Open Schools Journal for Open Science

Vol 6, No 1 (2023)

Open Schools Journal for Open Science - Special Issue -Πρακτικά του «3ου Μαθητικού Συνεδρίου Έρευνας και Επιστήμης»

Οριακοί αριθμοί

Μενέλαος Πρασανάκης, Μιχαήλ Κασωτάκης, Ειρήνη Περυσινάκη

doi: [10.12681/osj.31800](https://doi.org/10.12681/osj.31800)

Οριακοί αριθμοί

Θεματική περιοχή: Μαθηματικά

Μιχαήλ Κασωτάκης[1]*, Μενέλαος Πρασανάκης*[2]

[1,2] *Πρότυπο Γενικό Λύκειο Ηρακλείου, Ηράκλειο*
[1]kasotakm18@sch.gr, [2]prasanam18@sch.gr

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Ειρήνη Περυσινάκη
Μαθηματικός, Πρότυπο Γενικό Λύκειο Ηρακλείου
iriniper@sch.gr

Περίληψη

Με ένα κομπιουτεράκι, αν πατήσουμε το πλήκτρο της ρίζας ξανά και ξανά, καταλήγουμε πάντα στο 1 ανεξάρτητα από το ποιος ήταν ο αρχικός μας αριθμός. Γιατί να συμβαίνει αυτό; Πέρα από μια σύντομη αλγεβρική απάντηση, θεωρούμε τις διαδοχικές ρίζες ως τιμές της συνάρτησης $\mathrm{f(x)} = \sqrt{\mathrm{x}}$ και ανιχνεύουμε την θέση τους στον άξονα $x'x$. Εντοπίζουμε ποια γεωμετρικά χαρακτηριστικά της συνάρτηση οδήγησαν σε αυτό το εντυπωσιακό τρικ και διαπιστώνουμε ότι και άλλες συναρτήσεις με παρόμοια χαρακτηριστικά μπορούν να οδηγήσουν στην κατασκευή ακολουθιών που πάντα καταλήγουν στον ίδιο «οριακό» αριθμό.

Λέξεις κλειδιά: συναρτήσεις, σύνθεση συναρτήσεων, όριο

Το πείραμα με τις διαδοχικές ρίζες.

Πολλοί από εμάς έχουμε κάνει τον εξής πειραματισμό: γράφουμε έναν αριθμό στο κομπιουτεράκι, π.χ. το 8 και έπειτα πατάμε επανειλημμένα το πλήκτρο της ρίζας. Στο τέλος η διαδικασία τερματίζεται γιατί καταλήγουμε στο 1. Το

ενδιαφέρον είναι ότι πάντα καταλήγουμε στο 1 ανεξάρτητα από το ποιον αρχικό αριθμό που επιλέγουμε αρχικά.
Ιδού μια τέτοια ακολουθία αριθμών που ξεκινά με το 5:

Α/Α	**αριθμοί**
1	5
2	2,236067977
3	1,495348781
4	1,222844545
5	1,105823017
……………………….	
29	1,000000006
30	1,000000003
31	1,000000001
32	1,000000001
33	1

Με άλλα λόγια, $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{5}}}} = 1$. Πώς εξηγείται αυτό;

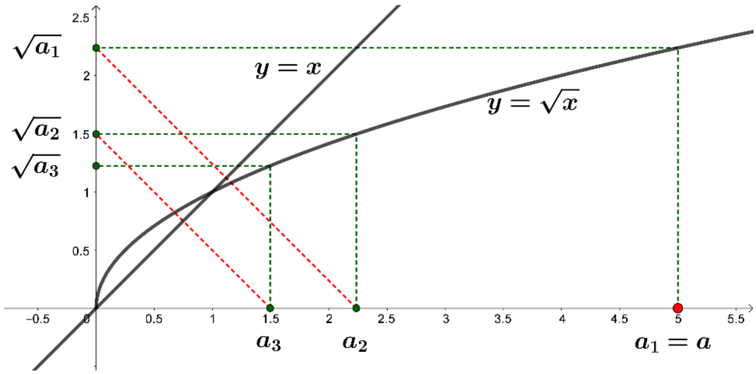
Για να απαντήσουμε στο ερώτημα, αρχικά αναζητάμε τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του γραφήματος της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}, x > 0$ που οδηγούν σε αυτό το φαινόμενο και στη συνέχεια, έχοντας κατανοήσει την ουσία του φαινομένου, κατασκευάζουμε παρόμοια πειράματα που οδηγούν σε άλλους «οριακούς» αριθμούς.

