ePublishing

Open Schools Journal for Open Science

Vol 6, No 1 (2023)

Open Schools Journal for Open Science - Special Issue -Πρακτικά του «3ου Μαθητικού Συνεδρίου Έρευνας και Επιστήμης»

Παλινδρόμηση και Εφαπτομένη Αποκατάσταση της Θερμικής Ισορροπίας

Ορφέας Πανούτσος , Μιχάλης Χανιώτης , Θέμις Καψή, Θεόδωρος Σφυρής

doi: 10.12681/osj.32005

Copyright © 2023, Ορφέας Πανούτσος , Μιχάλης Χανιώτης , Θέμις Καψή, Θεόδωρος Σφυρής

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0.

To cite this article:

Πανούτσος Ο., Χανιώτης Μ., Καψή Θ., & Σφυρής Θ. (2023). Παλινδρόμηση και Εφαπτομένη Αποκατάσταση της Θερμικής Ισορροπίας. *Open Schools Journal for Open Science*, *6*(1). https://doi.org/10.12681/osj.32005

https://epublishing.ekt.gr | **e-Publisher:** EKT | **Downloaded at:** 23/01/2026 20:47:50

https://epublishing.ekt.gr | **e-Publisher:** EKT | **Downloaded at:** 23/01/2026 20:47:50

Παλινδρόμηση και Εφαπτομένη Αποκατάσταση της Θερμικής Ισορροπίας

Πανούτσος Ορφέας, Χανιώτης Μιχάλης,
Ιδιωτικό Λύκειο Νέα Εκπαιδευτήρια Γ. Μαλλιάρας Α.Ε.
orpheaspanoutsos@gmail.com, chaniotismich88@gmail.com

Επιβλέπουσα/ων Καθηγήτρια/ής: Καψή Θέμις, Σφυρής Θεόδωρος
Ειδικότητες: ΠΕ03, ΠΕ86/ΠΕ04.01
Σχολείο: Ιδιωτικό Λύκειο Νέα Εκπαιδευτήρια Γ. Μαλλιάρας Α.Ε.
themida@gmail.com, spheeris.theodore@maliaras.gr

Περίληψη

Στην εργασία αυτή θα προσδιορίσουμε το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει καλύτερα το φυσικό φαινόμενο της αποκατάστασης θερμικής ισορροπίας μεταξύ δύο συστημάτων. Κατασκευάστηκε σύστημα καταγραφής μετρήσεων, καταγράφηκαν οι θερμοκρασία σε δύο περιπτώσεις και έγινε επεξεργασία με μαθηματικά εργαλεία. Πρόκειται για την προσέγγιση της καμπύλης μετρήσεων με γνωστές συναρτήσεις και επιλογή – προσέγγιση τμημάτων καμπύλης με εφαπτομένη. Ως προς τη μεθοδολογία, οι προσεγγίσεις έγιναν με την απλή γραμμική παλινδρόμηση και με την μη γραμμική παλινδρόμηση. Οι προσεγγίσεις εξετάζονται με βάση τον ρυθμό μεταβολής που αντίστοιχα προκύπτει και συγκρίνεται με την τιμή που λαμβάνεται αντίστοιχα από τα πειραματικά δεδομένα.
Αναμένεται η μη γραμμική προσέγγιση να είναι πιο κοντά στην περιγραφή του φαινομένου, με βάση και τον ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας.

Λέξεις κλειδιά: Arduino, θερμοκρασία, παλινδρόμηση, εφαπτομένη.

1. Το φυσικό φαινόμενο και το όργανο μέτρησης

1.1. Το φαινόμενο της αποκατάστασης θερμικής ισορροπίας

Ως φυσικό φαινόμενο επελέγη η αποκατάσταση της θερμικής ισορροπίας μεταξύ μιας ποσότητας νερού και του περιβάλλοντος σε δύο περιπτώσεις, με την αρχική θερμοκρασία του νερού να είναι υψηλότερη/χαμηλότερη από εκείνη του περιβάλλοντος.

1.2. Το όργανο μέτρησης και καταγραφής της θερμοκρασίας

Αρχικά σχεδιάστηκε, κατασκευάστηκε και προγραμματίστηκε το όργανο καταγραφής των μετρήσεων της θερμοκρασίας του περιβάλλοντος αλλά και της ποσότητας του νερού που χρησιμοποιήθηκε σε συνάρτηση με τον χρόνο. Το σύστημα καταγραφής των μετρήσεων (Data Logger) υλοποιήθηκε με το αναπτυξιακό σύστημα Arduino UNO Rev3 και ως αισθητήριο θερμοκρασίας επελέγη το DS18B20.
Το θερμόμετρο που χρησιμοποιήθηκε για να ληφθούν οι μετρήσεις είναι ένα αδιάβροχο θερμόμετρο για να μπορεί να βυθίζεται μέσα στο νερό. Το συγκεκριμένο όργανο έχει στο εσωτερικό του ένα ψηφιακό αισθητήριο και απ' έξω περιβάλλεται από ένα μεταλλικό περίβλημα και ανάμεσα στο αισθητήριο και το περίβλημα υπάρχει αέρας.
Οι μετρήσεις καταγράφονται αυτόματα σε αρχείο Excel (Microsoft) ανά τακτά χρονικά διαστήματα. Επελέγη να καταγράφεται η θερμοκρασία ανά 30 δευτερόλεπτα.

