει ότι «είναι εσφαλμένο να αποδεικνύουμε άμεσα αυτό το συγκεκριμένο συμπέρασμα· αντιθέτως, πρέπει να αποδείξουμε ότι σε όλα τα τρίγωνα το άθροισμα των γωνιών ισούται με δύο ορθές γωνίες, το οποίο συνεπάγεται αυτομάτως ότι το ίδιο ισχύει και για τα ισοσκελή τρίγωνα. Αυτό το παράδειγμα δείχνει ότι οι αποδείξεις πρέπει να είναι όσο το δυνατόν πιο γενικές και ισχυρές, όχι μόνον επειδή έτσι απλοποιείται το έργο

μιας επιστήμης, αλλά και επειδή έτσι τα πράγματα τίθενται στη σωστή σειρά» (McKirahan, 2015:2).

Αντίστοιχα, στη γεωμετρία του Ευκλείδη υπάρχουν τρία είδη βασικών γεγονότων: ορισμοί, αιτήματα και κοινές έννοιες (που ενίοτε αποκαλούνται αξιώματα). Σκοπός των ορισμών είναι να προσδιορίσουν επακριβώς για τι πράγμα μιλάμε. Για παράδειγμα, ο ορισμός του ισοσκελούς τριγώνου ως ενός τριγώνου, το οποίο διαθέτει δύο ίσες πλευρές, αποσαφηνίζει ποια τρίγωνα είναι ισοσκελή, χωρίς, ωστόσο να είναι δυνατό να αποδειχθεί αυτός ο ορισμός, αφού πρόκειται απλώς για ένα βασικό γεγονός. Η γεωμετρία ξεκινά από τέτοια βασικά γεγονότα για να αποδείξει άλλα γεγονότα και υπό την έννοια αυτή ο Αριστοτέλης θεωρούσε τη γεωμετρία πρότυπο για τις άλλες επιστήμες, ιδιαίτερα επειδή η γεωμετρία είχε προοδεύσει εντυπωσιακά χάρη στον τρόπο με τον οποίο αποδείκνυε τα συμπεράσματά της. Οι γεωμέτρες συμφωνούσαν ως προς τις βασικές αρχές, καθώς και ως προς το πώς λειτουργούν οι αποδείξεις και ως προς το ποιες αποδείξεις είναι επιτυχείς. Κατά συνέπεια έπρεπε να συμφωνούν και ως προς τα συμπεράσματα των αποδείξεών τους. Στη γεωμετρία υπήρχε συναίνεση ως προς τα γεγονότα και τις μεθόδους (Αυγερινός και Ζουρούδη, 2016).

Τα «Ἀναλυτικὰ Ὕστερα» του Αριστοτέλη απαιτούν κάθε επιστήμη να διαθέτει, όπως η Ευκλείδεια γεωμετρία, τρία είδη αρχών: *ορισμούς* (όπως και στον Ευκλείδη), *υποθέσεις* (που αντιστοιχούν σε γενικές γραμμές στα Ευκλείδεια αιτήματα) και *κοινές έννοιες ή αξιώματα* (που αντιστοιχούν εν μέρει στα Ευκλείδεια αξιώματα). Προτείνουν επίσης αποδεκτές αποδεικτικές τεχνικές και καθορίζουν ότι όταν γνωρίζουμε κάτι μέσω απόδειξης, γνωρίζουμε όχι μόνον ότι είναι αληθές αλλά και γιατί είναι αληθές. Είναι αληθές επειδή συνάγεται από τα βασικά γεγονότα της επιστήμης, τα οποία δηλώνονται στις αρχές (Αυγερινός και Ζουρούδη, 2016). Άλλες πολύ σημαντικές έννοιες που απαντώνται στην αριστοτελική φιλοσοφία και τα Μαθηματικά είναι οι παρακάτω:

Ο *Συλλογισμός* που κατά τον Αριστοτέλη είναι μια αλληλουχία σκέψεων που μπαίνει σε λειτουργία όταν τεθεί κάποιο ζήτημα, «ένα είδος λόγου, όπου, όταν τεθούν ορισμένα πράγματα, κάτι άλλο από αυτά που έχουν τεθεί ακολουθεί κατ' ανάγκην, εξαιτίας αυτών

ακριβώς που έχουν τεθεί» (Κάλφας, 2015α:41), χωρίς δηλαδή να απαιτούνται επιπρόσθετα εξωτερικά στοιχεία.