Ερμηνεία του φαινομένου – άτυπες αποδείξεις

Οι διαδοχικές ρίζες αποτελούν μια ακολουθία $\{\alpha_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$, με πρώτο όρο το $a_1 = 5$ και κάθε άλλο όρο την ρίζα του προηγούμενου, δηλαδή

$$\alpha_\nu = \sqrt{\alpha_{\nu-1}} \qquad (1)$$

Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση $g(x) = \sqrt{x}$ για $x > 0$, μπορούμε να παρακολουθήσουμε την αποτύπωσή τους διαδοχικά στον άξονα $x'x$ (σχήμα 1), καθώς η σχέση (1) σημαίνει ότι το σημείο α_ν στον $x'x$ θα είναι το συμμετρικό του σημείου $\sqrt{\alpha_{\nu-1}}$ στον $y'y$ ως προς την ευθεία $y = x$.



Σχήμα 1: Διαδοχικές ρίζες αρχίζοντας με $\alpha > 1$

Εντοπίζουμε τα εξής χαρακτηριστικά της ακολουθίας (τα οποία αποδεικνύονται με προφανή τρόπο):

1. Όλοι οι όροι είναι μεγαλύτεροι της μονάδας, δηλαδή $\alpha_\nu > 1$
2. Είναι γνησίως φθίνουσα, δηλαδή $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \cdots$

Επειδή λοιπόν οι όροι της ακολουθίας φθίνουν αλλά συγχρόνως παραμένουν μεγαλύτεροι από το 1, αντιλαμβανόμαστε (διαισθητικά) ότι οι όροι αυτοί θα συγκλίνουν σε έναν αριθμό $l \geq 1$, δηλαδή

$$l = \lim_{\nu\to+\infty} \alpha_\nu$$

Λόγω της (1) θα ισχύει ακόμα ότι

$$\lim_{\nu\to+\infty} \alpha_\nu = \lim_{\nu\to+\infty} \sqrt{\alpha_{\nu-1}} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{\nu\to+\infty} \alpha_\nu = \sqrt{\lim_{\nu\to+\infty} a_{\nu-1}} \Leftrightarrow$$

$$l = \sqrt{l}$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ως λύσεις τους αριθμούς 0 και 1. Όμως επειδή πρέπει $l \geq 1$, συμπεραίνουμε ότι $l = 1$.

Ο παραπάνω συλλογισμός αποτελεί μια «άτυπη» απόδειξη της ακόλουθης πρότασης:

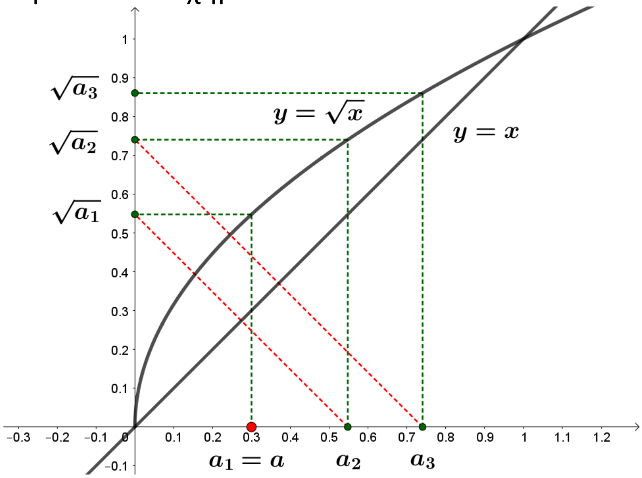
Πρόταση 1
Αν $\alpha > 1$, τότε η ακολουθία που ορίζεται αναδρομικά από τους τύπους

$$\alpha_1 = \alpha$$
$$\alpha_\nu = \sqrt{\alpha_{\nu-1}}$$

Είναι γνησίως φθίνουσα και συγκλίνουσα με

$$\lim_{\nu \to +\infty} \alpha_\nu = 1$$

Ανάλογα αποδεικνύεται και η πρόταση 2, η οποία σκιαγραφείται στο σχήμα 2.



Σχήμα 2: Διαδοχικές ρίζες αρχίζοντας με $0 < \alpha < 1$

Πρόταση 2
Αν $0 < \alpha < 1$, τότε η ακολουθία που ορίζεται αναδρομικά από τους τύπους

$$\alpha_1 = \alpha$$
$$\alpha_\nu = \sqrt{\alpha_{\nu-1}}$$

Είναι γνησίως αύξουσα και συγκλίνουσα με

$$\lim_{\nu \to +\infty} \alpha_\nu = 1$$

Σημειώσεις:

1. Αντιλαμβανόμαστε ότι ποτέ δεν καταλήγουμε σε όρους α_ν που ταυτίζονται με τον αριθμό 1, αντίθετα με την έκβαση του πειράματός μας με το κομπιουτεράκι. Ο λόγος είναι ότι στο κομπιουτεράκι εμφανίζονται οι δεκαδικές προσεγγίσεις των αριθμών με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων.

