Open Schools Journal for Open Science

Vol 6, No 1 (2023)

Open Schools Journal for Open Science - Special Issue -Πρακτικά του «3ου Μαθητικού Συνεδρίου Έρευνας και Επιστήμης»

Ιδανικές στροφές

Νίκη Λίλιαν Μακριδάκη, Ευάγγελος Χατζάκης, Ειρήνη Περυσινάκη

doi: [10.12681/osj.31799](https://doi.org/10.12681/osj.31799)

To cite this article:

Μακριδάκη Ν. Λ., Χατζάκης Ε., & Περυσινάκη Ε. (2023). Ιδανικές στροφές. *Open Schools Journal for Open Science*, *6*(1). https://doi.org/10.12681/osj.31799

Ιδανικές στροφές

(Διεπιστημονικές προσεγγίσεις – προφορική)

Νίκη Λίλιαν Μακριδάκη[1], Ευάγγελος Χατζάκης[2]
[12] Πρότυπο Γενικό Λύκειο Ηρακλείου
[1]makridan19@sch.gr, [2]chatzake19@sch.gr

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Ειρήνη Περυσινάκη
Καθηγήτρια Μαθηματικών, Πρότυπο Γενικό Λύκειο Ηρακλείου
iriniper@sch.gr

Περίληψη

Το γεγονός ότι ένα όχημα κινδυνεύει να εκτροχιαστεί όταν στρίβει με λάθος ταχύτητα, μας οδήγησε στο ερώτημα κατά πόσο ο σχεδιασμός μιας στροφής δρόμου θα πρέπει να λαμβάνει υπόψη τις ταχύτητες των οχημάτων, εάν αυτές αναμένεται να μεταβάλλονται ή εάν αυτές αναμένεται να παραμένουν σταθερές κατά την στροφή. Στην έρευνά μας αναζητήσαμε σχήματα «ιδανικών» στροφών που υποστηρίζουν όλες αυτές τις ενδεχόμενες κινήσεις. Για να παρακολουθήσουμε εκτός από την ταχύτητα και την κίνηση του τιμονιού – ενδεχομένως μικρή στις ιδανικές στροφές – χρησιμοποιήσαμε ένα περιβάλλον logo προγραμματισμού όπου εκεί αποτυπώσαμε τις ζητούμενες τροχιές.

Λέξεις κλειδιά: ταχύτητα, στροφή δρόμου, ελικοειδείς τροχιές

Εισαγωγή

Στην οδοποιία διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν διαφόρων σχημάτων στροφές δρόμων όπως κλειστές, ανοιχτές, τέλειοι κύκλοι (κυκλικές πορείες) ή τόξα κύκλων, αλλά και βρόχοι όπως στην εικόνα 1. Αντιλαμβανόμαστε ότι αρκετές φορές το σχήμα μιας στροφής ίσως υπαγορεύεται από την μορφολογία του εδάφους (παρυφές βουνών). Αναρωτηθήκαμε όμως, μήπως και άλλοι παράγοντες όπως η ταχύτητα του οχήματος θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη στον σχεδιασμό μιας στροφής που θα την χαρακτηρίζαμε «ιδανική» εφόσον υποστηρίζει την αναμενόμενη κίνηση του οχήματος. Εάν αυτό ισχύει, θα πρέπει οι διαφορετικές ταχύτητες να συνεπάγονται διαφορετικά σχήματα στροφών αλλά και οι λωρίδες επιτάχυνσης/επιβράδυνσης που συνδέουν έναν επαρχιακό δρόμο με έναν αυτοκινητόδρομο θα πρέπει και αυτές να έχουν το κατάλληλο σχήμα, άραγε ποιο;

