Open Schools Journal for Open Science

Vol 3, No 6 (2020)

Πτυσάγωνα

Δημήτριος Παπάρας, Ανδρέας Πούλος

doi: [10.12681/osj.24313](https://doi.org/10.12681/osj.24313)

To cite this article:

Παπάρας Δ., & Πούλος Α. (2020). Πτυσάγωνα. *Open Schools Journal for Open Science*, *3*(6). https://doi.org/10.12681/osj.24313

Open Schools Journal
for Open Science

Πτυσάγωνα

Παπάρας Δημήτριος [1], Πούλος Ανδρέας [2]

[1] Πειραματικό Σχολείο Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, Θεσσαλονίκη, Ελλάδα

[2] Μαθηματικός, Μέλος ΕΠ.Ε.Σ. του Πειραματικό Σχολείο Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, Θεσσαλονίκη, Ελλάδα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Πολλές φορές εμφανίζονται από το πουθενά στον κόσμο των μαθηματικών ορισμένα αντικείμενα τα οποία παρουσιάζουν ορισμένες αξιοπερίεργες ιδιότητες και καταφέρουν να λάβουν την θέση τους στον κόσμο. Ένα ιδιαίτερο κομμάτι των μαθηματικών είναι τα πτυσάγωνα (αγγλ. Flexagons). Ανήκει στην κατηγορία των ψυχαγωγικών μαθηματικών (αγγλ. Recreational Mathematics) όπως ανήκουν στην ίδια π.χ. τα μαγικά τετράγωνα. Είναι κατασκευές από χαρτί οι οποίες έχουν την ιδιότητα να αναδιπλώνονται. Ανακαλύφθηκαν, όπως και πολλά άλλα, σε ένα μεγάλο πανεπιστήμιο του εξωτερικού, το Πρίνστον. Έκτοτε πολλοί μαθηματικοί έχουν ασχοληθεί με το παρόν κατασκεύασμα και προσπάθησαν να ανακαλύψουν πτυχές της θεωρίας που το διέπει. Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η παρουσίαση και εισαγωγή των Πτυσαγώνων στην ελληνική βιβλιογραφία, η εμβάθυνση στις χαρακτηριστικές ιδιότητες των πτυσαγώνων εξαγωνικής μορφής και ο γενικός τρόπος κατασκευής τους. Αυτό θα επιτευχθεί μέσω της βιβλιογραφικής έρευνας και της κατασκευής πτυσαγώνων ώστε να γίνει κατανοητή η αρχή λειτουργίας τους.

ΛΕΞΕΙΣ-ΚΛΕΙΔΙΑ

μαθηματικά, πολύγωνα, κατασκευές με χαρτί

ΠΤΥΣΑΓΩΝΑ

Τα πτυσάγωνα είναι χάρτινα πολύγωνα, τα οποία κατασκευάζονται από λωρίδες χαρτιού, άλλοτε ίσιες, άλλοτε ακαθόριστου σχήματος και έχουν την ιδιότητα να αλλάζουν «πρόσωπα» όταν αναδιπλώνονται. Στα Αγγλικά η κοινή ονομασία είναι «Flexagons», δεν υπάρχει αντίστοιχη βιβλιογραφία στα ελληνικά, οπότε ο όρος «πτυσάγωνα» είναι προσωπικός μου νεολογισμός. Κατέληξα σε αυτήν την ονομασία καθώς έχουν πολλαπλές πτυχές, έχουν την ιδιότητα της αναδίπλωσης (πτύσσω: διπλώνω) και είναι πολύγωνα.

