Open Schools Journal for Open Science

Τόμ. 6, Αρ. 1 (2023)

Open Schools Journal for Open Science - Special Issue -Πρακτικά του «3ου Μαθητικού Συνεδρίου Έρευνας και Επιστήμης»

Η συντομότερη διαδρομή και η ανάκλαση του φωτός

ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΤΣΙΤΣΙΡΙΓΓΟΣ, Μαρίνος Ανδρόνικος , Δανάη Κουράνου , Ιάσονας Κυριάκου , Γεωργία Τζοβαρίδου, Λάμπρος Τσανούλας

doi: [10.12681/osj.31888](https://doi.org/10.12681/osj.31888)

Η συντομότερη διαδρομή και η ανάκλαση του φωτός

Συγγραφείς:
Μαρίνος Ανδρόνικος martin.andronikos@gmail.com
Δανάη Κουράνου danah.kouranou@gmail.com
Ιάσονας Κυριάκου jaskyriakou@gmail.com
Γιώργος Τσιτσιρίγγος georgetsitsiriggos@gmail.com

4^{ο} Γενικό Λύκειο Αγίας Παρασκευής mail@4lyk-ag-parask.att.sch.gr

Επιβλέποντες Καθηγητές:
Γεωργία Τζοβαρίδου, ΠΕ03 μαθηματικός
gtzovaridou@gmail.com
Λάμπρος Τσανούλας , ΠΕ03 μαθηματικός
latsano@gmail.com

Περίληψη
Στην εργασία αυτή μελετούμε τον νόμο της ανάκλασης του φωτός σαν συνέπεια της αρχής του Ήρωνα και τον εφαρμόζουμε στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων ελαχίστου.
Εργαζόμαστε, χρησιμοποιώντας και το λογισμικό geogebra ως εργαλείο διερεύνησης, επαλήθευσης και κατασκευής, πάνω στην ιδέα ότι το γεωμετρικό πρόβλημα ελαχίστης περιμέτρου συνδέεται με την αξία – αρχή: «στη φύση τα φαινόμενα εκδηλώνονται με τη μικρότερη ενέργεια».
Κάνουμε την κατασκευή και οπτικοποίηση του γεωμετρικού θέματος Fagnano.
Στη συνέχεια, με βάση την αρχή του Fermat για τη διάδοση του φωτός, προτείνουμε ανακλαστική επιφάνεια, τέτοια, ώστε οι ακτίνες που στέλνει μικρός λαμπτήρας, να ακολουθούν, μετά την ανάκλαση, παράλληλη μεταξύ τους πορεία.
Κατασκευάζουμε την επιφάνεια παραβολικού κατόπτρου.
Η εφαρμογή ενός φυσικού νόμου στην επίλυση ενός κλασικού γεωμετρικού προβλήματος αναδεικνύει τη συμβατότητα της εμπειρίας με τη γεωμετρία. Αναδεικνύεται ο ρόλος της φαντασίας αλλά και της αναλυτικής και συνθετικής σκέψης στην αντιμετώπιση τέτοιων ζητημάτων.

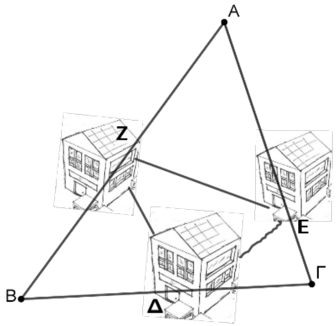
Λέξεις κλειδιά: Πρόβλημα Fagnano, παραβολικό κάτοπτρο, αρχή Ήρωνα, αρχή Fermat

Ένα πρόβλημα και η διαμόρφωση του ερευνητικού πεδίου από τις υποθέσεις του.

Ας υποθέσουμε ότι στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ του τριγώνου που σχηματίζουν τρία εργοστάσια Α, Β, Γ θέλουμε να κατασκευάσουμε τρεις σταθμούς ανεφοδιασμού που θα συνδεθούν μεταξύ τους με ξεχωριστό οδικό δίκτυο.

Α. Να προτείνουμε θέσεις Δ, Ε και Ζ ώστε το οδικό δίκτυο να έχει ελάχιστο μήκος.