Εικόνα 1: στροφές με βρόχους του Bernoulli

Άλλα ερωτήματα που μας απασχόλησαν είναι εάν οι στροφές στις σιδηροτροχιές έχουν και αυτές ιδιαίτερο σχήμα, μια και λογικά τα βαγόνια θα πρέπει να κινούνται με την ίδια ταχύτητα ανεξάρτητα από το ποια θέση κατέχουν στη στροφή. Αλλά και το τιμόνι πώς στρίβει σε μια «ιδανική» στροφή; Για παράδειγμα, αν το όχημα θέλει να στρίψει κάθετα σε έναν δρόμο (στροφή κατά 90^o) αυτό θα πει ότι και το τιμόνι θα πρέπει να στρίψει κατά 90^o επίσης; Μήπως στην «ιδανική» στροφή το τιμόνι στρίβει από ελάχιστα έως καθόλου;

Για την έρευνα των παραπάνω ερωτημάτων χρησιμοποιήσαμε το περιβάλλον της χελωνόσφαιρας (1) όπου μια οντότητα κινείται με χρήση εντολών logo. Έτσι η στροφή δρόμου σε αυτό το περιβάλλον ταυτίζεται με καμπύλες τροχιές. Κάποιες από αυτές τις ταυτοποιήσαμε κατά την βιβλιογραφική μας έρευνα, όπως η έλικα του Αρχιμήδη, η λογαριθμική έλικα, η έλικα του Euler. Οι καμπύλες αυτές περιγράφονται από δύο παραμέτρους κίνησης: α) την στροφή του τιμονιού και β) την ταχύτητα του οχήματος. Η διαφοροποίηση στις καμπύλες έγκειται στον διαφορετικό τρόπο μεταβολής αυτών των παραμέτρων.

Το περιβάλλον της χελωνόσφαιρας (λογισμικό logo)

Η «χελώνα», η οντότητα που κινείται στην χελωνόσφαιρα, υπακούει σε εντολές logo που την κινούν με πολλούς διαφορετικούς τρόπους στις τρεις διαστάσεις. Στην δική μας διερεύνηση, διατηρούμε την χελώνα στο επίπεδο και έτσι χρησιμοποιούμε περιορισμένου πλήθους εντολών:

- `fd <αριθμός>`: κίνηση μπροστά τόσων στοιχείων όσος ο αριθμός. Συμβατικά θα λέμε ότι η χελώνα εκτέλεσε ένα βήμα μήκους όσος ο αριθμός.
- `rt <αριθμός>`: στροφή δεξιά κατά τόσες μοίρες όσος ο αριθμός
- `lt <αριθμός>`: στροφή αριστερά κατά τόσες μοίρες όσος ο αριθμός
- `repeat <φυσικός αριθμός> […]`: επαναλαμβάνει τις εντολές της αγκύλης τόσες φορές όσος και ο φυσικός αριθμός
- `repeat <φυσικός αριθμός> [εντολές με παράμετρο repcount]`: και εδώ υπάρχει επανάληψη των εντολών που βρίσκονται στην αγκύλη τόσες φορές όσος και ο φυσικός αριθμός. Η διαφορά από την απλή επανάληψη είναι η παρουσία της παραμέτρου `repcount` που στην πρώτη επανάληψη έχει τιμή 1, στην δεύτερη τιμή 2, στην τρίτη τιμή 3 κ.ο.κ.

- `cg`: καθαρίζει τα γραφικά και επαναφέρει την χελώνα στην αρχική της θέση με τον αρχικό προσανατολισμό

