Open Schools Journal for Open Science

Vol 6, No 1 (2023)

Open Schools Journal for Open Science - Special Issue -Πρακτικά του «3ου Μαθητικού Συνεδρίου Έρευνας και Επιστήμης»

Μέθοδοι επίλυσης και κατανόησης γραμμικών και μη γραμμικών συστημάτων

ΑΝΑΣΤΑΣΙΑ ΧΡΙΣΤΑΚΗ, ΣΟΦΙΑ ΛΥΔΑΚΗ, ΚΑΤΕΡΙΝΑ ΠΑΝΑΓΟΠΟΥΛΟΥ, ΚΑΤΕΡΙΝΑ ΠΑΠΑΓΡΗΓΟΡΑΚΗ, ΑΝΑΣΤΑΣΙΑ ΠΑΠΑΣΤΑΜΑΤΗ, ΜΑΡΑΝΙΑ ΠΕΡΙΜΕΝΗ, ΣΤΑΥΡΟΣ ΠΛΑΚΑΝΤΩΝΑΚΗΣ, ΕΥΔΟΚΙΑ ΤΣΟΥΤΣΑΝΗ, ΦΩΤΕΙΝΗ ΖΕΡΒΑ, ΑΙΚΑΤΕΡΙΝΗ ΚΑΝΕΛΟΠΟΥΛΟΥ

doi: [10.12681/osj.31901](https://doi.org/10.12681/osj.31901)

Μέθοδοι επίλυσης και κατανόησης γραμμικών και μη γραμμικών συστημάτων

1.Λυδάκη Σοφία slydaki@saintpaul.gr ***2.Παναγοπούλου Κατερίνα*** apanagopoulou@saintpaul.gr

3.Παπαγρηγοράκη Κάτια apapagrigoraki@saintpaul.gr .***4 Παπασταμάτη Αναστασία*** apapastamati@saintpaul.gr ***5.Περιμένη Μαράνια*** o.perimeni@saintpaul.gr ***6. Πλακαντωνάκης Σταύρος*** splakantonakis@saintpaul.gr ***7. Τσουτσάνη Ευδοκία*** etsoutsani@saintpaul.gr ***8. Χριστάκη Αναστασία*** achristaki@saintpaul.gr

Ελληνογαλλική σχολή ¨SAINT PAUL¨ Πειραιά *lykeio@saintpaul.gr*

Επιβλέπουσα/ων Καθηγήτρια/ης:

Ζέρβα Φωτεινή

Μαθηματικός, Ελληνογαλλική σχολή ¨SAINT PAUL¨ Πειραιά

f.zerba@member.saintpaul.gr

Κανελλοπούλου Κατερίνα

Μαθηματικός Ελληνογαλλική σχολή ¨SAINT PAUL¨ Πειραιά

akanellopoulou@saintpaul.gr

Περίληψη

Η εργασία θα επικεντρωθεί στην περιγραφή και ανάλυση μεθόδων επίλυσης τόσο γραμμικών όσο και μη γραμμικών συστημάτων. Θα ασχοληθούμε με το ερώτημα ποια από τις μεθόδους επίλυσης συστημάτων είναι κατανοητή , εύκολη στην εφαρμογή και συνηθέστερη επιλογή των μαθητών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. θα παρουσιάσουμε τρόπους επίλυσης, τόσο αλγεβρικούς όπως: αντίθετοι συντελεστές ,μέθοδος Gauss , μέθοδος Cramer, όσο και με γραφική απεικόνιση μέσω του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων και με τη βοήθεια του ψηφιακού

προγράμματος γραφικών geogebra. Θα εξετάσουμε τι εκφράζει σε κάθε περίπτωση η λύση του εκάστοτε συστήματος. Τα συστήματα δε θα τα δούμε αυστηρά αλγεβρικά αλλά και μέσα από προβλήματα άλλων επιστημών όπως της χημείας, της γεωμετρίας και της οικονομίας. Οι παραπάνω μέθοδοι παρουσιάστηκαν σε μαθητές λυκείου και εξαγάγαμε χρήσιμα συμπεράσματα σχετικά με το ερώτημα της εργασίας μας. Αναμένουμε να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα ότι η γραφική επίλυση ενός συστήματος είναι αποτελεσματικότερος τρόπος κατανόησης της λύσης του τόσο σε απλά όσο και σε πολυπλοκότερα συστήματα .

