Open Schools Journal for Open Science

Vol 3, No 6 (2020)

Ο αριθμός π=3,14

Αναστασία Αντύπα, Κώστας Πιτσούνης

doi: [10.12681/osj.24311](https://doi.org/10.12681/osj.24311)

Open Schools Journal
for Open Science

Ο αριθμός π=3,14

Αναστασία Αντύπα[1], Κώστας Πιτσούνης[2]

[1]1ο Γυμνάσιο Γλυκών Νερών, Αθήνα, Ελλάδα

[2]Μαθηματικός, 1ο Γυμνάσιο Γλυκών Νερών, Αθήνα, Ελλάδα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο λόγος της περιφέρειας του κύκλου προς την διάμετρό του ονομάζεται π. Ο υπολογισμός της τιμής του απασχολεί χιλιάδες χρόνια την ανθρωπότητα από τον Πυθαγόρα έως τον Αρχιμήδη και από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα. Όλοι οι κύκλοι ανεξαρτήτου διαμέτρου έχουν το ίδιο π και αυτό ισούται κατά προσέγγιση με 3,14. Άλλοι επιστήμονες πάλι ορίζουν τη σταθερά pi ως τον αριθμό που το γινόμενο του με τη διάμετρο, συμπίπτει με την πλήρη στροφή που κάνει ένας κύκλος για να κυλίσει πάνω σε μια ευθεία γραμμή. Με αρκετές στρογγυλοποιήσεις, το *π* ισούται με 3,14 όμως στην πραγματικότητα τα δεκαδικά του ψηφία είναι άπειρα και οι μαθηματικοί και όλοι όσοι έχουν ασχοληθεί με την αναζήτησή τους, δεν έχουν εμφανίσει παρά μόνο ένα μέρος από αυτά.

Λέξεις κλειδιά:

σταθερά π, κύκλος, διάμετρος, Όιλερ, Αρχιμήδης

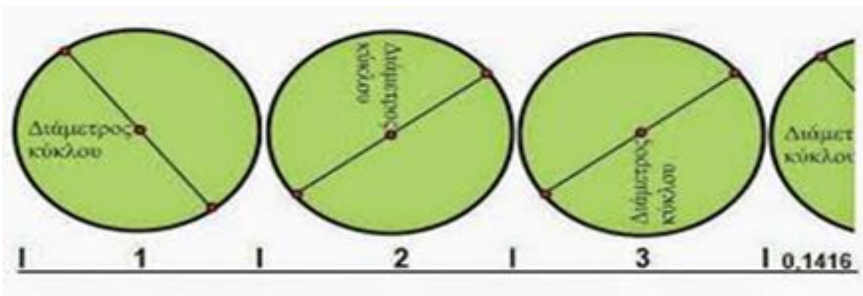
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το π, σύμφωνα με τον Ουίλιαμ Λ. Σαφ, «*περικλείει τόσο μυστήριο, ρομαντισμό, παρανόηση και ανθρώπινο ενδιαφέρον όσο κανένα άλλο μαθηματικό σύμβολο*». (Nature and History of π).

Αν και η πατρότητα του συμβόλου π αποδίδεται στον Ουίλιαμ Τζόουνς, εκείνος που καθιέρωσε το σύμβολο π και το μετέδωσε στην μαθηματική κοινότητα της εποχής ήταν ο Λέοναρντ Όιλερ.

Τι ακριβώς είναι λοιπόν το π, και γιατί γίνεται τόσος λόγος για αυτό;

Αφήστε μία ρόδα διαμέτρου 1 m να ρολάρει στην άμμο μέχρι να κάνει μια περιστροφή και μετρήστε το αποτύπωμα με όση μεγαλύτερη ακρίβεια μπορείτε.



Σχήμα 1ο: Αναπαράσταση ενός τρόπου υπολογισμού του π.