Η *Απόδειξη* που είναι η επιστημονική απόδειξη, δηλαδή το περιεχόμενο της επιστημονικής γνώσης (*απόδειξιν δέ λέγω συλλογισμόν επιστημονικόν, επιστημονικόν δε λέγω καθ' ον τω έχειν αυτόν επιστάμεθα)*, σύμφωνα με την οποία εξάγεται ένα συμπέρασμα (Αριστοτέλης, "Αναλυτικά Ύστερα" Α 71b 18-19).

Το *Αξίωμα και οι Θέσεις* τα οποία είναι είδη αποδεικτών αρχών και θεμελιώδεις έννοιες πάνω στις οποίες βασίζεται κάθε επιστήμη σήμερα.

Οι *Υποθέσεις,* οι οποίες είναι οι προτάσεις που βεβαιώνουν την ύπαρξη των θεμελιωδών εννοιών που αναφέρθηκαν παραπάνω, θέτοντας έτσι έναν προβληματισμό προς απόδειξη.

Οι *Ορισμοί* που είναι οι προτάσεις που καθορίζουν αποδεδειγμένα τα στοιχεία της θεμελιώδους έννοιας, έννοιες που χρησιμοποιούνται μέχρι σήμερα στις επιστήμες γενικότερα και στα Μαθηματικά (Αναλυτικά, βλ. Κάλφας, 2015α και Αυγερινός και Ζουρούδη, 2016).

Εκτός, όμως, από τη σχέση Μαθηματικών και Φιλοσοφίας που αναφέρθηκε, ένα εξίσου σημαντικό στοιχείο της σύνδεσης με την αρχαιότητα αλλά και την πυκνότητα και τη σαφήνεια του λόγου αποτελεί η μαθηματική γλώσσα στην οποία θα εστιάσουμε στη συνέχεια.

ΑΡΧΑΙΑ ΚΑΙ ΝΕΑ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΓΛΩΣΣΑ: Η ΣΧΕΣΗ ΤΟΥΣ ΜΕ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τα Μαθηματικά όπως όλες εξάλλου οι επιστήμες έχουν τη δική τους 'γλώσσα', η οποία αποτελείται τόσο από έναν πολύ ειδικό τρόπο σύνταξης των προτάσεων όσο και από ένα ιδιαίτερο λεξιλόγιο, ένα 'ιδιόλεκτο' που διακρίνει τα κείμενα των Μαθηματικών από άλλα γενικής φύσης κείμενα. «Πρόκειται στην ουσία για σημασιολογικά, δομικά χαρακτηριστικά (σύνταξη, δομή των προτάσεων), πραγματολογικά χαρακτηριστικά και χαρακτηριστικά του λόγου που κάνουν τη γλώσσα των μαθηματικών να διακρίνεται από τη φυσική, καθημερινή γλώσσα» (Halliday, 2000: 27).

Πιο συγκεκριμένα: Το λεξιλόγιο περιλαμβάνει ειδικές λέξεις, όπως *αριθμητής, παρονομαστής, διάνυσμα, εξίσωση* καθώς και ονοματικές φράσεις, όπως *μέγιστος κοινός διαιρέτης*, *ελάχιστο*