Λέξεις κλειδιά : Μαθηματικά, Συστήματα , μέθοδοι επίλυσης, Gauss, Cramer, geogebra

Εισαγωγή

Κάνοντας μια ιστορική αναδρομή περίπου διαπιστώνουμε ότι το 300 π.χ οι αρχαίοι Βαβυλώνιοι είχαν βρει τη λύση 2x2 συστημάτων , οι Κινέζοι χρησιμοποιούσαν μια μέθοδο επίλυσης συστημάτων που πλησίαζε σε φιλοσοφία τη μέθοδο Gauss.Ο Έλληνας μαθηματικός Διόφαντος στο έργο του «Αριθμητικά» έχει προβλήματα που η λύση τους πραγματοποιείται με τη βοήθεια γραμμικών συστημάτων. Ο τρόπος λύσης τους πλησιάζει αρκετά το σημερινό τρόπο σκέψης. Πρώτη φορά λύθηκαν συστήματα με τη βοήθεια οριζουσών από τον C.MacLaurin το 1729. Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή με το όνομα Cramer. Αργότερα ο Gauss, κοντά στο 1801 στην εργασία του Disquisitiones arithmeticae εισάγει τον όρο «ορίζουσα» και χρησιμοποιεί τη μέθοδο απαλοιφής για τη λύση συστήματος 6x6.Βέβαια με τη σημερινή σημασία η έννοια της ορίζουσας χρησιμοποιήθηκε από τον Cauchy.

Μέθοδοι επίλυσης

Γραμμικά συστήματα

Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση η λύση των συστημάτων προσεγγίζεται τόσο αλγεβρικά όσο και γραφικά. Αρχικά δουλεύουμε τις μεθόδους της αντικατάστασης και αυτή των αντίθετων συντελεστών όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα.

Παράδειγμα 1 : Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+y=4 \end{cases}$

Με τη μέθοδο της αντικατάστασης

$$\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4-x=5 \\ y=4-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση $(\mathrm{x},\mathrm{y})=(1{,}3)$

Παράδειγμα 2 : Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 4x+2y=1 \end{cases}$

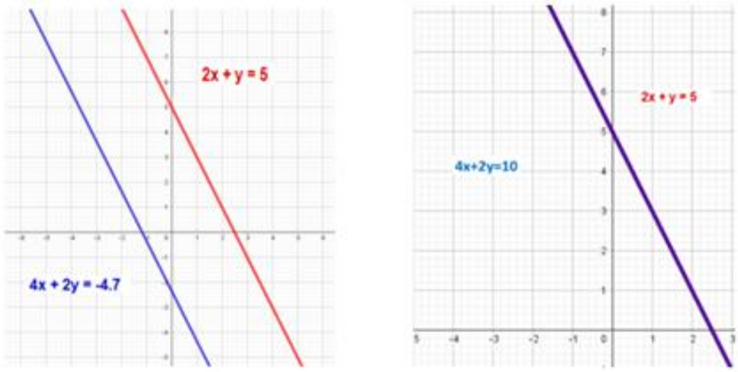
Με τη μέθοδο αντίθετων συντελεστών.

$\begin{array}{r|l} -2 & 2x+y=5 \\ 1 & 4x+2y=1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x-2y=-10 \\ 4x+2y=1 \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} 0=-9$. Άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

Παράδειγμα 3 : Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 4x+2y=10 \end{cases}$

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{-2} & 2x+y=5 \\ \mathbf{1} & 4x+2y=10 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x-2y=-10 \\ \ \ 4x+2y=10 \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} 0=0$$.Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Η γραφική τους απεικόνιση μας βοηθάει να αντιληφθούμε τι ακριβώς εκφράζει η λύση των δύο παραπάνω παραδειγμάτων. Η λύση μέσω γραφήματος οπτικοποιεί την λύση του συστήματος(Σχ.1)



Σχήμα 1 *https://www.geogebra.org/m/qhyz3ubn*

Μη γραμμικά συστήματα

Αντίστοιχα λύνουμε και μη γραμμικά συστήματα, δηλαδή συστήματα που οι εξισώσεις τους δεν εκφράζουν ευθείες αλλά άλλες καμπύλες.