Β. Μπορούμε να γενικεύσουμε το συμπέρασμα δηλαδή να προτείνουμε λύση που εξασφαλίζει σε κάθε περίπτωση την ελάχιστη περίμετρο στο τρίγωνο ΔΕΖ;



Σχήμα 1

Κάποτε, πριν από πολλά χρόνια, το πρόβλημα αυτό είχε τεθεί κάπως έτσι:

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ (Giulio Carlo Fagnano 1682-1766)</u>:

«Σε δεδομένο οξυγώνιο τρίγωνο να εγγραφεί τρίγωνο ελαχίστης περιμέτρου»


PRODUZIONI
MATEMATICHE
DEL CONTE GIULIO CARLO
DI FAGNANO,
MARCHESE DE' TOSCHI,
E DI SANT' ONORIO
NOBILE ROMANO, E PATRIZIO SENOGAGLIESE
ALLA SANTITA' DI N. S.
BENEDETTO XIV.
PONTEFICE MASSIMO.
TOMO SECONDO.
IN PESARO
L' ANNO DEL GIUBBILEO M. DCC. L.
NELLA STAMPERIA GAVELLIANA
CON LICENZA DE' SUPERIORI.

<u>Βασικές παρατηρήσεις</u>

1ο χαρακτηριστικό: Το ερώτημα, όπως τέθηκε, είναι σαφές αλλά δεν "προδίδει" τη μέθοδο επίλυσης.

2ο χαρακτηριστικό: Το πρόβλημα έχει να κάνει με ελάχιστο.

Από πολύ παλιά οι φιλόσοφοι και οι επιστήμονες έδειξαν την τάση να εντάξουν τα φαινόμενα, παρά την πολλαπλότητά τους, σ' ένα ελάχιστο σύνολο νόμων και αρχών: από τον Αριστοτέλη, που πρέσβευε ότι «η φύση ενεργεί κατά τον συντομότερο δυνατό τρόπο», μέχρι τους σύγχρονους επιστήμονες που θεμελίωσαν με αρχές ελαχίστου την Κβαντική Φυσική, που αποτελεί το πιο επαναστατικό επίτευγμα της σύγχρονης Θεωρητικής Φυσικής.

"Είναι μάταιο να χρησιμοποιούμε περισσότερες αρχές όταν είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσουμε λιγότερες» είναι μια βασική αρχή, γνωστή διεθνώς ως Ockham razor principle (αρχή του ξυραφιού του Όκαμ)

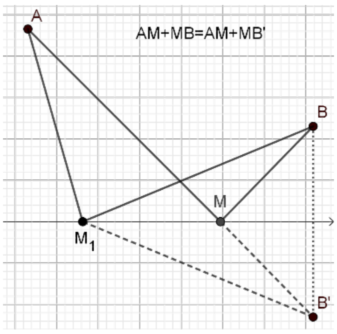
Ας ανατρέξουμε σε ένα σχετικό, αλλά απλούστερο, πρόβλημα του σχολικού βιβλίου (σελ.62, εφαρμογή 4) :

<u>Πρόβλημα 1</u>

«Να κατασκευαστεί σημείο Μ της ευθείας ε, ώστε το άθροισμα ΜΑ+ΜΒ να πάρει τη μικρότερη τιμή».

Αν Β' είναι το συμμετρικό του Β ως προς ε, για την πιθανή διαδρομή AM_1B, από την τριγωνική ανισότητα, ισχύει: $AM_1 + M_1B = AM_1 + M_1B' \geq AB' = AM + MB$.

Το σημείο τομής της ΑΒ' με την ε, το Μ, είναι το ζητούμενο σημείο.



Σχήμα 2

Εστιάζοντας στο συμπέρασμα της προηγούμενης κατασκευής, μπορούμε να δώσουμε μια εναλλακτική διατύπωση του προβλήματος:

Πρόβλημα 2

«Αν το συνολικό μήκος AM_1B είναι ελάχιστο τότε οι γωνίες ω και φ είναι ίσες και αντιστρόφως»

Απόδειξη:

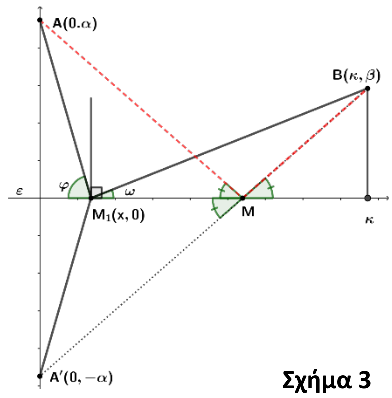
Αρχικά, θα μεταφέρουμε τα δεδομένα στο περιβάλλον της αναλυτικής γεωμετρίας με άξονα x'x την ευθεία ε, το A σημείο του y'y και A' το συμμετρικό του A ως προς ε. Η AM_1B είναι μια πιθανή διαδρομή. Το συνολικό της μήκος είναι

$$AM_1 + M_1B = \sqrt{x^2+\alpha^2} + \sqrt{(\kappa-x)^2+\beta^2}$$

Αν οι γωνίες ω και φ είναι ίσες τότε διαδοχικά έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\beta}{\kappa-x} \\ \varepsilon\varphi\varphi = \dfrac{\alpha}{x} \end{array}\right\} \overset{\omega=\varphi}{\Rightarrow} \frac{\beta}{\kappa-x} = \frac{\alpha}{x} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\kappa-x}{x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\kappa}{x} = \frac{\beta}{\alpha}+1 \Leftrightarrow x = \frac{\alpha\kappa}{\alpha+\beta}$$