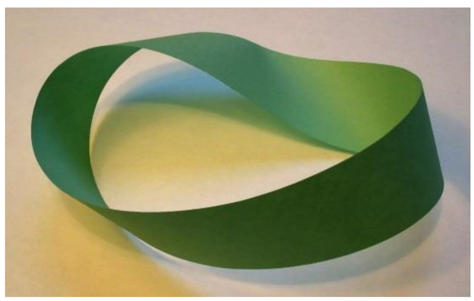
ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Όλα άρχισαν το φθινόπωρο του 1939. Ο Arhtur H. Stone, εικοσιτριάχρονος απόφοιτος μαθητής από την Αγγλία, διέμενε στο πανεπιστήμιο Princeton ως μέρος της μαθηματικής του υποτροφίας και είχε μόλις σκίσει μία ίντσα από τα χαρτιά του αμερικάνικου τετραδίου, ώστε να χωρέσουν στο αγγλικό του ντοσιέ (το αμερικάνικο μέγεθος σελίδας τετραδίου ήταν μεγαλύτερο). Για να ψυχαγωγηθεί άρχισε να διπλώνει τα αποκόμματα το χαρτιού με διάφορους τρόπους και ένα από τα δημιουργήματα του ήταν ιδιαίτερα ενδιαφέρον. Είχε διπλώσει την λωρίδα χαρτιού διαγώνια σε τρία σημεία και ένωσε τα άκρα φτιάχνοντας ένα εξάγωνο. Όταν δίπλωνε τα δύο προσκείμενα τρίγωνα και πίεζε την απέναντι γωνία, το τρίγωνο αναδιπλώνονταν εμφανίζοντας ένα τελείως διαφορετικό «πρόσωπο». Αυτό ήταν το πρώτο πτυσάγωνο που ανακαλύφθηκε και είχε τρεις πτυχές (τρία πρόσωπα). Ο Stone σκεφτόταν την νέα του ανακάλυψη το βράδυ και το πρωί επιβεβαίωσε την πρόβλεψη του πως πιο σύνθετα μοντέλα με περισσότερες πτυχές μπορούν να κατασκευαστούν με έξι πτυχές αντί για τρείς. Σε αυτό το σημείο ο Stone είχε βρει το θέμα τόσο ενδιαφέρον, που το μοιράστηκε με τους φίλους του. Σύντομα τα πτυσάγωνα εμφανιζόντουσαν σε αφθονία στα μεσημεριανά και βραδινά τραπέζια. Οργανώθηκε λοιπόν μία επιτροπή, με σκοπό να αποκαλυφθούν τα μυστήρια των πτυσαγώνων.

ΟΝΟΜΑΤΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΕΞΑΠΤΥΧΑΓΩΝΩΝ

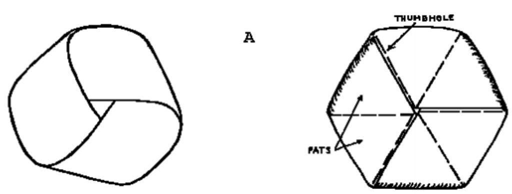
Στα αγγλικά οι λέξεις παίρνουν δύο συνθετικά ανάλογα με τον αριθμό των πτυχών και τον αριθμό των γωνιών του πολυγώνου. Για παράδειγμα, το «trihexaflexagon» είναι ένα τρίπτυχο εξάγωνο ή ένα τριεξαπτυχάγωνο (προτιμώ το περιφραστικό). Ένα «hexahexaflexagon» είναι ένα εξάπτυχο εξάγωνο (εξαεξαπτυχάγωνο) κ.ο.κ.. Αν για κάποιο λόγο δεν θέλουμε να προσδιορίσουμε αριθμό πτυχών προσάπτουμε μόνο το ένα συνθετικό, π.χ. εξαπτυχάγωνο, τετραπτυχάγωνο κ.τ.λ..

Τα πτυσάγωνα εντάσσονται σε έναν κλάδο των μαθηματικών που ονομάζεται τοπολογία. Τα πτυσάγωνα με περιττό αριθμό πτυχών είναι στην βάση τους παραλλαγές της λωρίδας Moebius. Η λωρίδα Moebius είναι μία ταινία η οποία έχει μόνο μια πλευρά και μόνο μία ακμή. Αν κάποιος προσπαθούσε να την διασχίσει, θα έφτανε ξανά από εκεί που άρχισε.



Σχήμα 1: Ταινία Moebius

Ένα τρίπτυχο εξάγωνο είναι μια ταινία Moebius με 3 ημιστροφές. Δεν έχει όμως το ακαθόριστο σχήμα μιας ταινίας, αποτελείται από ισόπλευρα τρίγωνα και έχει σχήμα εξάγωνου.