Παράδειγμα 4 : Να λυθεί το μη γραμμικό σύστημα $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x\cdot y=6 \end{cases}$

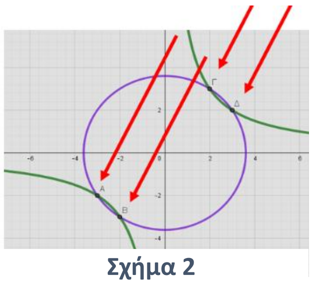
$$\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x\cdot y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\left\{\frac{6}{x}\right\}^2=13 \\ y=\frac{6}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} x^4-13x^2+36=0 \ (1) \\ y=\frac{6}{x} \end{cases}$$

Η (1) είναι διτετράγωνη. Θέτουμε $x^2=w$. Οπότε έχουμε $w^2-13w+36=0$

Με λύσεις $w=4$ και $w=9$ προκύπτουν $\mathrm{x}=2$ ή $\mathrm{x}=-2$ ή $\mathrm{x}=3$ ή $\mathrm{x}=-3$.

Άρα οι λύσεις είναι $\mathrm{A}(-3,2)$, $\mathrm{B}(-2,-3)$, $\Gamma(2,3)$, $\Delta(3,2)$

Γραφικά η λύση δίνει τα σημεία τομής του κύκλου και της υπερβολής(Σχ.2)



Σχήμα 2

Παραμετρικά συστήματα

Υπάρχουν συστήματα στα οποία μια τουλάχιστον γραμμή μεταβάλλεται. Τα λεγόμενα παραμετρικά συστήματα λύνονται ανάλογα με τα απλά συστήματα διακρίνονται περιπτώσεις για τις τιμές της παραμέτρου.

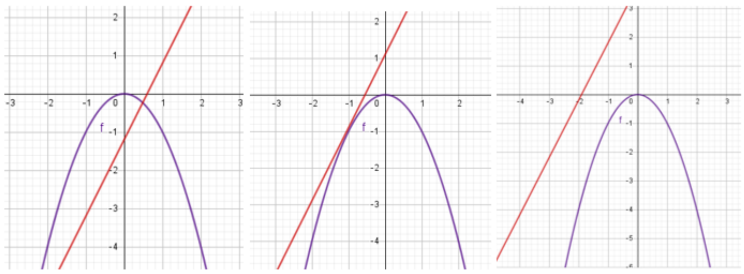
Παράδειγμα 5: Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} y=-x^2 \ \ (1) \\ y=2x+m \ \ (2) \end{cases}$ για $\mathrm{m}\in\mathbb{R}$.

Με αντικατάσταση της (1) στην (2) έχουμε $-x^2 = 2x + m \Leftrightarrow x^2 + 2x + m = 0$

$$\Delta = 4 - 4m$$

- Αν $\Delta > 0 \Leftrightarrow 4 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < 1$ οι δύο γραμμές έχουν 2 κοινά σημεία.
- Αν $\Delta < 0 \Leftrightarrow 4 - 4m < 0 \Leftrightarrow m > 1$ οι δύο γραμμές δεν έχουν κοινά σημεία.
- Αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow 4 - 4m = 0 \Leftrightarrow m = 1$ οι δύο γραμμές έχουν 1 κοινό σημείο.