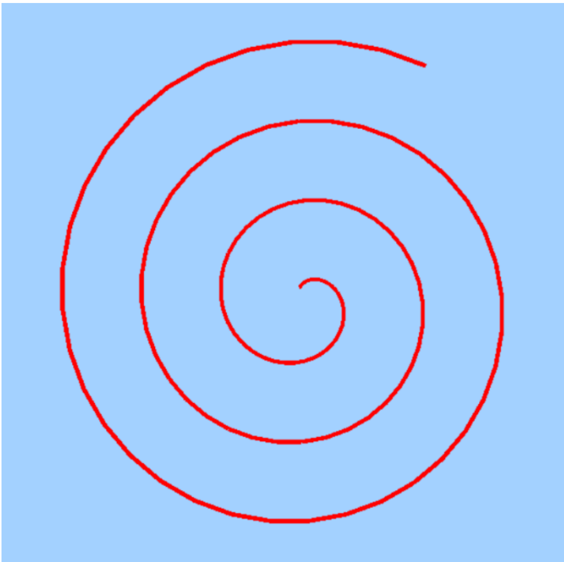
Ας δώσουμε ένα παράδειγμα για να γίνει κατανοητή η παράμετρος `repcount`:
Θα μπορούσαμε να ζητήσουμε την διαδοχική εκτέλεση των παρακάτω εντολών

```
fd 0.2*1 rt 10
fd 0.2*2 rt 10
fd 0.2*3 rt 10
fd 0.2*4 rt 10
fd 0.2*5 rt 10
fd 0.2*6 rt 10
..............
```

ή εναλλακτικά την συνοπτική εντολή

```
repeat 120 [fd 0.2*repcount rt 10]
```

Με αυτές η χελώνα σχηματίζει την έλικα του Αρχιμήδη που εικονίζεται στην εικόνα 2. Το γεωμετρικό χαρακτηριστικό αυτής της έλικας είναι ότι η απόσταση του ενός ελιγμού από τον επόμενο είναι σταθερή, όπως συνέβαινε με τις γραμμές στους δίσκους του γραμμόφωνου.



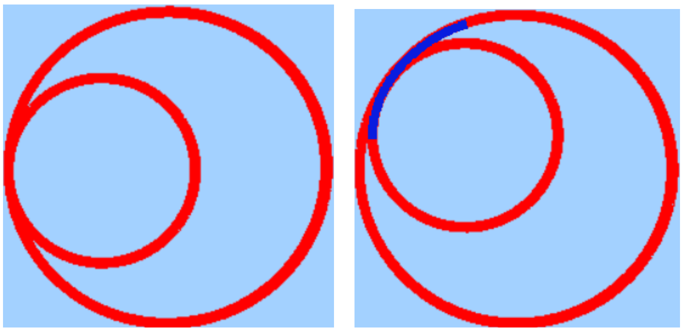
Εικόνα 2: η έλικα του Αρχιμήδη στο περιβάλλον της χελωνόσφαιρας

Η παράμετρος της ταχύτητας

Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή, εξετάζουμε δύο παραμέτρους για το πώς επιδρούν στην στροφή ενός οχήματος: την ταχύτητά του και την στροφή του τιμονιού. Για να ελέγξουμε την επιρροή της ταχύτητας, θα κρατήσουμε σταθερά στριμμένο το τιμόνι, ας πούμε στις 5^o, ενώ η διαφορά στην ταχύτητα αντανακλάται στην διαφορά του μήκους βήματος της χελώνας: μεγάλη ταχύτητα σημαίνει μεγάλο βήμα ενώ μικρή ταχύτητα σημαίνει μικρό βήμα.
Εκτελώντας διαδοχικά τις εντολές

```
repeat 72 [fd 1.5 rt 5]
repeat 72 [fd 2.5 rt 5]
```

παρατηρούμε ότι η χελώνα σχηματίζει δύο κύκλους (κανονικά 72-γωνα) με τον δεύτερο να είναι μεγαλύτερος από τον πρώτο καθώς το βήμα στον δεύτερο κύκλο είναι μήκους 2.5 ενώ στον πρώτο μήκους 1.5 (εικόνα 3 αριστερά).