Σχήμα 2: Ταινία Moebius με 3 ημιστροφές

Όταν αναδιπλώνουμε το πτυσάγωνο, μπορούμε να παρατηρήσουμε πως η πλευρά που βλέπουμε μεταφέρεται πίσω. Χρωματίζοντας όλες τις πλευρές μία προς μία καθώς το αναδιπλώνουμε παρατηρούμε ότι η μπροστινή πηγαίνει πίσω, μετά εξαφανίζεται και επανεμφανίζεται στην επόμενη αναδίπλωση. Χρωματίζοντας τις πλευρές επιβεβαιώνουμε πως είναι μόνο τρείς και αυτές εναλλάσσονται με την παρακάτω σειρά:

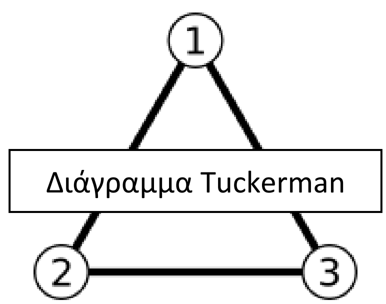
1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3…

ή και

3 2 1 3 2 1 3 2 1 3 2 1…,

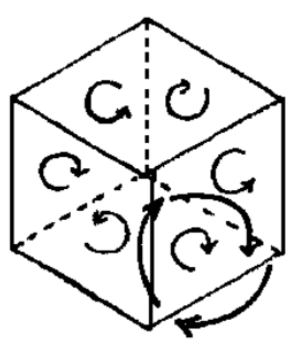
καθώς και η πίσω πλευρά μπορεί να αναδιπλωθεί.

Αυτός ακριβώς είναι και ο σκοπός του διαγράμματος Tuckerman.

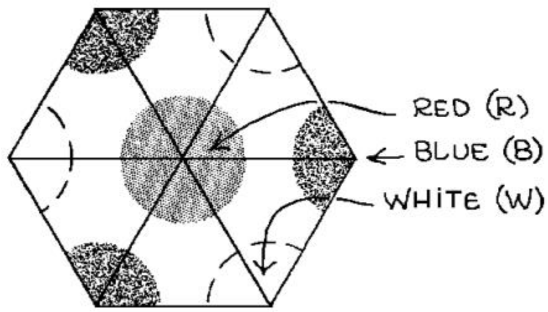


Σχήμα 3: Διάγραμμα Tuckerman

Το συγκεκριμένο πτυσάγωνο έχει και μία ακόμα ιδιότητα: Οι αρθρώσεις που του επιτρέπουν να αναδιπλώνεται δεν είναι παράλληλες, όπως οι μεντεσέδες μιας πόρτας. Ως αποτέλεσμα τα τρίγωνα περιστρέφονται κατά 120 μοίρες ως προς τα βαρύκεντρά τους.



Σχήμα 4: Ιδιότητα περιστροφής



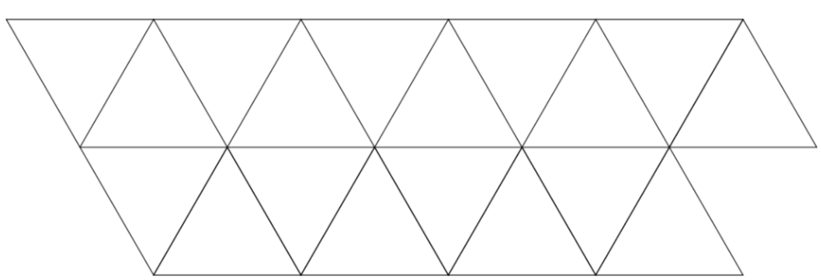
Σχήμα 5: Ιδιότητα γωνιών

Αν για παράδειγμα διπλώναμε το εξάγωνο έτσι, ώστε να δημιουργηθεί ένα τρίγωνο και βουτούσαμε την κάθε πλευρά σε μελάνι διαφορετικού χρώματος κατά την αναδίπλωση του πτυσάγωνου, θα παρατηρούσαμε αλλαγές των χρωμάτων σύμφωνα με την παραπάνω εικόνα. Ένα τέτοιο πτυσάγωνο θα έμοιαζε κάπως έτσι:

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

Παρουσιάζω μόνο την κατασκευή ενός τρίπτυχου εξάγωνου καθώς αυτό είναι μακράν το ευκολότερο για έναν αρχάριο και δεν απαιτεί μεγάλη ποσότητα χαρτιού.