Σχήμα 3

Η θέση του M είναι $(\frac{\alpha\kappa}{\alpha+\beta}, 0)$ και η διαδρομή AMB θα έχει μήκος

$$AM + MB = \sqrt{\left(\frac{\alpha\kappa}{\alpha+\beta}\right)^2 + \alpha^2} + \sqrt{(\kappa - \frac{\alpha\kappa}{\alpha+\beta})^2 + \beta^2}$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\sqrt{\kappa^2+(\alpha+\beta)^2} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\sqrt{\kappa^2+(\alpha+\beta)^2} = \sqrt{\kappa^2+(\alpha+\beta)^2}$$

Απομένει να δούμε αν είναι $AM_1 + M_1B \geq AM + MB$ για κάθε x ή ισοδύναμα

$$\sqrt{x^2+\alpha^2} + \sqrt{(\kappa-x)^2+\beta^2} \geq \sqrt{\kappa^2+(\alpha+\beta)^2} \Leftrightarrow$$

$$x^2+\alpha^2+(\kappa-x)^2+\beta^2+2\sqrt{x^2+\alpha^2}\sqrt{(\kappa-x)^2+\beta^2} \geq \kappa^2+(\alpha+\beta)^2 \Leftrightarrow$$

$$(x^2+\alpha^2)[(\kappa-x)^2+\beta^2] \geq (\alpha\beta+\kappa x-x^2)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2\beta^2+\alpha^2(\kappa-x)^2-2\alpha\beta x(\kappa-x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$[\beta x-(\kappa-x)a]^2 \geq 0 \text{ που ισχύει.}$$

Άρα η AMB είναι η ελάχιστη διαδρομή.

Αλλαγή πλαισίου

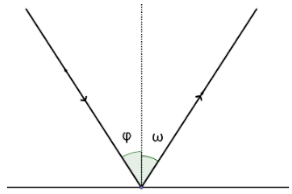
Οι γωνίες ω και φ, όταν ω=φ, μπορούν να θεωρηθούν γωνίες πρόσπτωσης και ανάκλασης μιας ανακλώμενης ακτίνας. Η θεώρηση αυτή λοιπόν μας οδηγεί στον νόμο της ανάκλασης: Η συντομότερη διαδρομή είναι αυτή που θα έκανε μια ακτίνα φωτός όταν φεύγοντας από το A ανακλαστεί στο ζητούμενο σημείο M της ε και διέλθει από το B. Το σημείο M προσδιορίζεται μονοσήμαντα από το σημείο τομής της ε με την ευθεία A'B όπου A' είναι το συμμετρικό του A ως προς την ε.

Άρα το ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1 είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3:

Ποιά είναι η διαδρομή μιας ακτίνας φωτός που ξεκινά από σημείο A και αφού ανακλαστεί στην επιφάνεια μιας ράβδου ε διέρχεται από το σημείο B;

Διαπιστώνουμε δηλαδή ότι το φαινόμενο της ανάκλασης του φωτός διέπεται από την αρχή του ελαχίστου. Δηλαδή η γεωμετρία είναι συμβατή με την εμπειρία.

Ιστορικά η εξέλιξη του νόμου ανάκλασης του φωτός πέρασε συνοπτικά από τα εξής στάδια:



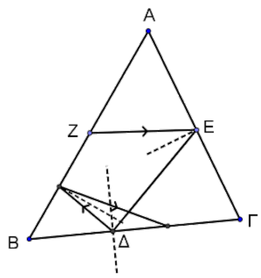
Σχήμα 4

- Αρχιμήδης ($3^{ος}$ αι π.Χ.) (ω=φ)
- Ήρων (1ος αι) (αρχή ελάχιστου δρόμου: «*ο δρόμος που ακολουθεί μια φωτεινή ακτίνα κατά τη διέλευσή της μεταξύ δύο σημείων είναι ο συντομότερος δυνατός*»)
- Ολυμπιόδωρος ($5^{ος}$ αι) (η φύση δεν κάνει τίποτα περιττό)
- Fermat ($17^{ος}$ αι) (αρχή ελάχιστου χρόνου: « *Κατά τη μετάβασή του από ένα σημείο σε ένα άλλο, το φως επιλέγει να ακολουθήσει τον δρόμο εκείνο που καθιστά το χρόνο της διαδρομής ελάχιστο*»)
- Maupertuis (Μοπερτυί, 1744) (αρχή ελάχιστης δράσης για τις μεταβολές της φύσης)
- Οι εργασίες πάνω στην αρχή της ελάχιστης δράσης των Lagrange και Euler (1755–1788)
- Hamilton (~1830): (Η κίνηση γίνεται έτσι ώστε το ολοκλήρωμα $\int_{t_0}^{t_1}(E_{κιν} - E_{δυν})dt$ να είναι το ελάχιστο δυνατό).