κοινό πολλαπλάσιο, τετραγωνική ρίζα, κλασματικές αλγεβρικές παραστάσεις, δευτεροβάθμια εξίσωση, εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες, εντός εναλλάξ γωνίες. Εκτός τούτων, η φυσική γλώσσα που χρησιμοποιείται στην καθημερινότητα, το καθημερινό λεξιλόγιο αποκτά διαφορετικό περιεχόμενο στα Μαθηματικά. Έτσι, τις λέξεις *ίσος, όμοιος, περίοδος, υπερβολή, ταυτότητες,* εάν τις εξετάσουμε στο πλαίσιο του σχολείου, πρέπει να τις μάθουν οι μαθητές/τριες σε ένα διαφορετικό πλαίσιο, εφόσον πλέον αποκτούν διαφορετικό νόημα. Ταυτόχρονα, στις δυσκολίες του λεξιλογίου περιλαμβάνονται και οι πολλαπλοί τρόποι με τους οποίους καταδεικνύεται η ίδια μαθηματική λειτουργία. Η πρόσθεση γλωσσικά εκφράζεται με λέξεις όπως *προσθέτω, και, βάζω, συν,* και το αποτέλεσμα της πρόσθεσης γλωσσικά εκφράζεται ως *άθροισμα, ίσον, «κάνει»*. Κάτι ανάλογο ισχύει και για τις άλλες μαθηματικές πράξεις. Ακόμη, η γλώσσα των Μαθηματικών περιλαμβάνει ειδικές συντακτικές δομές και ειδικούς τρόπους γλωσσικής έκφρασης, όπως για παράδειγμα *όλοι οι αριθμοί μεγαλύτεροι του 0, τόσο όσο, ν φορές επί τόσο, στη νιοστή, τριγωνομετρικοί αριθμοί συμπληρωματικών γωνιών, συντεταγμένες αντίθετων διανυσμάτων.* Παρατηρούμε επίσης μεγαλύτερη συχνότητα χρήσης γλωσσικών τύπων όπως είναι η παθητική φωνή: το *10 διαιρείται από το 2,* το *χ θεωρείται ίσο με το 0, προστίθεται, αφαιρείται, ισούται* καθώς και χρήση επιρρημάτων ή συμπερασματικών εκφράσεων, όπως *επομένως, έτσι ώστε.* Σε όλα τα παραπάνω θα χρειαστεί να προστεθεί ότι στα χαρακτηριστικά του μαθηματικού λόγου είναι και η ελλειπτικότητα, αφού πολύ συχνά από τις προτάσεις απουσιάζουν τα ρήματα, όπως για παράδειγμα, γ*ια κάθε αριθμό μεγαλύτερο του 0*, *εάν ν διάφορο του 0* ή άλλες παρόμοιες.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό της συντακτικής δομής της μαθηματικής γλώσσας είναι η συχνή χρήση «λογικών συνδέσεων» (logical connectors) (Ζάγκα, 2014), που αποτελούν μια γλωσσική επινόηση η οποία στα μαθηματικά κείμενα χρησιμοποιείται για να αναπτύξει και να συνδέσει αφηρημένες έννοιες και ιδέες, όπως: *Εάν, τότε και μόνο τότε, εφόσον*, *συνεπακόλουθα, συνεπάγεται, Εάν είχαμε, και επειδή, Τότε, Εάν, τότε, Έστω Επομένως.* Στην ουσία πρόκειται για λέξεις και φράσεις που επισημαίνουν τη λογική σχέση που υπάρχει ανάμεσα σε δύο ή περισσότερες γλωσσικές δομές. Πρωταρχικά υπηρετούν μια σημασιολογική λειτουργία που συνδέει και καταδεικνύει τη φύση της σχέσης ανάμεσα στα τμήματα ενός κειμένου, ώστε όταν διαβάζουμε μαθηματικά κείμενα, να είμαστε σε θέση να αναγνωρίσουμε τη λογική ακολουθία, να αντιλαμβανόμαστε δηλαδή εάν τονίζεται η ομοιότητα, η αντίθεση, η αιτία ή το αποτέλεσμα. Οι λογικές αυτές συνδέσεις μπορεί να είναι ταυτόχρονα λέξεις ή σύμβολα: για παράδειγμα χρειάζεται να γνωρίζουμε το σύμβολο της συνεπαγωγής, αλλά και να γνωρίζουμε τι σημαίνει η λέξη *συνεπάγεται* (Ζάγκα, 2014).

Στο επίπεδο πάνω από το λεξιλόγιο και τη σύνταξη, στο επίπεδο του λόγου, η μαθηματική γλώσσα έχει ιδιαίτερα χαρακτηριστικά. Έτσι, στον μαθηματικό λόγο υπάρχουν μεγάλα τμήματα της γλώσσας – προτάσεις ή ομάδες προτάσεων και παραγράφων – που λειτουργούν μαζί ως κειμενικές ενότητες με ιδιαίτερο νόημα και σκοπό, όπως στη σχέση: *«Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων σχημάτων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου της ομοιότητας»* (Αργυράκης κ.ά., 2000: 182).

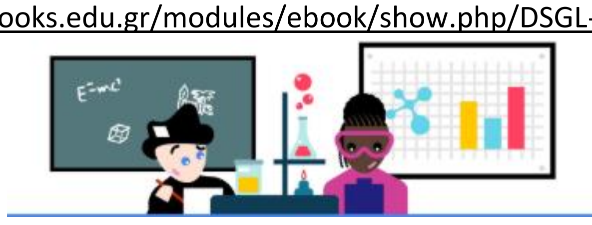
Η ίδια ελλειπτικότητα και πύκνωση παρατηρείται και κατά τη διατύπωση μαθηματικών προβλημάτων, όπως είναι το παρακάτω: «Τα έξοδα για τα τρόφιμα καταλαμβάνουν το 26% των εσόδων μιας μέσης οικογένειας. Η οικογένεια κερδίζει 700 ευρώ το μήνα. Πόσο ξοδεύει για τρόφιμα;» (Κασσώτη, 2012: 46).