Εικόνα 3: η επιρροή της ταχύτητας (αριστερά) και σταδιακή αλλαγή της ταχύτητας (δεξιά)

Συνεπώς, αν το όχημα αυξάνει σταδιακά το «βήμα» του -δηλαδή την ταχύτητά του- από το 1.5 στο 2.5, αυτόματα θα κινείται σταδιακά σε όλο και μεγαλύτερους κύκλους (η μπλε γραμμή στην εικόνα 3 δεξιά). Κάτι τέτοιο μπορεί να συνεπάγεται τον εκτροχιασμό του οχήματος ή να είναι μια επιθυμητή πορεία σε μια λωρίδα επιτάχυνσης, όταν το όχημα εισέρχεται από έναν επαρχιακό δρόμο σε έναν αυτοκινητόδρομο.

Οι εντολές που σχεδίασαν την μπλε τροχιά παρεμβάλλονται στις εντολές που κατασκευάζουν τους κόκκινους κύκλους και είναι:

```
fd 1.5 rt 5
fd 1.53 rt 5
fd 1.57 rt 5
fd 1.63 rt 5
fd 1.71 rt 5
fd 1.8 rt 5
fd 1.9 rt 5
fd 2 rt 5
fd 2.1 rt 5
fd 2.2 rt 5
fd 2.29 rt 5
fd 2.37 rt 5
fd 2.43 rt 5
fd 2.47 rt 5
fd 2.5 rt 5
```

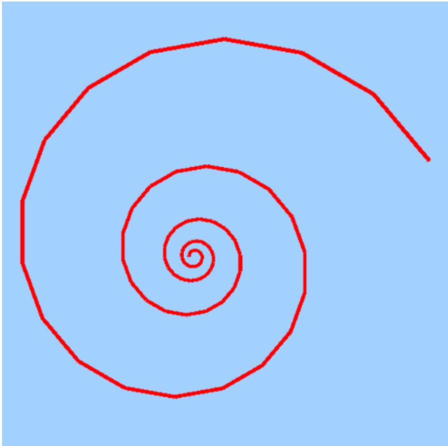
Σε μια ρεαλιστική κατάσταση, η ομαλή μετάβαση μέσα σε 15s από την ταχύτητα των 15m/s (54 Km/h) στην ταχύτητα των 25m/s (90 Km/h), έχοντας σταθερά στριμμένο το τιμόνι στις 5^o, απαιτεί την χάραξη μιας πορείας όμοιας με την μπλε που εικονίζεται στην εικόνα 3 δεξιά. Τέτοιες είναι οι λωρίδες επιτάχυνσης/ επιβράδυνσης στους αυτοκινητόδρομους.

Ίσως είναι περισσότερο εμφανής η μετάβαση του οχήματος σε όλο και μεγαλύτερους κύκλους όταν η επιτάχυνση είναι σταθερή, όπως συμβαίνει στην περίπτωση που το όχημα διαγράφει την έλικα του Αρχιμήδη (εικόνα 2) εκτελώντας την εντολή

```
repeat 120 [fd 0.2*repcount rt 10]
```

Και το φαινόμενο γίνεται ακόμα πιο έντονο όταν η ταχύτητα αυξάνει εκθετικά όπως στην λογαριθμική ή αλλιώς ισογώνια έλικα (εικόνα 4):

```
repeat 80 [fd power 1.05 repcount rt 20]
```