Ο λόγος για τον οποίο το ανάπτυγμα έχει δύο σειρές τριγώνων είναι διττός: Αρχικά δημιουργεί ένα πτυσάγωνο με συνεχές πάχος και κατά δεύτερον καταλήγουμε με μια πιο ανθεκτική κατασκευή και μια καλύτερη αίσθηση στο χέρι. Αυτό είναι εξάλλου το ιδιαίτερο με τα πτυσάγωνα, μπορούν να φτιαχτούν με ελάχιστο κόπο και τα πιο βασικά υλικά, αλλά μπορούν να αναβαθμιστούν με λίγο πιο χοντρό χαρτί, σχέδια κ.τ.λ..



Σχήμα 6: Ανάπτυγμα

οδηγίες κατασκευής

Βήμα πρώτο:

Αρχικά κόβουμε το περίγραμμα του αναπτύγματος

Βήμα δεύτερο:

Διπλώνουμε και κολλάμε τα κάτω τρίγωνα, ώστε να δημιουργηθούν 2 επιφάνειες με γραμμές

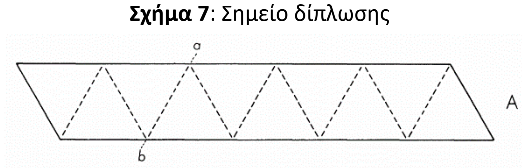
Βήμα τρίτο:

Τσακίζουμε μπρος πίσω στις γραμμές

Βήμα τέταρτο:

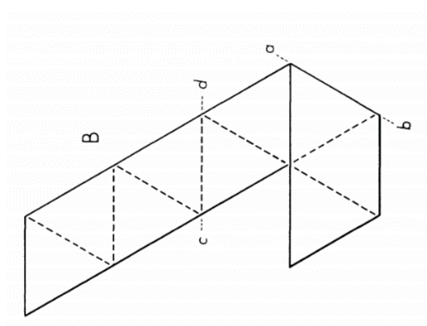
Διπλώνουμε προς τα πίσω στο a-b

Σχήμα 7: Σημείο δίπλωσης



Βήμα πέμπτο:

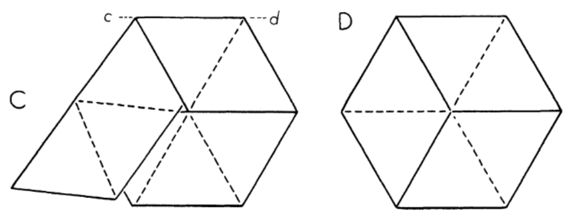
Διπλώνουμε προς τα πίσω στο c-d



Σχήμα 8: Σημείο δίπλωσης

Βήμα έκτο:

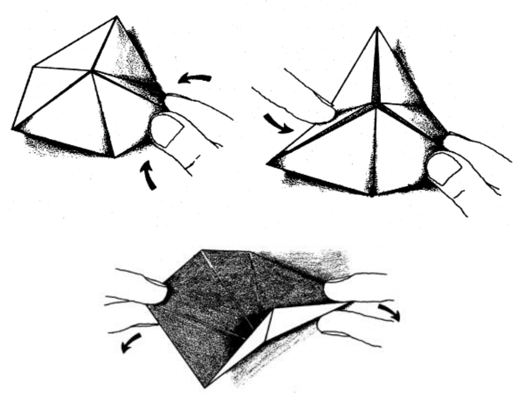
Το ελεύθερο κομμάτι περνάει μπροστά από το πρώτο τρίγωνο και το τελευταίο τρίγωνο το κολλάμε στην πίσω μεριά του πρώτου