Επίσης, ο λόγος των Μαθηματικών έχει μεγάλη περιεκτικότητα σε συμβολικές απεικονίσεις, όπως είναι οι πίνακες και οι γραφικές παραστάσεις, καθώς και νοητική συμπύκνωση και ελλειπτικότητα στον λόγο που απαιτούν:

α. Προσαρμοσμένο ρυθμό ανάγνωσης, διότι πρέπει να διαβαστούν πιο αργά από ότι τα κανονικά γλωσσικά κείμενα και

β. Μετακίνηση του ματιού πάνω και κάτω, δεξιά και αριστερά, σε μια ποικιλία από κατευθύνσεις κατά την ανάγνωση π. χ. 30/6, 30-6, 6 √ 2 κτλ. (Ζάγκα, 2014).

Επιπρόσθετα, ένας μεγάλος αριθμός λέξεων προέρχεται απευθείας από την αρχαία ελληνική γλώσσα και επιβιώνει αυτούσιος στη μαθηματική γλώσσα, όπως: *συνιστώσα, διχοτόμος, συντεταγμένες, συνισταμένη, έστω ότι, υποτείνουσα, τεμνόμενες ευθείες, συναρτήσει του χ, γνησίως αύξουσα / φθίνουσα, πόρισμα, εντός εναλλάξ, εντός εκτός και επί τα αυτά,* κ.ά., διατηρώντας μάλιστα και την ίδια σημασία (αξίωμα, απόδειξη, επαγωγή, συνεπαγωγή κ.ά.). (Ενδεικτικά: http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-A100/489/3185,12906).



Όλα τα παραπάνω, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι τα Μαθηματικά αποτελούν την πιο αφηρημένη επιστήμη από όλες (Κάλφας, 2015β), γεγονός που εκφράζεται και μέσω της πυκνότητας της γλώσσας, της ελλειπτικότητας και της αφαίρεσης, αλλά και της επιβίωσης λόγιων τύπων καθιστούν το επιστημονικό αντικείμενο αυτό, περισσότερο ίσως από κάθε άλλο άμεσα συνδεδεμένο με την αρχαιότητα, όπως αυτή εκφράζεται μέσω της Φιλοσοφίας ή και μέσω της Γλώσσας.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Όσον αφορά τη σχέση μεταξύ Μαθηματικών και Φιλοσοφίας τα βασικά σημεία που εξετάσαμε συνοψίζονται στα εξής: Φιλοσοφία και Μαθηματικά είναι δύο επιστήμες που αναπτύσσονται ταυτόχρονα και παρά τη φαινομενική διαφορετικότητά τους αλληλοσυμπληρώνονται και στηρίζουν η μια την άλλη, έτσι ώστε να εξελιχθούν στο πέρασμα των αιώνων. Τα πρακτικά στοιχεία των Μαθηματικών συμβάλλουν στην εξέλιξη της Φιλοσοφίας και αντίστοιχα η θεωρητική φύση της Φιλοσοφίας αποτελεί πηγή έμπνευσης και πλαισίωσης των μαθηματικών εννοιών. Έχοντας κοινή βάση και εφαρμόζοντας τους ίδιους κανόνες, οι δύο επιστήμες συμπλέουν αρμονικά. Η κοινή αυτή βάση, ο σημαντικότερος συνδετικός κρίκος μεταξύ των δυο επιστημών είναι η έννοια της λογικής - η λογική της απόδειξης, της πλήρους τεκμηρίωσης κάθε δεδομένου. Τα λογικά βήματα που ακολουθούνται, είναι σε μεγάλο βαθμό τα ίδια.

Επίσης, πρόκειται για δύο επιστήμες, οι οποίες βασίζονται κυρίως στην αφαίρεση και την πύκνωση – όπως αποδεικνύεται και από τα χαρακτηριστικά του ιδιόλεκτου των Μαθηματικών– όπου η ορθολογικότητα παίζει έναν πολύ σημαντικό ρόλο. Ταυτόχρονα, η αναζήτηση της αλήθειας διαμέσου της επιστημονικής έρευνας αναπόφευκτα γεννά όλο και πιο βαθιά και πολυσύνθετα ερωτήματα, που με την σειρά τους οδηγούν στην τάση για μια ενοποιημένη αντιμετώπισή τους.