Εικόνα 4: Λογαριθμική έλικα

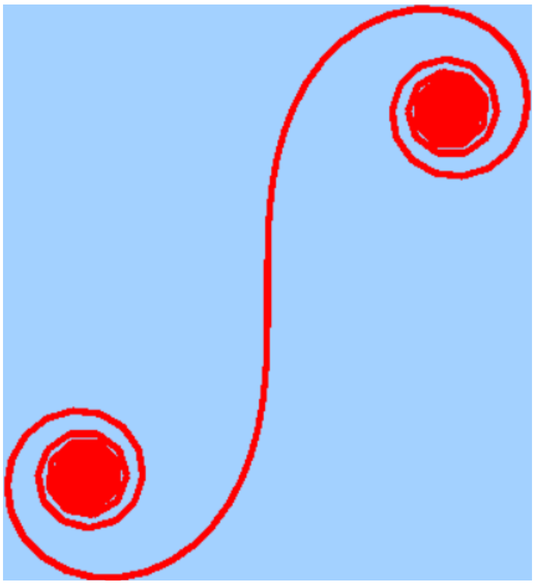
Στροφές με σταθερή ταχύτητα

Υπάρχουν περιπτώσεις που θα θέλαμε ένα όχημα να διατηρήσει την ταχύτητά του καθώς στρίβει. Για παράδειγμα, κατά την στροφή ενός τρένου, θα θέλαμε η ταχύτητα να διατηρείται σταθερή ώστε σε όποια θέση της στροφής κι αν βρίσκεται ένα βαγόνι να κινείται με την ίδια ταχύτητα. Σε αυτήν την περίπτωση η αλλαγή της πορείας επιτυγχάνεται με το σταδιακό στρίψιμο του τιμονιού. Ο Euler, μελετώντας αυτό το πρόβλημα κίνησης των τρένων, οδηγήθηκε στην κλωθοειδή καμπύλη (ή αλλιώς έλικα του Ο Euler - εικόνα 5) την οποία πρότεινε ως την ιδανική στροφή για τις σιδηροτροχιές των τρένων. Αυτή χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι, αν διατρέχεται με σταθερή ταχύτητα, η γωνία κλίσης των τροχών τού οχήματος - ή η καμπυλότητα τής τροχιάς - αυξάνεται με σταθερό ρυθμό. Κατά συνέπεια, η εντολή logo που την κατασκευάζει είναι σύμφωνα με την Wikipedia (2)

```
repeat 720 [fd 8 rt repcount]
```

Πραγματικά, η κίνηση κατ’ αυτή την τροχιά περιγράφεται από σταθερή ταχύτητα (βήματος μήκους 8) και από ομαλή αύξηση της στροφής του τιμονιού. Ας προσέξουμε ότι όταν η μεταβλητή `repcount` παίρνει τιμές από 180^o έως 360^o, τότε φαινομενικά το όχημα στρίβει αριστερά και όχι δεξιά, εξ ου και το ιδιαίτερο σχήμα της έλικας.

Μια άλλη περίπτωση που θα θέλαμε το όχημα να διατηρήσει σταθερή ταχύτητα είναι όταν στρίβει κάθετα από έναν αυτοκινητόδρομο σε έναν άλλον αυτοκινητόδρομο. Εφόσον και οι δύο δρόμοι είναι υψηλών ταχυτήτων, θα θέλαμε αυτή η υψηλή ταχύτητα να διατηρηθεί και στις στροφές των οχημάτων. Ποια είναι όμως η ιδανική πορεία στροφής σε αυτήν την περίπτωση;



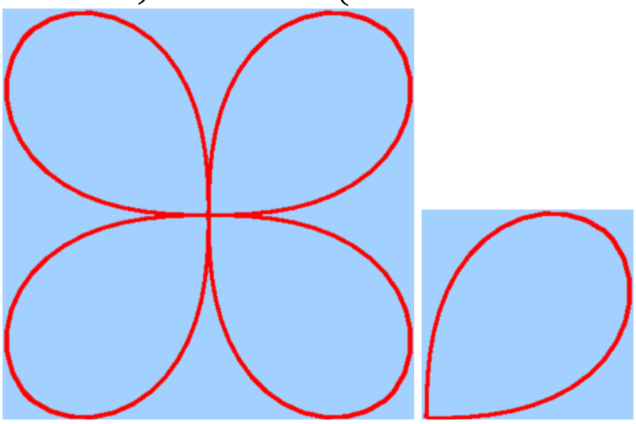
Εικόνα 5: η έλικα του Euler ή κλωθοειδής καμπύλη, ιδανική για τις σιδηροτροχιές των τρένων