Γραφικά εύκολα παρατηρούμε τις τρεις διαφορετικές περιπτώσεις στις λύσεις του συστήματος που προκύπτουν από τις διαφορετικές τιμές της παραμέτρου(Σχ.3)



Σχήμα 3 https://www.geogebra.org/m/vbvghhyw

Μέθοδος Cramer

Ένα από τα βασικά προβλήματα της γραμμικής άλγεβρας είναι η λύση συστημάτων της μορφής . Η λύση αυτών γίνεται και με την βοήθεια των οριζουσών. Βέβαια δεν είναι η ιδανικότερη μέθοδος για μεγαλύτερα από 3x3 συστήματα , διότι πρέπει να υπολογιστούν πολλές ορίζουσες. Η μέθοδος Cramer για 3x3 συστήματα ακολουθεί την ίδια φιλοσοφία με τον τρόπο των οριζουσών που μάθαμε στη Β λυκείου για τα 2x2 συστήματα.

Παράδειγμα 6: Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$

$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $D_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

Έχει μοναδική λύση $x = \frac{D_x}{D} = 1 \; και \; y = \frac{D_y}{D} = -1$. Οπότε $(x, y) = (1, -1)$

Παράδειγμα 7: Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x + 2y + 3w = 1 \\ 2x + 3y + w = -1 \\ 3x + 2y - w = 2 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -10$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -27$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 19$$

$$D_w = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -11$$

Έχει μοναδική λύση $x = \frac{D_x}{D} = \frac{27}{10}$, $y = \frac{D_y}{D} = -\frac{19}{10}$, $w = \frac{D_w}{D} = \frac{11}{10}$

Μέθοδος GAUSS

Η μέθοδος Gauss χρησιμοποίει την λογική των αντίθετων συντελεστών με σκοπό να δημιουργηθεί ένα κλιμακωτό απλό σύστημα. Χρησιμοποιείται και σε συστήματα nxn με $\mathrm{n} > 3$.

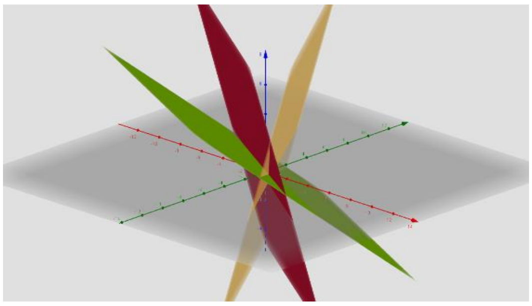
Παράδειγμα 8: Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x + 2y + 3w = 1 \\ 2x + 3y + w = -1 \\ 3x + 2y - w = 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} x + 2y + 3w = 1 \quad (-\mathbf{2}) \\ 2x + 3y + w = -1 \\ 3x + 2y - w = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 4y - 6w = -2 \\ 2x + 3y + w = -1 \\ 3x + 2y - w = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3w = 1 \quad (-3) \\ -y - 5w = -3 \\ 3x + 2y - w = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\,x - 6y - 9w = -3 \\ -y - 5w = -3 \\ 3x + 2y - w = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3w = 1 \\ -y - 5w = -3\;(-4) \\ -4y - 10w = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3w = 1 \\ -y - 5w = -3 \\ 10w = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{27}{10} \\ y = -\frac{19}{10} \\ w = \frac{11}{10} \end{cases}$$

Εύκολα μπορούμε να φανταστούμε αλλά και να διαπιστώσουμε γραφικά το σημείο τομής των τριών επιπέδων που εκφράζουν οι τρείς εξισώσεις. Η γραφική απεικόνιση με τη βοήθεια του προγράμματος geogebra είναι ιδιαίτερα διαφωτιστική για τους μαθητές(Σχ.4).



Σχήμα 4 https://www.geogebra.org/m/azf3cd3r

Πρόβλημα οικονομίας

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια συνάρτηση «ζήτησης» και μια συνάρτηση «εφοδιασμού» . Η πρώτη εκφράζει το ποσό που απαιτείται για την παραγωγή ενός αγαθού ως συνάρτηση των παραγόμενων μονάδων , ενώ η δεύτερη μία συνάρτηση που εκφράζει το ποσό που αναμένεται από την παραγωγή του ίδιου αγαθού ως συνάρτηση των παραγόμενων μονάδων. Όταν το ποσό ζήτησης είναι ίσο με το ποσό εφοδιασμού, τότε επιτυγχάνεται η λεγόμενη ισορροπία εφοδιασμού της αγοράς.