Άλλωστε, κάθε μαθηματική ανακάλυψη αποτελεί αντικείμενο φιλοσοφικών αναζητήσεων. Κάθε μαθηματικό μοντέλο χρειάζεται τη συμβολή της Φιλοσοφίας ώστε να αναδειχθεί και να μετατραπεί σε πρακτική εφαρμογή μέσα στη κοινωνία. Με την ίδια λογική, κάθε φιλοσοφική ρήση αποτελεί πηγή ιδεών για τους θετικούς επιστήμονες, δίνοντας τους την ευκαιρία να ανακαλύψουν νέες πτυχές του αντικειμένου τους και να οδηγηθούν σε περαιτέρω εμβάθυνση στο πεδίο. Και ίσως αυτός τελικά ο συνδυασμός θεωρητικών και θετικών επιστημών είναι η απάντηση σε μια κοινωνία που αποκτά ολοένα και περισσότερο τεχνοκρατικά και μονοδιάστατα χαρακτηριστικά.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Αργυράκης, Δ., Βουργάνας, Π, Μεντής, Κ., Τσικοπούλου, Σ., & Χρυσοβέργης Μ., (2000). *Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου*, Αθήνα: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

[2] Αριστοτέλης. (1994). *Όργανον 5: Αναλυτικών Υστέρων Α, Β* (Τόμ. 27). (μτφρ. Η. Νικολούδης), Αθήνα: Κάκτος.

[3] Αυγερινός, Ε., & Ζουρούδη, Τ. (2016). Μια θεώρηση της παλιάς Γεωμετρίας σε σχέση με άλλες Γεωμετρίες. Μια ιστορική αναδρομή. *Αδημοσίευτη πτυχιακή εργασία*. Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Πανεπιστημίου Αιγαίου. Ανακτήθηκε στις 18/4/2018 από http://hellanicus.lib.aegean.gr/bitstream/handle/WORD.pdf?sequence=5&isAllowed=y

[4] Εξαρχάκος, Θ. (2000). Η Αρχαία Ελλάδα κοιτίδα της μαθηματικής σκέψης. *Πρακτικά 17ου Πανελλήνιου Μαθηματικού Συνεδρίου, με θέμα: 'Τα Μαθηματικά κλειδί ανάπτυξης',* που πραγματοποιήθηκε στην Αθήνα, Ανακτήθηκε στις 4/4/2018 από http://www.hms.gr/apothema/?s=scf&i=17

[5] Ζάγκα, Ε. (2014). *Η διδασκαλία της γλώσσας με βάση το περιεχόμενο*: *Από τη θεωρία στην πράξη*, Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Βάνιας.

[6] Halliday, M.A.K. and Martin, J.R. (2000). *Η γλώσσα της επιστήμης*, Αθήνα: Εκδόσεις Μεταίχμιο.

[7] Κάλφας, Β., (2015α). *Η φιλοσοφία του Αριστοτέλη*, ψηφιακή έκδοση, Ανακτήθηκε στις 29/5/2018 από https://repository.kallipos.gr/handle/11419/683

[8] Κάλφας, Β., (2015β). *Η Εγκυκλοπαίδεια του Πλάτωνα*, επιμ. Β. Κάλφας, Ίδρυμα Μείζονος Ελληνισμού, Ανακτήθηκε στις 29/5/2018 από http://n1.xtek.gr/ime/lyceum

[9] Κασσώτη Ο., Κλιάπης, Π. και Οικονόμου, Θ. (2012). *Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού,* Αθήνα: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

[10] Κολλινιάτη Γ. (2011). Ο Κονστρουκτιβισμός ως θεωρία της Διδακτικής των Μαθηματικών σε αντίθεση με το μαθηματικό ρεαλισμό (Πλατωνισμό). Αδημοσίευτη *μεταπτυχιακή εργασία*, Διαπανεπιστημιακό - Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών. Ανακτήθηκε στις 2/4/2018 από http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_Kolliniati%20Georgia.pdf.

Open Schools Journal
for Open Science

[10] McKirahan, R. (2015). Ο Αριστοτέλης και τα Μαθηματικά, Ανακτήθηκε στις 17/5/2018 από http://www.dikam.auth.gr/sites/default/files/attachements/RICHARD-MCKIRAHAN_0.pdf .

[11] Μπερκέτης, Ν. (2009). Η επιρροή των Μαθηματικών στη φιλοσοφική εξέλιξη του Πλάτωνα για παιδεία και Σύμπαν, Ανακτήθηκε στις 14/5/2018 από http://2lyk-ymitt.att.sch.gr/mfilos2012.pdf.

ΠΗΓΕΣ

http://photodentro.edu.gr/lor/handle/8521/2098

https://tovivlio.net/κείμενα-για-την-αρχαία-ελληνική-φιλοσ/

http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-A100/489/3185,12906

https://thalesandfriends.org/wp-content/uploads/2012/03/math-yliko1_Part3.pdf)

http://axia-logou.blogspot.com/2013/08/blog-post_14.html