Μείναμε έκπληκτοι όταν ανακαλύψαμε ότι η ιδανική πορεία σε αυτή την περίπτωση είναι η κίνηση σε λημνίσκους του Bernoulli (3). Πρόκειται για την κατάσταση που εικονίζεται στην εικόνα 1. Προσπαθώντας να απεικονίσουμε τις τροχιές αυτές στην χελωνόσφαιρα, αντιληφθήκαμε ότι εάν θέλουμε το όχημα να στρίψει 90^o αριστερά, τότε είναι προτιμότερο να στρίψει κατά 270^o δεξιά (για να παραμείνει η ταχύτητα υψηλή). Αυτό επιτυγχάνεται με την σταδιακή στροφή του τιμονιού που δεν ξεπερνά όμως τις 15^o όπως φαίνεται και από τις εντολές logo που παράγουν έναν από τους βρόχους:

```
repeat 15 [rt repcount fd 10]
rt 15 fd 6 rt 15
repeat 15 [fd 10 rt 16-repcount]
```

Το «μαγικό» να μην στρίβει το τιμόνι πάνω από 15^o ενώ το όχημα να στρίβει κατά 270^o οφείλεται στο σύνολο των στροφών του τιμονιού που σε μοίρες είναι

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + 15) + 15 + 15 + (15 + 14 + 13 + \cdots + 1) = 270$$



Εικόνα 6: Λημνίσκοι του Bernoulli (αριστερά) και αντίστοιχος βρόχος (δεξιά) για την στροφή οχημάτων από έναν αυτοκινητόδρομο σε έναν άλλον κάθετα.

Συμπεράσματα

Παρακολουθώντας την κίνηση της χελώνας αντιληφθήκαμε το πώς η ταχύτητα επιδρά σε ένα όχημα που στρίβει και γιατί κάποιες στροφές δρόμων έχουν ιδιαίτερο σχήμα. Συγκεκριμένα ανακαλύψαμε ότι:

- Η αύξηση στην ταχύτητα συνεπάγεται την μετάβαση του οχήματος σταδιακά σε μεγαλύτερους κύκλους. Αυτό είναι άλλοτε επιθυμητό (λωρίδες επιτάχυνσης) ενώ άλλοτε ενέχει τον κίνδυνο εκτροχιασμού.
- Μικρή σταδιακή στροφή του τιμονιού μπορεί να συνεπάγεται αλλαγή στον προσανατολισμό του οχήματος κατά πολλές μοίρες συνολικά.
- Μία στροφή θα πρέπει να υποστηρίζει την ιδιαίτερη κινητική κατάσταση ενός οχήματος (αν επιταχύνεται ή αν κινείται με σταθερή ταχύτητα) αλλά και αντίστροφα, η κινητική κατάσταση του οχήματος θα πρέπει να συμμορφώνεται προς το εκάστοτε σχήμα της στροφής.
- Σε αυτοκινητόδρομους υψηλών ταχυτήτων, ιδανικό σχήμα για την στροφή είναι ο λημνίσκος του Bernoulli
- Στις σιδηροτροχιές των τρένων ιδανικό σχήμα για τις στροφές είναι η έλικα του Euler ή αλλιώς κλωθοειδής καμπύλη.

Βιβλιογραφικές αναφορές

[1] Χελωνόσφαιρα – Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας ΕΚΠΑ [online] Διαδικτυακή πρόσβαση: <http://etl.ppp.uoa.gr/malt2/> [Ημερομηνία ανάκτησης 3 Φεβρουαρίου 2021].

[2] Euler spiral - Wikipedia [online] Διαδικτυακή πρόσβαση: <https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_spiral> [Ημερομηνία ανάκτησης 3 Φεβρουαρίου 2021].

[3] Transition curve in surveying: Type, Definition, Requirements - Civil Ganeshwar [online] Διαδικτυακή πρόσβαση: <https://civilgt.blogspot.com/2017/03/transition-curve-horizontal-curve-of.html> [Ημερομηνία ανάκτησης 3 Φεβρουαρίου 2021].