Έστω η $f(x) = 0{,}04x^2 - 0{,}1x + 3$ και $g(x) = -0{,}01x^2 - 0{,}2x + 9$.

Σχήμα 5

Λύνοντας το σύστημα των δυο παραβολών βρίσκουμε τις ποσότητες των παραγόμενων μονάδων που απαιτούνται για να έχουμε ισορροπία.
$x = 10$ ή $x = -12$(απορρίπτεται) , $x \geq 0$.

Πρόβλημα χημείας

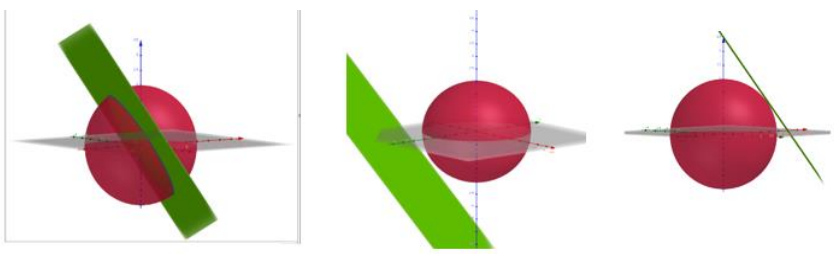
Ένας χημικός έχει τρία διαλύματα από το ίδιο οξύ. Το πρώτο περιέχει 50% οξύ, το δεύτερο 10% οξύ και το τρίτο 30% οξύ. Ο χημικός θέλει να παρασκευάσει 52lit διάλυμα περιεκτικότητας 32% σε οξύ, χρησιμοποιώντας και τα τρία διαλύματα και μάλιστα η ποσότητα του πρώτου διαλύματος να είναι διπλάσια από τη ποσότητα του τρίτου διαλύματος. Να βρείτε πόσα λίτρα από κάθε διάλυμα θα χρησιμοποιήσει.
Αν x, y , z οι ποσότητες των διαλυμάτων για την παρασκευή 52lt νέου τότε
$\mathrm{x + y + z = 52}$. Η περιεκτικότητα του νέου διαλύματος σε οξύ είναι $\frac{32}{100}52$.
Όμοια οι αντίστοιχες περιεκτικότητες των διαλυμάτων x , y , z είναι $\frac{50}{100}x$, $\frac{10}{100}y$ και $\frac{30}{100}z$. Οπότε $\frac{50}{100}\mathrm{x} + \frac{10}{100}\mathrm{y} + \frac{30}{100}\mathrm{z} = \frac{32}{100}52$
Η ποσότητα του πρώτου διαλύματος είναι διπλάσια του τρίτου: $\mathrm{x = 2z}$.

Και λύνουμε το 3x3 σύστημα $\begin{cases} \mathrm{x + y + z = 52} \\ \frac{50}{100}\mathrm{x} + \frac{10}{100}\mathrm{y} + \frac{30}{100}\mathrm{z} = \frac{32}{100}52 \\ \mathrm{x = 2z.} \end{cases}$

Με λύση $(x, y, z) = (22.88 , 17.68, 11.44)$

Πρόβλημα γεωμετρίας

Πολυπλοκότερα συστήματα δημιουργούνται στο πεδίο της στερεομετρίας όπως μεταξύ στερεών σχημάτων και επιπέδων.