2. Στην συνέχεια της συνάρτησης $g(x) = \sqrt{x}$ αποδίδεται ότι

$$\lim_{\nu\to+\infty} \sqrt{\alpha_{\nu-1}} = \sqrt{\lim_{\nu\to+\infty} a_{\nu-1}}$$

Μια προσπάθεια γενίκευσης

Το ακόλουθο «πρόβλημα κατασκευής οριακού αριθμού» θα μπορούσε να τεθεί σε γενικότερο πλαίσιο, όμως για απλότητα και για άμεση συσχέτιση με την $g(x) = \sqrt{x}, x > 0$ περιορίσαμε την αναζήτησή μας.

Πρόβλημα κατασκευής οριακού αριθμού:

Να προσδιοριστούν οι συναρτήσεις $f\colon (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ για τις οποίες κάθε ακολουθία $\{\alpha_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ που ορίζεται αναδρομικά ως εξής

$$\alpha_1 = \alpha \quad , \qquad \alpha_2 = f(\alpha) \quad , \quad \alpha_3 = f\big(f(\alpha)\big) , \ldots$$

να συγκλίνει στον ίδιο αριθμό l, ανεξάρτητα από ποιο α επιλέξαμε ως πρώτο όρο.

Ας σκεφτούμε πρώτα πώς μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι το όριο της ακολουθίας $\{\alpha_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ (εφόσον υπάρχει) δεν εξαρτάται από τον πρώτο όρο της ακολουθίας, αλλά είναι πάντα ο ίδιος αριθμός l.

Αν η f ορίζεται στο l και είναι συνεχής συνάρτηση, τότε θα έχουμε ότι

$$\lim_{\nu\to+\infty} \alpha_\nu = \lim_{\nu\to+\infty} f(\alpha_{\nu-1}) \Leftrightarrow$$

$$\lim_{\nu\to+\infty} \alpha_\nu = f\left(\lim_{\nu\to+\infty} a_{\nu-1}\right) \Leftrightarrow$$

$$l = f(l)$$

Δηλαδή το l είναι λύση της εξίσωσης $x = f(x)$. Συνεπώς, αρκεί η εξίσωση να έχει μοναδική λύση, δηλαδή η $y = f(x)$ να τέμνει σε μοναδικό σημείο την $y = x$.

Η απαίτηση η f να ορίζεται στο l, δεδομένου ότι περιοριστήκαμε σε συναρτήσεις που ορίζονται στους θετικούς αριθμούς, συνεπάγεται ότι $l > 0$. Έτσι έχουμε δύο περιπτώσεις για την επιλογή του πρώτου όρου α: είτε $0 < \alpha < l$, είτε $\alpha > l$.

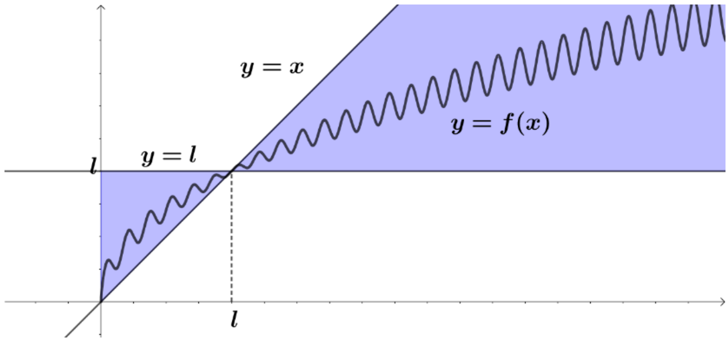
Στην περίπτωση που $0 < \alpha < l$, ένας τρόπος (όχι μοναδικός) για να συγκλίνει η ακολουθία $\{\alpha_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ στο l είναι να έχουμε μια γνησίως αύξουσα ακολουθία, δηλαδή να ισχύει

$$0 < \alpha < \cdots < \alpha_\nu < f(\alpha_\nu) < l \qquad (2)$$

Αντίστοιχα, για $\alpha > l$, αρκεί να έχουμε μια γνησίως φθίνουσα ακολουθία, δηλαδή

$$\alpha > \cdots > \alpha_\nu > f(\alpha_\nu) > l \qquad (3)$$

Οι σχέσεις (2) και (3) αληθεύουν όταν η καμπύλη $y = f(x)$ βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες $y = x$ και $y = l$ (χρωματιστή περιοχή του σχήματος 3).