Η αρχή του Ήρωνα εξηγεί επαρκώς τον νόμο της ανάκλασης.

<u>Μετασχηματισμός του Προβλήματος Fagnano σε ισοδύναμο πρόβλημα</u>

Σύμφωνα με τα προηγούμενα: *αν έχουμε το τρίγωνο ΑΒΓ και η φωτεινή ακτίνα ξεκινά από το Ζ, το τρίγωνο με την ελάχιστη περίμετρο που ζητάμε θα είναι αυτό που θα σχηματιστεί από τη πορεία της φωτεινής ακτίνας*.

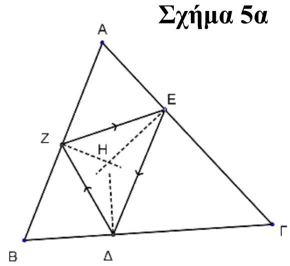


Σχήμα 5α

Βέβαια όταν το φως μπει στο τρίγωνο από ένα τυχαίο σημείο *Ζ*, με τυχαία κατεύθυνση προς την απέναντι πλευρά, θα κινηθεί, σύμφωνα με το νόμο ανάκλασης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5α.

Αν όμως, μετά από τις δύο διαδοχικές ανακλάσεις, περάσει πάλι από τη θέση *Ζ* , θα σχηματιστεί το εγγεγραμμένο τρίγωνο ΔΕΖ όπως στο Σχήμα 5β

Τώρα ξέρουμε τι ψάχνουμε. Όμως πώς θα το κατασκευάσουμε; Και, επίσης, υπάρχει πάντα ένα τέτοιο τρίγωνο; Πρέπει να ερευνήσουμε τις ιδιότητες αυτού του τριγώνου.



Σχήμα 5β

<u>Ανάλυση του προβλήματος</u>

Μελέτη αυτού του τριγώνου:

Έστω *Η* το σημείο τομής της κάθετης στην *ΑΒ* στο *Ζ* και της κάθετης στην *ΑΓ* στο *Ε*.

Τότε από το *Η* θα διέρχεται και η κάθετη της *ΒΓ* στο *Δ*, γιατί οι *ΖΗ*, *ΗΕ*, *ΗΔ* είναι οι διχοτόμοι των γωνιών του *ΖΕΔ* άρα θα συντρέχουν.

Θα δείξουμε ότι η *ΖΗΓ* είναι ευθεία άρα και ύψος του *ΑΒΓ*.

Κατ’ αρχάς τα τετράπλευρα *ΗΕΓΔ* και *ΑΕΗΖ* είναι εγγράψιμα, γιατί δύο απέναντι γωνίες τους είναι ορθές. Οπότε προκύπτει ότι:

$\widehat{H\Gamma\Delta}=\widehat{HE\Delta}$ επειδή *ΗΕΓΔ* εγγράψιμο

$\widehat{HE\Delta}=\widehat{HEZ}$ από το νόμο της ανάκλασης του φωτός

$\widehat{HEZ}=\widehat{BAH}$ επειδή *ΑΕΗΖ* εγγράψιμο.

Συνεπώς έχουμε διαδοχικά: $\widehat{ZH\Delta}+\widehat{\Delta H\Gamma}=\widehat{ZH\Delta}+90^0-\widehat{H\Gamma\Delta}=$

$$\widehat{ZH\varDelta} + 90^0 - \widehat{BAH} = \widehat{ZH\varDelta} + \widehat{AB\varGamma} = 360^0 - (\widehat{HZB} + \widehat{H\varDelta B}) = 180^0$$

Άρα το ζητούμενο αποδείχθηκε.
Με όμοιο τρόπο δείχνουμε ότι και *ΑΔ*, *ΒΕ* είναι ύψη του τριγώνου *ΑΒΓ*.
Δηλαδή, το ζητούμενο τρίγωνο, αν υπάρχει, είναι το ***ορθικό τρίγωνο*** του *ΑΒΓ*.