Σχήμα 6 https://www.geogebra.org/m/fd6zxvgc

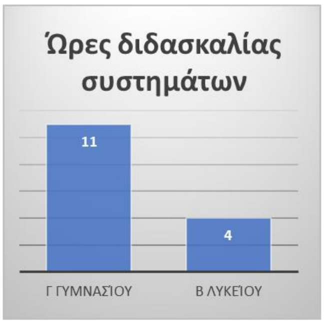
Στο Σχήμα 6 βλέπουμε την σχετική θέση σφαίρας και επιπέδου.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x + y + z = m \end{cases} \quad m \in \mathbb{R}$$

Αποτελέσματα έρευνας

Μετά από παρουσίαση των μεθόδων επίλυσης συστημάτων σε μαθητές της Β΄ λυκείου συμπληρώθηκε ένα ηλεκτρονικό ερωτηματολόγιο από 51 μαθητές και εξαγάγαμε τα παρακάτω αποτελέσματα. Καταγράψαμε ότι το 66% των μαθητών κατανοεί καλύτερα τη σημασία της λύσης και τι απεικονίζεται με τη γραφική επίλυση. Το 86% δήλωσε ως πιο οικία την αλγεβρική λύση και το 80% την θεωρεί πιο εύχρηστη στην πράξη. Το 55% ισχυρίζεται ότι καλό θα ήταν να συμπληρώνει η γραφική την αλγεβρική επίλυση για καλύτερη κατανόηση και το 37% το θεωρεί αναγκαίο. Ο πιο συχνός τρόπος διδασκαλίας είναι η αλγεβρική επίλυση κατά τη γνώμη του 62% των μαθητών. Στα σχολικά βιβλία το 82% δήλωσε συχνότερα επιλέγεται η αλγεβρική μέθοδος. Οι μαθητές πιστεύουν περίπου το 40% ότι γνώσεις προγενέστερων τάξεων απαιτούνται στα μεν γραμμικά συστήματα για την αλγεβρική λύση και στα μη γραμμικά συστήματα για τη γραφική επίλυση. Η μέθοδος που ελαχιστοποιεί την πιθανότητα λάθους είναι η αλγεβρική κατά 68% σύμφωνα με τα αποτελέσματα τις έρευνας. Το 67% των ερωτηθέντων ισχυρίστηκε πως μπορεί να γίνει γρηγορότερα η επαλήθευση της λύσης με την βοήθεια αλγεβρικών υπολογισμών.

Ερευνώντας τα σχολικά βιβλία και το πρόγραμμα σπουδών παρατηρήσαμε ότι αντιστοιχούν 11 ώρες στο γυμνάσιο και 4 ώρες στην Β λυκείου στη διδασκαλία των συστημάτων(Σχ.7)Αν και οι εκπαιδευτικοί παροτρύνονται από το βιβλίο του καθηγητή να αφιερώνουν χρόνο και στην γεωμετρική ερμηνεία των συστημάτων το σχολικό βιβλίο του γυμνασίου έχει πιο πολλές ασκήσεις για αλγεβρική επίλυση από ότι για γραφική ενώ στη Β λυκείου αφιερώνεται περισσότερος χρόνος στα μη γραμμικά καθώς και στη γεωμετρική ερμηνεία αυτών. Στο σχολικό βιβλίο της άλγεβρας του λυκείου υπάρχουν παραμετρικά συστήματα όμως δεν συνίσταται η μελέτη τους(Σχ.8).Και στις δύο βαθμίδες τα σχολικά βιβλία έχουν αρκετά προβλήματα που η λύση τους απαιτεί τη δημιουργία συστημάτων.(Σχ.9) Είναι σημαντικό εδώ να αναφέρουμε ότι δεν υπάρχει κάποια αναφορά για τα πλεονεκτήματα ή τα μειονεκτήματα των μεθόδων στην επίλυση συστημάτων.



Σχήμα 7

Σχήμα 8

Σχήμα 9

Συμπεράσματα

Αν και η γραφική λύση των συστημάτων κατά γενική ομολογία των μαθητών αποτελεί έναν χρήσιμο τρόπο κατανόησης της λύσης μια και την οπτικοποιεί, δεν αποτελεί την επικρατέστερη επιλογή των μαθητών. Οι μαθητές έχουν μεγαλύτερη εξοικείωση με τις αλγεβρικές μεθόδους, διότι δεν έχουν αποκτήσει ιδιαίτερη ευχέρεια στην εφαρμογή της γραφικής, γεγονός που εξηγείται όπως έδειξε η έρευνα από τις δυσανάλογες ώρες διδασκαλίας των δύο μεθόδων από τους εκπαιδευτικούς.