Εναλλακτικά χρησιμοποιώντας ένα κονσερβοκούτι και ένα κομάτι σπάγκο, μπορείτε να διαπιστώσετε πως η περίμετρος ενός κύκλου είναι λίγο μεγαλύτερη από το τριπλάσιο της διαμέτρου του. Λίγο; Πόσο λίγο; Τα προβλήματα αρχίζουν ακριβώς την στιγμή που θα αποφασίσουμε να προσδιορίσουμε με ακρίβεια αυτό το λίγο…

Τα πρώτα 5000 ψηφία του π (δυστυχώς χωρίς μνημονικό κανόνα)

Σχήμα 2ο: τα πρώτα 5000 ψηφία του π

Δύο Αμερικανοί μαθηματικοί υπολόγισαν ότι το π έχει 1.120 ψηφία το 1949 με μια αριθμομηχανή γραφείου. Επί του παρόντος, έχουν προσδιοριστεί 22,5 τρισεκατομμύρια δεκαδικά ψηφία (Μάρτιος 2017), κάτι που δεν έχει ουσιαστικά κάποια πρακτική σημασία αφού ακόμη και η NASA για την διαπλανητική

πλοήγηση των διαστημοπλοίων της, χρησιμοποιεί τα 15 πρώτα δεκαδικά ψηφία του π: **3.141592653589793.** Έχουν φτιαχτεί διάφοροι μνημονικοί κανόνες σε πολλές γλώσσες για να θυμόμαστε όσο το δυνατόν περισσότερα ψηφία. Στα ελληνικά αρκετά γνωστό είναι το παρακάτω τετράστιχο το όποιο μας δίνει τα πρώτα 23 ψηφία:

Αεί ο Θεός ο μέγας γεωμετρεί
το κύκλου μήκος ίνα ορίσει διαμέτρω
παρήγαγεν αριθμόν απέραντον
και ον φευ! ουδέποτε όλον θνητοί θα εύρωσι
3,14159265358979323846626

«*Το π δεν είναι απλώς μια συλλογή από τυχαία ψηφία. Το π είναι ένα ταξίδι, μία εμπειρία όπου αν δεν προσπαθήσεις να διακρίνεις την ποιητική φύση του π, θα σου φανεί πολύ δύσκολο να το μάθεις*».

-Άντρανιγκ Μπάσμαν

ΤΟ ΕΥΛΟΓΟ ΕΡΩΤΗΜΑ ΜΑΘΗΤΗ

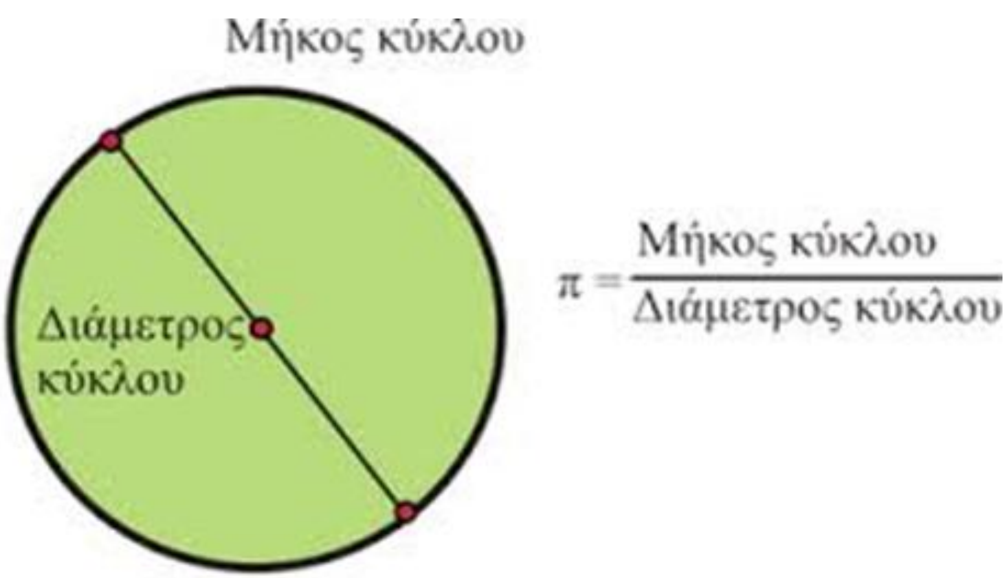
Ένας μαθητής της Β Γυμνασίου πληροφορούμενος πως ο «π» είναι άρρητος, μπορεί να διατυπώσει στον καθηγητή του την εξής απορία: «πώς συμβαίνει ο «π» να είναι άρρητος και ταυτόχρονα να ισούται με το πηλίκο L/δ όπου L το μήκος του κύκλου και δ το μήκος της διαμέτρου που είναι και οι δύο ρητοί;» Η απάντηση είναι απλή για έναν μαθητή Λυκείου θετικής κατεύθυνσης, αλλά δυσνόητη για έναν μαθητή Β γυμνασίου. Στην πραγματικότητα το μήκος ενός κύκλου είναι επίσης άρρητος και προκύπτει μέσω διαδοχικών προσεγγίσεων χρησιμοποιώντας την ακολουθία των μηκών των εγγεγραμμένων και περιεγραμμένων στον κύκλο πολυγώνων. Για παράδειγμα αν διαιρέσουμε την περίμετρο ενός 200γωνου εγγεγραμμένου σε κύκλο με την διάμετρο του κύκλου έχουμε μια πολύ καλή προσέγγιση του «π».