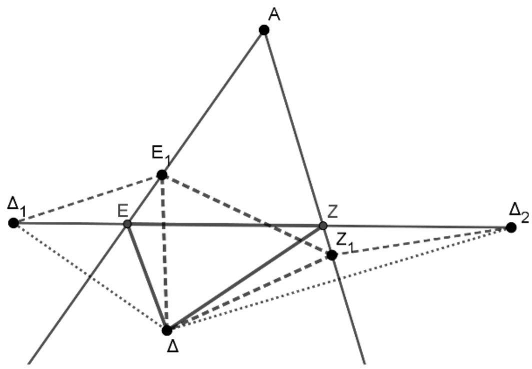
Έλεγχος ύπαρξης και μοναδικότητας

3ο χαρακτηριστικό (δημιουργική αμφιβολία): Είναι το μοναδικό τρίγωνο με αυτή την ιδιότητα;

- Το Δ είναι σταθερό σημείο

Αν στο πρόβλημα του σχολικού βιβλίου, αντί για τα σημεία Α και Β, έχουμε 2 ευθείες (τις 2 πλευρές του τριγώνου) και αντί για την ευθεία ε έχουμε σημείο Δ (σημείο της τρίτης πλευράς του τριγώνου) προκύπτει το αρχικό μας πρόβλημα με δεδομένη την κορυφή Δ.

Θεωρούμε *Δ* σταθερό σημείο της ΒΓ, E_1, Z_1 μεταβλητά και $\varDelta_1$, $\varDelta_2$ τα συμμετρικά του *Δ* ως προς τις 2 πλευρές.

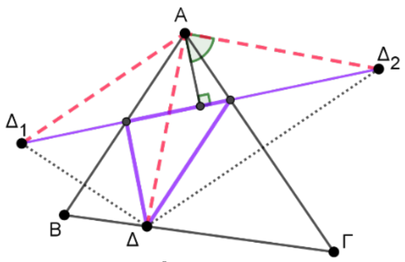


Σχήμα 6

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 6 το «ανάπτυγμα» των πλευρών του $E_1\varDelta Z_1$ είναι η τεθλασμένη γραμμή $\varDelta_1E_1Z_1\varDelta_2$ η οποία ελαχιστοποιείται στην $\varDelta_1EZ\varDelta_2$. Άρα, με δεδομένο το *Δ*, το εγγεγραμμένο οξυγώνιο τρίγωνο με την ελάχιστη περίμετρο είναι το *ΕΔΖ.*

Προφανώς στα σημεία Ε και Ζ ικανοποιείται ο νόμος της ανάκλασης του φωτός.

- Το *Δ* μεταβάλλεται.



Σχήμα 7

Καθώς το Δ κινείται στην πλευρά ΒΓ, ποια θέση είναι εκείνη που θα δώσει τρίγωνο ΔΕΖ ελάχιστης περιμέτρου (Σχήμα 7);

ΑΒ μεσοκάθετος άρα $A\varDelta_1 = A\varDelta$
ΑΓ μεσοκάθετος άρα $A\varDelta = A\varDelta_2$.
Η γωνία Α είναι σταθερή και το τρίγωνο $\varDelta_1 A\varDelta_2$ είναι ισοσκελές.

Προφανώς $\widehat{\varDelta_1 A\varDelta_2} = 2 \cdot \hat{A}$.
Οπότε: $\varDelta_1\varDelta_2 = 2 \cdot \eta\mu A \cdot A\varDelta_2$ ή $\boldsymbol{\varDelta_1\varDelta_2 = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho}ά \cdot \boldsymbol{A\varDelta_2}$
Άρα: $\varDelta_1\varDelta_2$ *ελάχιστο* ⟺ $A\varDelta_2$ *ελάχιστο* ⟺ *ΑΔ* ελάχιστο.
Επομένως **το *ΑΔ* είναι το ύψος**.

Η ύπαρξη εγγεγραμμένου τριγώνου ελάχιστης περιμέτρου έχει νόημα μόνο για τα οξυγώνια τρίγωνα.

- *Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο*. Τότε το εγγεγραμμένο τρίγωνο ελάχιστης περιμέτρου εκφυλίζεται σε ευθύγραμμο τμήμα.

Αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και Π είναι φωτεινή πηγή σε σημείο της υποτείνουσας τότε η μοναδική ακτίνα που, αφού ανακλαστεί διαδοχικά στις 2 κάθετες πλευρές, επιστρέφει στο Π, είναι η ΠΑ (Σχήμα 8)

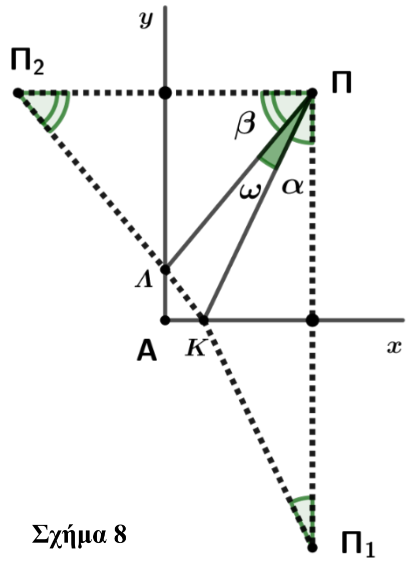
Πράγματι:

Έστω Π ένα σημείο στο εσωτερικό ορθής γωνίας $x\widehat{A}y$. Π_1 και Π_2 τα συμμετρικά του Π ως προς τις πλευρές Αx και Βy. Προφανώς $\widehat{\Pi_1 \Pi \Pi_2} = 90^0$.

Υποθέτουμε ότι η ευθεία $\Pi_1\Pi_2$ τέμνει στα Κ, Λ τις πλευρές της γωνίας. Όμως τότε θα είναι $\hat{\alpha} = \widehat{\Pi_1}$ και $\hat{\beta} = \widehat{\Pi_2}$, λόγω συμμετρίας.

Επειδή $\widehat{\Pi_1} + \widehat{\Pi_2} = 90^0$ είναι και $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90^0 = \widehat{\Pi_1 \Pi \Pi_2}$. Οπότε $\hat{\omega} = 0^0$. Άρα Κ και Λ συμπίπτουν και αφού είναι σημεία των πλευρών, συμπίπτουν με το Α.

- *Το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο*. Τότε το πρόβλημα δεν έχει λύση καθώς τα ίχνη δύο υψών του είναι εξωτερικά του τριγώνου.



Σχήμα 8

Κατασκευή μιας ανακλαστικής επιφάνειας

<u>*Πρόβλημα*</u>: Στηριζόμενοι στο νόμο ανάκλασης του φωτός, να προτείνετε ανακλαστική επιφάνεια τέτοια, ώστε οι ακτίνες που εκπορεύονται από μικρό λαμπτήρα, μετά την ανάκλαση, να σχηματίζουν δέσμη παραλλήλων

<u>*Μία προσέγγιση*</u>

Για αρχή θα εργαστούμε στο επίπεδο. Έστω $\mathrm{A}(x, y)$ ένα σημείο της ανακλαστικής επιφάνειας, $\mathrm{O}(0, 0)$ η αρχή των αξόνων πάνω στην οποία έχει τοποθετηθεί η φωτεινή πηγή και $\mathrm{O}xy$ το επίπεδο που περιέχει το σημείο A, το σημείο O και είναι παράλληλο προς τη δέσμη των εξερχόμενων ακτίνων. Ο άξονας x'x είναι παράλληλος στις ακτίνες. Ας φανταστούμε μια επίπεδη επιφάνεια στη θέση $x = \alpha$, κάθετη προς τη διεύθυνση των παράλληλων ακτίνων, καθώς αυτές εξέρχονται, ώστε να αφαιρεθεί το ίδιο μήκος απ' όλους τους οπτικούς δρόμους OAA_1, OBB_1 κλπ.

Καθώς το φως κινείται σε ομογενές και ισότροπο μέσο και η ταχύτητα του φωτός c είναι ίδια παντού, σύμφωνα με την αρχή του Fermat, οι οπτικοί δρόμοι διανύονται στον ίδιο ελάχιστο χρόνο.

$t_{min} = \frac{OA+AA_1}{c} = \frac{OB+BB_1}{c} = \cdots$

οπότε:

$OA + AA_1 = OB + BB_1 = \ldots = min = σταθερά.$

Επομένως: $OA + AA_1 = σταθ$

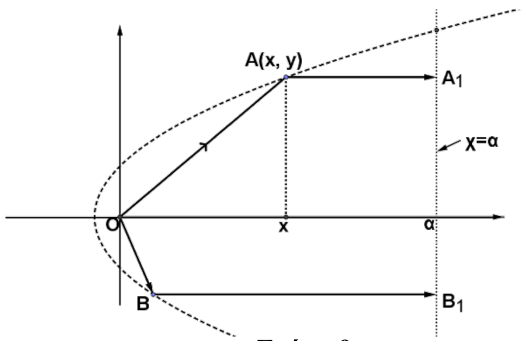
Άρα, $\sqrt{x^2+y^2} + \alpha - x = σταθ$

$\Longrightarrow \sqrt{x^2+y^2} - x = c$

$\Longrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = c + x$

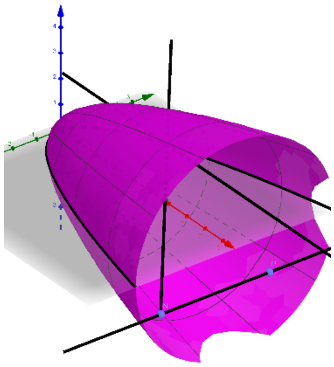
$\Longrightarrow x^2 + y^2 = c^2 + x^2 + 2cx$