Σχήμα 9: Σημείο δίπλωσης και κόλλησης

Οδηγίες χρήσης

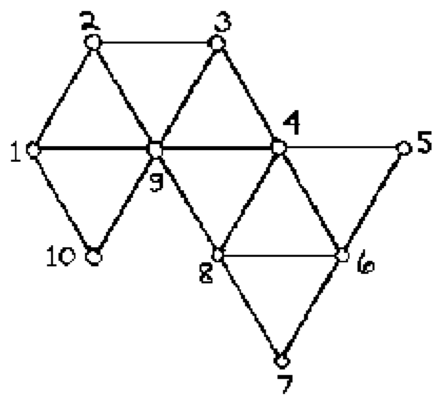
Διπλώνουμε με το ένα χέρι δύο προσκείμενα τρίγωνα και με το άλλο χέρι πιέζουμε το κάτω μέρος της απέναντι γωνίας τραβώντας το άνω. Αν δεν μπορεί με τίποτα να ξεδιπλωθεί, διπλώνουμε τα αμέσως επόμενα ή προηγούμενα προσκείμενα τρίγωνα και επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία.



Σχήμα 10: Οπτική παρουσίαση των κινήσεων

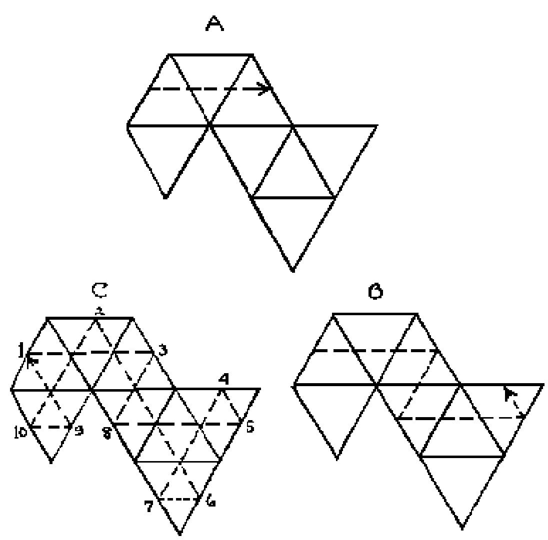
ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΓΙΑ ΠΟΛΥΠΤΥΧΑ ΕΞΑΠΤΥΧΑΓΩΝΑ

Αρχικά δημιουργούμε το επιθυμητό διάγραμμα Tuckerman με των αριθμό των πτυχών που επιθυμούμε.



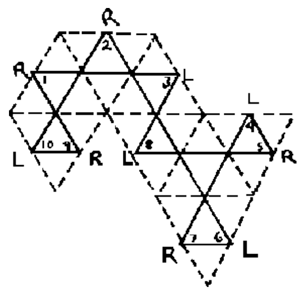
Σχήμα 11: Διάγραμμα Tuckerman

Αρχίζουμε να διατρέχουμε το διάγραμμα από την πλευρά πάνω από το σημείο ένα και σε κάθε εξωτερικό ευθύγραμμο τμήμα η κατεύθυνση αλλάζει κατά 45 μοίρες ενώ ταυτόχρονα αριθμούμε το σημείο με τον ίδιο τρόπο με τον οποίο αριθμήσαμε το πρώτο σημείο.



Σχήμα 12: Εφαρμογή διαγράμματος Tuckerman

Αρχίζουμε ξανά από το ένα όπου το θέτουμε ως R και αρχίζουμε να κινούμαστε στην διαδρομή



Σχήμα 13: Εφαρμογή διαγράμματος Tuckerman

που δημιουργήσαμε. Κάθε φορά που φτάνουμε σε εξωτερικό ευθύγραμμο τμήμα ελέγχουμε αν είναι παράλληλο ως προς το πρώτο αν είναι παράλληλο κρατάμε το προηγούμενο σύμβολο, στην προκειμένη περίπτωση R, αν δεν είναι παράλληλο όπως στο παραπάνω σχήμα το αλλάζουμε, στην προκειμένη περίπτωση το R γίνεται L. Καταλήγουμε στο παρακάτω σχήμα.