Με αφετηρία αυτή την απορία, θα προσπαθήσω να ερμηνεύσω την απεραντοσύνη των δεκαδικών ψηφίων του π.

Παρουσιάζει μεγάλο ιστορικό αλλά και μαθηματικό ενδιαφέρον μια αναδρομή στην ενασχόληση του ανθρώπου με τον κύκλο και την τιμή του π. Ας την επιχειρήσουμε ανατρέχοντας ταυτόχρονα σε μερικές από τις σημαντικότερες μορφές της μαθηματικής επιστήμης.

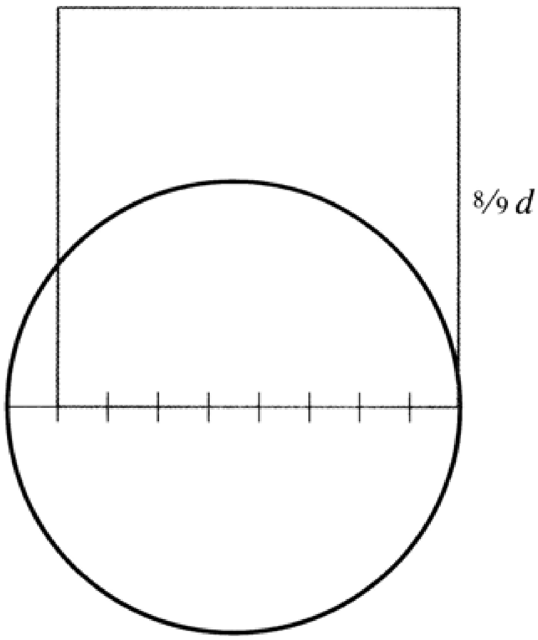
ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Ο υπολογισμός του π είναι ουσιαστικά το μόνο από τα παλαιότερα μαθηματικά ζητήματα που απασχολεί ακόμη σοβαρά τη σύγχρονη μαθηματική έρευνα. (Pi: A Source Book).



Σχήμα 3ο: αναπαράσταση του υπολογισμού του π

Open Schools Journal
for Open Science



Η αρχαιότερη γνωστή καταχώριση της αναλογίας του π έγινε από έναν Αιγύπτιο γραφέα, τον Αχμές, γύρω στο 1650π.Χ., πάνω στον πάπυρο που σήμερα ονομάζεται Πάπυρος Ριντ και βρίσκεται στο Βρετανικό Μουσείο στο Λονδίνο. Ο Αχμές έγραφε: «Κόψτε το 1/9 της διαμέτρου και σχηματίστε ένα τετράγωνο με βάση το υπόλοιπο έτσι ώστε το τετράγωνο αυτό έχει το ίδιο εμβαδόν με τον κύκλο». Για να καταλάβουμε τον συλλογισμό του Αχμές ας θεωρήσουμε έναν κύκλο διαμέτρου 1 οπότε η ακτίνα είναι 0,5. Τότε το εμβαδόν του τετραγώνου του σχήματος θα

Σχήμα 4ο: Ο συλλογισμός του Αχμές.

είναι 0,7901 και αν αυτό συμπίπτει με το εμβαδό του κύκλου διαιρώντας με 0,25 παίρνουμε π=3,16. Οι τύποι στον Πάπυρο Ριντ αποτελούν επίσης την πρώτη καταγεγραμμένη απόπειρα

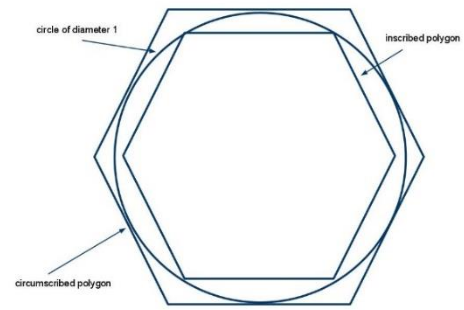
«τετραγωνισμού του κύκλου» να κατασκευαστεί δηλαδή ένα τετράγωνο με εμβαδό ίσο με εκείνο δοσμένου κύκλου.