$\Longrightarrow y^2 = 2cx + c^2$ *(1)*



Σχήμα 9

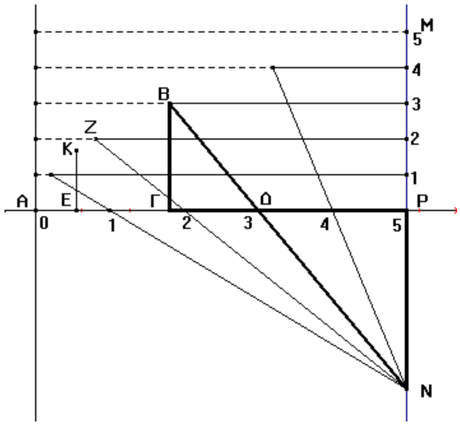
Δηλαδή οδηγούμαστε σε εξίσωση παραβολής με άξονα τον $x'x$ και με την εστία στο σημείο $(0,0)$.
Η ανακλαστική επιφάνεια που ικανοποιεί την απαίτηση του προβλήματος είναι η παραβολική, που θα προκύψει από την περιστροφή του επίπεδου σχήματος γύρω από τον άξονα (Σχήμα 10).
Προφανώς, η σταθερά c θα εξαρτηθεί από τα χαρακτηριστικά της κατασκευής.



Σχήμα 10

<u>*Πώς θα κατασκευάσουμε την παραβολή από τα χαρακτηριστικά που έχουν δοθεί*</u> (μήκος, διάμετρος κυκλικής τομής) ;
Το μήκος και η διάμετρος της κυκλικής τομής καθορίζουν μονοσήμαντα το μέγεθος του φωτιστικού σώματος.
Έστω AP το επιθυμητό μήκος του άξονα της παραβολικής επιφάνειας και PM η ημιδιάμετρος (Σχήμα 11).

Χωρίζουμε το ΜΡ σε ίσα τμήματα (στο παράδειγμα τα τμήματα είναι 5). Χωρίζουμε και το ΑΡ στον ίδιο αριθμό τμημάτων. Ορίζουμε το Ν συμμετρικό του Μ ως προς ΑΡ.
Ενώνουμε το Ν με το άκρο από το καθένα τμήμα του ΑΡ που έχουν σχηματιστεί. Οι ημιευθείες τέμνουν τα αντίστοιχα οριζόντια τμήματα σε σημεία μιας παραβολής.



Σχήμα 11

Απόδειξη:

$$B\Gamma = \frac{3}{5}\cdot MP \qquad (2)$$

$$B\Gamma\Delta \sim \Delta PN \Longrightarrow \frac{\Gamma\Delta}{\Delta P} = \frac{B\Gamma}{PN = MP} = \frac{3}{5} \Longrightarrow$$

$$\Gamma\Delta = \frac{3}{5}\cdot \Delta P = \frac{3}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\cdot AP\right) = \frac{6}{25}\cdot AP \qquad (3)$$

Οπότε :

$$A\Gamma = A\Delta - \Gamma\Delta \overset{(2),(3)}{=} \frac{3}{5}\cdot AP - \frac{6}{25}\cdot AP = \frac{9}{25}\cdot AP$$

Από την (2) προκύπτει: $\frac{B\Gamma^2}{MP^2} = \frac{9}{25} \overset{(3)}{=} \frac{A\Gamma}{AP} \Longrightarrow$

$$B\Gamma^2 = A\Gamma\cdot\frac{MP^2}{AP} \Longrightarrow B\Gamma^2 = A\Gamma\cdot\kappa \qquad (4)$$

Παρατηρούμε ότι η σχέση που συνδέει την τετμημένη ΑΓ και την τεταγμένη ΒΓ του σημείου Β είναι ανεξάρτητη του αριθμού 5 των τμημάτων και αποτελεί πράγματι εξίσωση παραβολής.

<u>*Γενίκευση*</u>

Χωρίζουμε τα τμήματα PM και AP σε ν ίσα τμήματα. Έστω Σ το σημείο της ευθείας που διέρχεται από το Ν και τη θέση $\Delta(\kappa\frac{AP}{\nu}, 0)$ και της ευθείας $y = \kappa\frac{MP}{\nu}$ (Σχήμα 12).