Δημιουργούμε το παρακάτω διάγραμμα σύμφωνα με την διαδρομή. Τοποθετούμε τους αριθμούς εναλλάξ με αυτόν τον τρόπο:

1		8		4		6		10		1	
	3		5		7		2		9		3

Πίνακας 1: Βοηθητικός πίνακας κατασκευής πτυσαγώνου

Στον παραπάνω πίνακα αυξάνουμε τους αριθμούς των στηλών κατά 1 και τους τοποθετούμε στην κενή θέση. Στον μέγιστο αριθμό (10) επιστρέφουμε στο ένα (11 modulo 10 για να είμαι ακριβής).

1	4	8	6	4	8	6	3	10	10	1	4
2	3	9	5	5	7	7	2	1	9	2	3

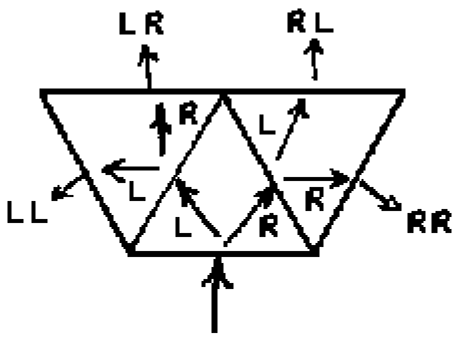
Πίνακας 2: Βοηθητικός πίνακας κατασκευής πτυσαγώνου

Στον πίνακα προσθέτουμε τα R και τα L.

1	4	8	6	4	8	6	3	10	10	1	4
2	3	9	5	5	7	7	2	1	9	2	3
R	L	L	R	L	R	L	R	L	R	R	L

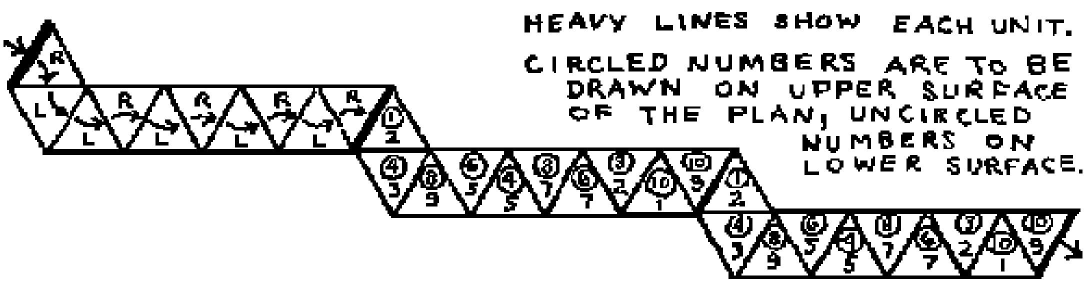
Πίνακας 3: Βοηθητικός πίνακας κατασκευής πτυσαγώνου

Τώρα είμαστε έτοιμοι να κατασκευάσουμε το πτυσάγωνο. Αρχίζουμε με ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Σε αυτό διαλέγουμε μία πλευρά ως βάση. Βλέπουμε το πρώτο κουτάκι τι γράφει. Στην προκειμένη περίπτωση το πρώτο είναι R. Δημιουργούμε λοιπόν νέο ισόπλευρο τρίγωνο με βάση την δεξιά πλευρά ως προς την πρώτη βάση. Έχοντας ως βάση αναφοράς την καινούργια βάση συνεχίζουμε την διαδικασία με τον ίδιο τρόπο χρησιμοποιώντας μόνο την ανοιχτόχρωμη πλευρά του πίνακα. Ο τρόπος είναι ο εξής:



Σχήμα 14: Οπτική οδηγία σχεδίασης

Όταν το πτυσάγωνο έχει ζυγό αριθμό επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία με το ανοιχτόχρωμο μέρος του πίνακα τρείς φορές ώστε να σχηματιστεί το πτυσάγωνο. Το σκούρο μέρος του διαγράμματος λειτουργεί ως βοήθημα στα πτυσάγωνα περιττού αριθμού πλευρών.