Περίπου 1200 χρόνια μετά τον Αχμές, ο Αντιφών και ο Βρύσων από την Ηράκλεια, και οι δύο σύγχρονοι του Σωκράτη, σκέφθηκαν κάτι πολύ έξυπνο και πρωτοποριακό για την εποχή εκείνη. Ο Αντιφών υπολόγισε το εμβαδό ενός εγγεγραμμένου σε κύκλο πολυγώνου και διπλασιάζοντας κάθε φορά τις πλευρές, οδηγήθηκε σε πολύγωνα που κάλυπταν σχεδόν όλη την επιφάνεια του κύκλου. Αργότερα ο Βρύσων έκανε την ιδιοφυή κίνηση, να υπολογίσει τα εμβαδά δύο πολυγώνων, ενός εγγεγραμμένου και ενός περιγεγραμμένου σε κύκλο και υπέθεσε σωστά πως το ζητούμενο εμβαδό είναι μια ενδιάμεση τιμή!

Διακόσια περίπου χρόνια μετά, ο Αρχιμήδης (287 – 212 π.Χ.) ακολούθησε την ίδια μέθοδο, επικεντρώνοντας τους υπολογισμούς του στις περιμέτρους των δύο πολυγώνων. Διπλασίασε τις

Open Schools Journal
for Open Science

πλευρές δύο εξάγωνων τέσσερις φορές καταλήγοντας σε δύο 96γωνα και υπολόγισε τις περιμέτρους τους. Έτσι βρήκε κατά προσέγγιση το μήκος του κύκλου. Με τον τρόπο αυτό οδηγούμαστε στην τιμή π=3,1419. Ο Αρχιμήδης δημοσίευσε τους υπολογισμούς του στο βιβλίο «Κύκλου Μέτρηση».



Σχήμα 5ο: Η μέθοδος του Αρχιμήδη

Θα χρειαστεί να φτάσουμε στην Κίνα και στον 5ο αιώνα, ώστε να έχουμε μια ακριβέστερη τιμή του π. Εκεί θα βρούμε τον αστρονόμο Τσου Τσ’ουνγκ-τσιχ και τον γιο του Τσου Κενγκ-τσιχ. Οι δυο τους χρησιμοποιώντας εγγεγραμμένα πολύγωνα με 24576 πλευρές (πιθανόν να ξεκίνησαν με ένα εξάγωνο και διπλασίασαν τον αριθμό των πλευρών 12 φορές) κατέληξαν στο συμπέρασμα πως το π είναι περίπου 3,1415929. Θα περάσουν περισσότερα από χίλια χρόνια για να υπολογιστεί το π με μεγαλύτερη ακρίβεια. Στο μεταξύ για αιώνες οι μηχανικοί και άλλοι επιστήμονες αρκούνταν στην τιμή π=3.

Το 1655 ένας Άγγλος μαθηματικός και κρυπτογράφος, ο Τζον Ουόλις, κατάφερε με επίπονη προσπάθεια να διατυπώσει τον τύπο που φέρει σήμερα το όνομα του.

Ο τύπος του Τζον Ουόλις

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\times 2\times 4\times 4\times 6\times 6\times 8\ldots}{1\times 3\times 3\times 5\times 5\times 7\times 7\ldots}$$

Το 1675 ο Σκωτσέζος Τζέιμς Γκρέγκορι βρήκε μια απλή και έξυπνη λύση για να υπολογίσει τα τόξα των εφαπτομένων. Τόξο εφαπτομένης είναι η γωνία σε ακτίνια που έχει εφαπτομένη ίση με δοσμένο αριθμό. Για παράδειγμα το τοξεφ1=π/4. Ακολουθεί ο τύπος του Γκρέγκορι.