Βιβλιογραφία

Strang, Gilbert.,2008. *Γραμμική άλγεβρα*, Μεταφράστηκε από Αγγλικά από Π.Παμβιλος. Κρήτη: Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

Κρόκος, Ι., 2006. *Γραμμική άλγεβρα*. Αθήνα : Αρνός

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργήρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ. και Σβέρκος, Α., 2012, *Άλγεβρα Β΄ Λυκείου*. Αθήνα: Ινστιτούτο τεχνολογίας υπολογιστών και εκδόσεων «Διόφαντος»

Αργυράκης, Δ., Βουργάνας, Π., Μεντής, Κ., Τσικοπούλου, Σ. και Χρυσοβέργης, Μ., 2020,*Μαθηματικά Γ γυμνασίου.* Αθήνα: Ινστιτούτο τεχνολογίας υπολογιστών και εκδόσεων «Διόφαντος»

Χατζοπούλου,Χ.,2020. *Διδασκαλία και μάθηση γραμμικών συστημάτων στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση με χρήση της ιστορίας*. Διπλωματική εργασία[online].Θεσσαλονίκη: Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας. Διαθέσιμο στο: https://dspace.uowm.gr/xmlui/bitstream/handle/123456789/1819/Chatzopoulou%20Chrysanthi.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Χαραλάμπους,Χ.,2009.*Βασικές έννοιες γραμμικής άλγεβρας*.[online] Διαθέσιμο από: https://eclass.uoa.gr/modules/document/file.php/ECON220/%CE%99%CF%83%CF%84%CE%BF%CF%81%CE%AF%CE%B1%20%CF%84%CE%B7%CF%82%20%CE%93%CF%81%CE%B1%CE%BC%CE%BC%CE%B9%CE%BA%CE%AE%CF%82%20%CE%86%CE%BB%CE%B3%CE%B5%CE%B2.pdf

Τζελέπης, Α., Μανιατοπούλου, Α., Αρμάος, Π., Αρμού, Α. και Καλαφάτη, Μ.,2015. *Προβλήματα και εφαρμογές της Β λυκείου*. Εργασία[online].Αθήνα: Πρότυπο Πειραματικό λύκειο Ευαγγελικής σχολής Σμύρνης. Διαθέσιμο στο: http://lyk-evsch-n-smyrn.att.sch.gr/wordpress/wp-content/uploads/Ekpaideutiko_Yliko/Tzelepis/Algebra-B-Lykeiou-Problimata.pdf

ΙΕΠ,2020.Ύλη και οδηγίες και διδασκαλίας για τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση κατά το σχολικό έτος 2020-2021. Διαθέσιμο από: http://iep.edu.gr/el/graf-b-yliko

Παράρτημα

μέθοδος Cramer

$$\begin{cases} \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}w = \gamma_1 \\ \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}w = \gamma_2 \\ \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}w = \gamma_3 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{13} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix}$$

$D_x = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \gamma_2 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \gamma_3 & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$, $D_y = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \gamma_1 & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \gamma_2 & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \gamma_3 & \alpha_{33} \end{vmatrix}$ και $D_w = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \gamma_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \gamma_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \gamma_3 \end{vmatrix}$

- ✓ Αν D$\neq$ 0 τότε έχουμε μοναδική λύση $x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$ και $w = \frac{D_w}{D}$
- ✓ Αν $D = 0$ και $D_x \neq 0$ ή $D_y \neq 0$ ή $D_w \neq 0$το σύστημα είναι ΑΔΥΝΑΤΟ
- ✓ Αν $D = D_x = D_y = D_w = 0$ το σύστημα έχει ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Ερωτηματολόγιο έρευνας

https://forms.office.com/Pages/DesignPage.aspx?fragment=FormId%3DKicHnHsbJUugQqh1WMgaCbSZfoTc0BZKoGs63bTH1BpUOUoyT0dJNFM3VU5VUlk4UzFLOURTU09ZSC4u%26Token%3D4b598249b1c748489c6c1d05b826d6a8