Σχήμα 3: Η γενική μορφή μιας συνάρτησης f που επιλύει το πρόβλημα της κατασκευής οριακών αριθμών

Αποδείξαμε λοιπόν το ακόλουθο

Θεώρημα

Αν για τη συνάρτηση $f\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ ισχύουν:

- Η f είναι συνεχής
- Υπάρχει $l > 0$ που για κάθε $x > 0$, $x \neq l$ ισχύει

$$\min\{x, l\} < f(x) < \max\{x, l\}$$

τότε η ακολουθία

$$\alpha_1 = \alpha \quad , \qquad \alpha_2 = f(\alpha) \quad , \quad \alpha_3 = f\big(f(\alpha)\big), \ldots$$

συγκλίνει στο l ανεξάρτητα από την επιλογή του $\alpha > 0$.

Παρατηρήσεις:

1. Οι συναρτήσεις $\min\{x, l\}$, $\max\{x, l\}$ είναι συνεχείς αφού

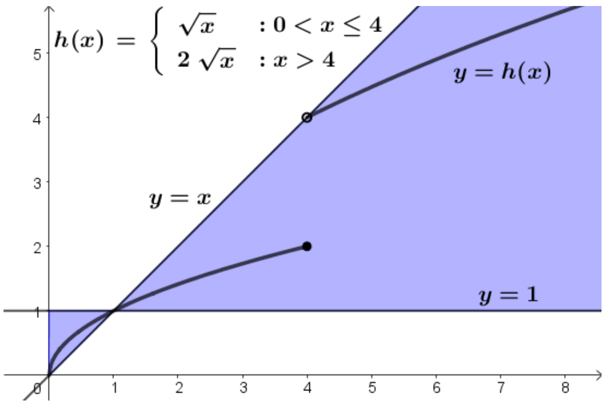
$$\min\{x, l\} = \frac{x + l - |x - l|}{2}$$
$$\max\{x, l\} = \frac{x + l + |x - l|}{2}$$

2. Λόγω της ανισοτικής σχέσης που υποθέσαμε για την f και επειδή $\lim_{x \to l} \min\{x, l\} = \lim_{x \to l} \max\{x, l\} = l$, θα ισχύει (λόγω του κριτηρίου παρεμβολής) ότι

$$\lim_{x \to l} f(x) = l$$

και επειδή η f είναι συνεχής στο l, θα έχουμε ότι $f(l) = l$.

3. Η συνέχεια της f είναι απαραίτητη καθώς η συνάρτηση h του σχήματος 4 δεν συγκαταλέγεται στις συναρτήσεις που επιλύουν το πρόβλημα κατασκευής οριακού αριθμού γιατί το όριο των ακολουθιών άλλοτε είναι 1 και άλλοτε είναι 4.



Σχήμα 4: Ασυνεχής συνάρτηση που δεν επιλύει το πρόβλημα κατασκευής οριακών αριθμών

4. Το θεώρημα που αποδείξαμε δίνει απλώς μια ικανή, αλλά όχι αναγκαία συνθήκη για την εύρεση συναρτήσεων που επιλύουν το πρόβλημα κατασκευής οριακού αριθμού. Για παράδειγμα η συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{1}{2}, & x > 1 \end{cases}$$

επιλύει το πρόβλημα, χωρίς όμως να έχει τα χαρακτηριστικά που αναφέρονται στο θεώρημα.

Κατασκευάζοντας οριακούς αριθμούς - συμπεράσματα

Το Θεώρημα που αποδείξαμε στην προηγούμενη ενότητα υπαγορεύει ποια χαρακτηριστικά αρκεί να έχει μια συνάρτηση για τη δημιουργία ενός πειράματος παρόμοιου με εκείνο των διαδοχικών ριζών.

Θα δώσουμε ένα τέτοιο παράδειγμα: Έστω

$$f(x) = \sqrt{1+x}\,, \qquad x > 0$$

Η εξίσωση $x = f(x)$ έχει ρίζα τον χρυσό λόγο $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ που είναι ο οριακός αριθμός της ακολουθίας

$$\alpha\ , \qquad \sqrt{1+\alpha}\ , \ \sqrt{1+\sqrt{1+\alpha}}\ , \ \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\alpha}}}\,, \ldots$$

Είναι σαν να λέμε ότι

$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\ldots}}}}$$

Στο κομπιουτεράκι το «τρικ» επιτυγχάνεται ως εξής: μετά την εισαγωγή του τυχαίου αριθμού α, πατάμε διαδοχικά τα πλήκτρα «+», «1», «=», «$\sqrt{\ }$» μέχρι που κάποτε φτάνουμε στο 1,6180339887498948482045868343656 (ή με λιγότερα δεκαδικά ψηφία) και η διαδικασία τερματίζεται.