Η σειρά του Γκρέγκορι

$$\text{τοξεφ} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} \ldots$$

Αντικαθιστώντας απλώς το x με τον αριθμό 1 στη σειρά έχουμε: π/4=1-1/3+1/5-1/7+1/9-1/11…
Το 1665, ενώ η πανώλη σάρωνε το Λονδίνο ο Ισαάκ Νεύτων κατέφυγε στο Γούλσθροπ. Εκεί μεταξύ των άλλων ασχολήθηκε με τον υπολογισμό του π. Το πιο κάτω άθροισμα των απείρων όρων μιας ακολουθίας αποδίδεται στον μεγάλο Άγγλο στοχαστή.

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3\times 2^3}\right)+\frac{1\times 3}{2\times 4}\left(\frac{1}{5\times 2^5}\right)+\frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}\left(\frac{1}{7\times 2^7}\right)+\dots$$

Ο Λέοναρντ Όιλερ γεννήθηκε στην Ελβετία το 1707. Στα τριάντα του χρόνια ήταν τυφλός από το ένα μάτι. Στα εξήντα πέντε είχε χάσει εντελώς την όρασή του. Ωστόσο συνέχισε να εργάζεται , υπαγορεύοντας σε βοηθούς. Οι πιο κάτω τύποι αποδίδονται στο Όιλερ.

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots$$

$$\frac{\pi}{4}=5\,\text{τοξεφ}\left(\frac{1}{7}\right)+2\,\text{τοξεφ}\left(\frac{3}{79}\right)$$

$$\frac{\pi}{4}=2\ \text{τοξεφ}\ \left(\frac{1}{3}\right)+\ \text{τοξεφ}\ \left(\frac{1}{7}\right)$$

Μέχρι τα τέλη του 19^{ου} αιώνα είχαν υπολογιστεί τα 100 πρώτα ψηφία του π με χρήση δυναμοσειρών και της συνάρτησης τοξεφ.

Open Schools Journal for Open Science

Η ΑΡΡΗΤΟΤΗΤΑ ΚΑΙ Η ΥΠΕΡΒΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΟΥ π.

Από την εποχή ήδη του Όιλερ, υπήρχε η υποψία πως υπήρχαν άρρητοι που δεν θα μπορούσαν να αποτελούν λύση εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές. Οι αριθμοί αυτοί χαρακτηρίστηκαν υπερβατικοί. Ο ***Johann Heinrich Lambert*** απέδειξε την αρρητότητα του π το 1767. Το 1882 ο ***F. Lindemann*** απέδειξε την υπερβατικότητα του π.

ΤΑ ΣΥΓΧΡΟΝΑ ΜΕΣΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΟΥ π

Το πέρασμα από τη χειρόγραφη μέθοδο υπολογισμού του π, στον υπολογισμό μέσω μηχανικών, ηλεκτρομηχανικών και τέλος ηλεκτρονικών υπολογιστών σηματοδότησε μια νέα εποχή. Εκτός της πολλαπλάσιας ταχύτητας και αντοχής, τα υπολογιστικά εργαλεία δεν έκαναν εύκολα λάθος. Μέχρι τον Σεπτέμβριο του 1947 είχαν βρεθεί 808 ψηφία του π και τον χειμώνα του 1948, προσδιορίστηκε το 1000στό ψηφίο. Ο αμερικανικής κατασκευής ENIAC με τις 19000 λυχνίες υπό τις οδηγίες της ομάδας του Τζον φον Νόιμαν υπολόγισε το 1948 2037 ψηφία του π. Το 1961 οι Τζον Ρεντς και Ντάνιελ Σανκς έγιναν διάσημοι επειδή ξεπέρασαν τα 100000 δεκαδικά ψηφία του π, με τη βοήθεια ενός IBM 7090 στο Κέντρο Επεξεργασίας Πληροφοριών στη Νέα Υόρκη.
Χρησιμοποίησαν μια εξίσωση από το 1896: π=24τοξεφ(1/8)+8τοξεφ(1/57)+4τοξεφ(1/239). Το 1973 στο Παρίσι ο Ζαν Γκιγιού και ο Μ. Μπουγιέ υπολόγισαν ένα εκατομμύριο ψηφία του π σε 23 ώρες χρησιμοποιώντας ένα CDC 7600.