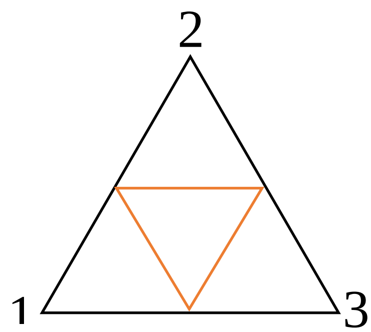


Σχήμα 15: Οπτική οδηγία σχεδίασης

Αριθμούμε τα 3 τμήματα στην μπροστινή πλευρά με την άνω σειρά αριθμών και στην πίσω πλευρά με την κάτω σειρά αριθμών. Τέλος για να κατασκευασθεί το πτυσάγωνο αρκεί να διπλώσουμε μαζί τους ίδιους αριθμούς σε διαδοχικά τρίγωνα μεταξύ τους. Πρέπει να καταλήξουμε με δύο πλευρές με συμπληρωμένα ίδια νούμερα, π.χ. μία πλευρά με 1, η άλλη με 2.

Περίπτωση πτυσαγώνου με περιττό αριθμό πτυχών

Σε αυτά τα πτυσάγωνα παρατηρείται το εξής φαινόμενο που για να το καταλάβετε πρέπει να



εισαχθεί με ένα παράδειγμα. Έχουμε το παρακάτω γνωστό πτυσάγωνο:

Σχήμα 16: Διάγραμμα Tuckerman

Στο πτυσάγωνο αυτό ο πλήρης αρχικός πίνακας είναι ο:

1		3		2		1		3
	2		1		3		2	

Πίνακας 4: Βοηθητικός πίνακας κατασκευής πτυσαγώνου

Ήδη είναι εμφανές πως οι τρείς στήλες στην μέση εμφανίζουν τα νούμερα σε αντεστραμμένες θέσεις.

1	3	3	2	2	1	1	3	3
2	2	1	1	3	3	2	2	1
R	L	R	L	R	L	R	L	R

Πίνακας 5: Βοηθητικός πίνακας κατασκευής πτυσαγώνου

Αυτός ακριβώς είναι ο ρόλος των δύο σκιασμένων στηλών στους πίνακες, υπενθυμίζουν την αντιστροφή της σειράς, όταν συμβαίνει. Ο τυπικός, συνοπτικός πίνακας είναι:

1	3	3	2	2
2	2	1	1	3
R	L	R	L	R

Πίνακας 6: Βοηθητικός πίνακας κατασκευής πτυσαγώνου

Με την χρήση των παραπάνω πινάκων κατασκευάζονται τα πτυσάγωνα με περιττό αριθμό πτυχών. Επειδή υπάρχουν πολλοί τρόποι δημιουργίας ενός διαγράμματος Tuckerman σε ένα πτυσάγωνο με ν πτυχές, μπορεί να δημιουργηθεί ένας πίνακας με όλες τις πιθανές παραλλαγές.

Αριθμός πτυχών	Αριθμός παραλλαγών πτυσαγώνων
(2)	(1)
3	1
4	1
5	1
6	3
7	4
8	12
9	27
10	82
11	228
12	733
13	2282
14	7523
15	24834
16	83898
17	285357
18	983244

Πίνακας 7: Αριθμός παραλλαγών πτυσαγώνων

Για όσους επιθυμούν να μάθουν να δημιουργούν και άλλα, πιο σύνθετα, πτυσάγωνα, υπάρχει μία εξαιρετική ιστοσελίδα, η www.flexagon.net, στην οποία εμπεριέχονται οδηγίες κατασκευής πολλών από αυτά.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

[1] Gardner, Martin. Hexaflexagons and Other Mathematical Diversions: the First Scientific American Book of Puzzles and Games. The Universiy of Chicago Press, 1988.

[2] Conrad, Antony S. The Theory of the Flexagon. RIAS, 1962.