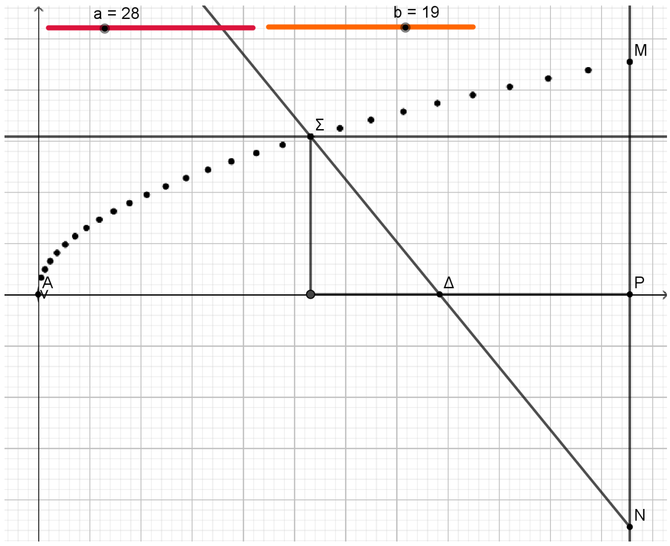
Από την ομοιότητα των τριγώνων που σχηματίζονται παίρνουμε την αντίστοιχη με του Σχήματος 11 αναλογία:

$$\frac{\kappa \frac{AP}{\nu} - x_\Sigma}{(\nu-\kappa)\frac{AP}{\nu}} = \frac{\kappa \frac{MP}{\nu}}{NP}$$

$$\Longrightarrow \frac{\kappa AP - \nu x_\Sigma}{(\nu-\kappa)AP} = \frac{\kappa}{\nu} \Longrightarrow \nu^2 x_\Sigma = \nu\kappa AP - \nu\kappa AP + \kappa^2 AP \Longrightarrow$$

$x_\Sigma = \frac{\kappa^2}{\nu^2} AP$, ενώ $y_\Sigma = \frac{\kappa}{\nu} MP$

Οπότε οι συντεταγμένες του τυχαίου σημείου Σ συνδέονται με την σχέση : $\frac{{y_\Sigma}^2}{MP^2} = \frac{x_\Sigma}{AP}$



Σχήμα 12

που δηλώνει παραβολή και είναι ανεξάρτητη του αριθμού ν.

Πού θα τοποθετήσουμε τον λαμπτήρα;

Στην εξίσωση (1) της παραβολής παρατηρούμε ότι

- για $x = 0$, η παραβολή τέμνει τον $y'y$ στις θέσεις $y_E = \pm c$
- για $y = 0$, η κορυφή της παραβλολής τέμνει τον $x'x$ στη θέση $x_E = -\frac{c}{2}$.

Έστω E η θέση του λαμπτήρα και έστω K το σημείο που τέμνει την παραβολή η κατακόρυφη από το E (Σχήμα 11).

Από την προηγούμενη παρατήρηση έχουμε ότι $AE = \frac{1}{2}EK$.

Οπότε, αν εφαρμόσουμε την εξίσωση (4) για το σημείο Κ, έχουμε :

$\kappa = \frac{MP^2}{AP} = \frac{EK^2}{EA} = \frac{4 \cdot EA^2}{EA} \Longrightarrow AE = \frac{\kappa}{4}$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

[1] https://eclass.uoa.gr/modules/document/file.php/PHYS112/14a.pdf, Σημειώσεις Οπτικής

[2] COHEN, L., MANION, L., 2000 Μεθοδολογία Εκπαιδευτικής Έρευνας, Αθήνα εκδόσεις Μεταίχμιο.

[3] EINSTEIN, A., 1997, Αιθέρας, Γεωμετρία και Εμπειρία, εκδόσεις Βάνιας,σελ 20-24.

[4] F. G.-M., 1952, Ασκήσεις Γεωμετρίας Ιησουϊτών, Αθήνα, εκδόσεις Καραβιά, θεώρημα 908 (κατασκευή ζυγού ατμομηχανής)

[5] ΑΡΓΥΡΟΠΟΥΛΟΣ Η. Et al, Ευκλείδεια Γεωμετρία Τεύχος Α', εκδόσεις ΙΤΥΕ-Διόφαντος, σελ 62, 135 - 137

[6] ΛΟΝΤΟΣ, ΧΑΡ. , Κυματική-Οπτική, ΕΚΠΑ, ιστοσελίδα φυσικής

[7] ΠΑΜΦΙΛΟΣ, Π., 2004, Εισαγωγή στη Γεωμετρία, Πανεπιστήμιο Κρήτης

[8]ΣΤΡΑΝΤΖΑΛΟΣ, Π., 2005, Σημειώσεις από τις διαλέξεις του σεμιναρίου «Ιστορία και Διδακτική των μαθηματικών»