Σημαντικοί σταθμοί προσδιορισμού του π εκτός εκείνων που αναφέρθηκαν

- Το 2000 π.Χ. Οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποιούν την τιμή π=3 1/8.
- 2ος αι. μ.Χ. Ο Κλαύδιος ο Πτολεμαίος χρησιμοποιεί την τιμή π=377/120=3,14166
- 1220 μ.Χ. Ο Λεονάρντο Πιζάνο Φιμπονάτσι βρίσκει πως π=3,141818…
- Το 1593. Ο Φρανσουά Βιετ βρίσκει το πρώτο άπειρο γινόμενο περιγραφής του π.
- Το 1596 ο Λούντολφ φαν Σόιλεν υπολογίζει 32 ψηφία του π και το 1610 35 δεκαδικά ψηφία.
- Το 1674 ο Γκότφριντ Βίλχελμ φον Λάιμπνιτς ανακαλύπτει την δυναμοσειρά τόξου εφαπτομένης για το π.

- Το 1706 ο Ουίλιαμ Τζόουνς χρησιμοποίησε για πρώτη φορά το π με την σύγχρονη έννοιά του στο έργο του Synopsis Palmariorum Mathescos.
- Το 1746 ο Λέοναρντ Όιλερ δημοσιεύει το Introductio in Analysin Infinitorum, που περιλαμβάνει το γνωστό θεώρημα του και πολλές δυναμοσειρές για το π και το π^2.
- Το 1761 ο Γιόχαν Χάινριχ Λάμπερτ αποδεικνύει ότι το π είναι άρρητος.
- Το 1775 ο Όιλερ εισηγείται ότι το π είναι υπερβατικός αριθμός.
- Το 1855 ο Ρίχτερ υπολογίζει 500 δεκαδικά ψηφία του π.
- Το 1947 ο Φέργκιουσον υπολογίζει 808 ψηφία, χρησιμοποιώντας έναν επιτραπέζιο υπολογιστή.
- Το 1996 οι αδελφοί Τσουντόφσκι υπολογίζουν πάνω από 8 δισεκατομμύρια ψηφία.
- Το 1997 ο Κάναντα και ο Τακαχάσι υπολόγισαν 51,5 δισεκατομμύρια ψηφία με ένα Hitachi SR2201 σε λιγότερο από 29 ώρες.
- Το Νοέμβριο του 2016 ο χομπίστας των μαθηματικών **Πέτερ Τρούεμπ** στην Ελβετία ολοκλήρωσε τον υπολογισμό 22.459.157.718.361 πλήρως επιβεβαιωμένων ψηφίων, περίπου 9 τρισεκατομμυρίων περισσότερων από ό,τι στο προηγούμενο ρεκόρ το 2013.

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΕΣ

Στο μυαλό ενός ευφάνταστου ερευνητή θα μπορούσε να γεννηθεί το ερώτημα: «Μήπως αυτή η ατέλειωτη, φαινομενικά τυχαία σειρά αριθμών μεταφέρει κάποιο μήνυμα από το παρελθόν; Μήπως εμπεριέχει κάποιο κώδικα που ακόμη δεν ανακαλύψαμε;». Στο σημείο αυτό πιάνουν δουλειά οι στατιστικολόγοι. Στο "The Magic of Pi" διαβάζουμε: Αφού ο κύκλος έχει 360 μοίρες και το π έχει στενή σχέση με τον κύκλο, εξετάζουμε με αγωνία το 360ό ψηφίο. Για άλλη μια φορά η ανταμοιβή μας είναι αξιοσημείωτη. Παρατηρούμε πως εμφανίζεται ο αριθμός 360 γύρω από το 360ό ψηφίο. Ακόμη το $7^{ο}$ το $22^{ο}$ το $113^{ο}$ και το $355^{ο}$ ψηφίο είναι 2. Θυμόμαστε εδώ πως το 22/7 και το 355/113 είναι δύο από τις πιο ακριβείς προσεγγίσεις του π.

ΤΟ π ΣΤΗΝ ΤΕΧΝΗ

Το 1998 γυρίστηκε η ταινία με τίτλο «π». Στην ταινία παρακολουθούμε την πορεία προς την παράνοια, ενός ιδιοφυούς μαθηματικού που απομονώνεται στο διαμέρισμά του κυριευμένος από την εμμονή να ανακαλύψει μέσα από το π και άλλους αριθμούς, τα μυστικά του σύμπαντος. Παρακολουθήστε το τρέιλερ: https://www.youtube.com/watch?v=jo18VIoR2xU

«Η ζωή του π» ήταν μια ταινία παραγωγής του 2012 βασισμένη στο ομώνυμο βιβλίο του Γιαν Μαρτέλ. Ο ήρωας της ταινίας που ζούσε στην Ινδία, παίρνει από του συμμαθητές του το παρατσούκλι «π» εξ αιτίας της μεγάλης αγάπης του για τα μαθηματικά.

Παρακολουθήστε το τρέιλερ: https://www.youtube.com/watch?v=wPzMqaPfNRA

Απολαύστε μια μελωδία βασισμένη στα ψηφία του π

https://www.youtube.com/watch?v=OMq9he-5HUU

Η ΠΑΓΚΟΣΜΙΑ ΗΜΕΡΑ ΤΟΥ π

Η $14^{η}$ Μαρτίου έχει καθιερωθεί σαν παγκόσμια ημέρα του π. Σε πολλές μαθηματικές σχολές πανεπιστημίων το πάρτι εκείνης της ημέρας αρχίζει την 1:59 μμ για προφανή λόγο.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Η αναζήτηση της ακριβούς τιμής του π, μοιάζει με την αναζήτηση της ουσίας του σύμπαντος. Δεν είναι τυχαίο πως το π συνδέεται με την μέτρηση του κύκλου. Στον κύκλο πολλοί αρχαίοι λαοί έδιναν λατρευτικό συμβολισμό. Μπορούμε να φανταστούμε πως ο πρώτος άνθρωπος που

ανέβηκε στο πιο ψηλό σημείο ενός βουνού, προκειμένου να σχηματίσει μια ιδέα για τον κόσμο, αντελήφθη πως τον περιέβαλλε μια κυκλική επιφάνεια. Ανάμεσα στις πρώτες παρατηρήσεις του νοήμονος όντος που ονομάστηκε άνθρωπος, ήταν η στρογγυλότητα των ματιών του και της ίριδας που μοιάζει με κυκλικό

Open Schools Journal
for Open Science

παράθυρο προς τον εσωτερικό του κόσμο. Παρατήρησε ακόμη την κυκλική πορεία του κυκλικού δίσκου του ήλιου γύρω από την γη, την κυκλική εναλλαγή των εποχών του έτους και τον κύκλο της ζωής του αλλά και κάθε άλλου οργανισμού. Φυσικό ήταν πολλοί τόποι λατρείας και τέλεσης ιερών τυπικών, να πάρουν κυκλικό σχήμα. Ο κύκλος λοιπόν συνδέθηκε από τα πρώτα χρόνια εμφάνισης του ανθρώπου με την δημιουργία και κατά συνέπεια με τον δημιουργό. Δεν θα μπορούσε λοιπόν η μέτρηση του κύκλου και ο υπολογισμός του π αργότερα, να μην ανάγεται στους άρρητους (ανέκφραστους), δηλαδή μη περιγράψιμους με ακρίβεια αριθμούς.

Η αδυναμία ακόμη και των πιο σύγχρονων υπολογιστών να προσδιορίσουν με ακρίβεια την τιμή του π, θα μας θυμίζει πάντα την αδυναμία του ανθρώπου να προσδιορίσει την ουσία του Δημιουργού του κόσμου που μας περιβάλλει.

Στόουνχεντζ, Αγγλία

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Στο σημείο αυτό αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω τις πηγές μου, τους συγγραφείς των βιβλίων που ακολουθούν. Ένα ευχαριστώ ακόμη οφείλω στην διευθύντρια του σχολείου μου κ. Τερζάκη για την ενθάρρυνση και τέλος στον καθηγητή μου κ. Πιτσούνη για την ενθάρρυνση και την πολύτιμη βοήθειά του όλο αυτό το διάστημα προετοιμασίας της εργασίας μου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] David Blatner, The joy of π

[2] Αρχιμήδης, Κύκλου Μέτρηση

[3] Πετρ Μπέκμαν, A History of Pi

[4] Τζόναθαν Μπόργουιν, Pi: A Source Book

[5] Ουίλιαμ Λ. Σαφ, Nature and History of π

[6] Μόντε Ζέργκερ, The Magic o Pi

[7] Ουίλιαμ Τζόουνς, Synopsis Palmariorum Mathescos