1.3. Περιγραφή Πειράματος

Στην πειραματική μελέτη της εργασίας μετρήθηκε ανά 30 δευτερόλεπτα το φαινόμενο της αποκατάστασης τη θερμικής ισορροπίας μεταξύ μιας ποσότητας νερού και του περιβάλλοντος σε δύο διαφορετικές περιπτώσεις : i) από ένα παγάκι που περιμένουμε να έρθει σε θερμοκρασία περιβάλλοντος και ii) από βρασμένο νερό που περιμένουμε επίσης να έρθει σε θερμοκρασία περιβάλλοντος. Οι μετρήσεις τοποθετήθηκαν σε πίνακα excel και στη συνέχεια ξεκίνησε η ερευνητική διερεύνηση του best fit line.

2. Η μαθηματική προσέγγιση

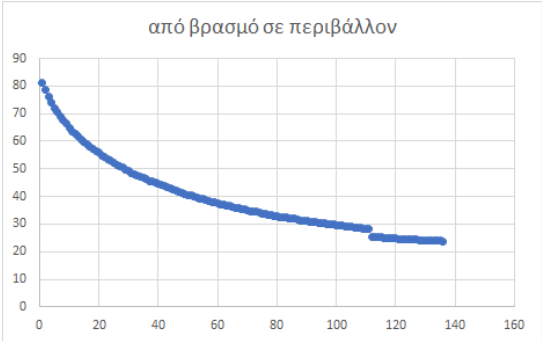
Η σχέση που υφίσταται μεταξύ δύο μεταβλητών δύναται να περιγραφεί με την απλή γραμμική παλινδρόμηση. Με την απλή γραμμική παλινδρόμηση (simple linear regression), εξετάστηκε η σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην ανεξάρτητη μεταβλητή *X* (independent or input variable) που στο πείραμα είναι ο χρόνος και στην εξαρτημένη μεταβλητή *Y* (dependent or response variable), που στο πείραμα είναι η θερμοκρασία. Αυτή προσεγγίστηκε αρχικά από τη γραμμική συνάρτηση του X, Y = βX + α, με βάση τις εξισώσεις (slope formula) για τη γραμμική παλινδρόμηση, όπου:

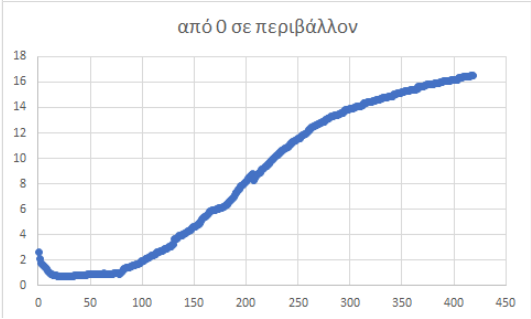
$$\alpha = \frac{(\sum y)(\sum x^2) - (\sum x)(\sum xy)}{n(\sum x^2) - (\sum x)^2} \qquad \beta = \frac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{n(\sum x^2) - (\sum x)^2} \quad (1)$$

3. Ερευνητική Διαδικασία

3.1. Οι καμπύλες που προκύπτουν από τις δύο περιπτώσεις αποκατάστασης θερμικής ισορροπίας

Από τα δεδομένα των δύο πειραμάτων προέκυψαν τα ακόλουθα διαγράμματα:

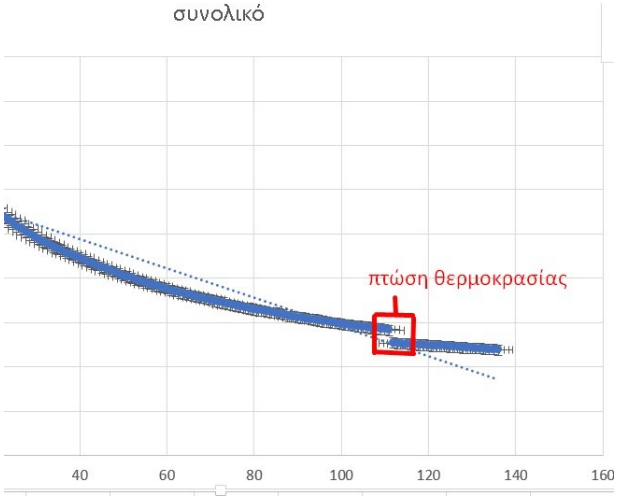




Σχήμα 1: Απεικόνιση των μετρήσεων που καταγράφηκαν.

όπου ως μονάδα χρόνου θεωρήθηκε το διάστημα των 30 δευτερολέπτων

3.1.1. Παρατηρήσεις στο διάγραμμα των μετρήσεων «Από βρασμό σε περιβάλλον»



Σχήμα 2: Η σημαντική πτώση της θερμοκρασίας

Παρατηρείται σημαντική πτώση της θερμοκρασίας (από 28°C σε 25°C) τριών περίπου βαθμών.
Υπάρχει μια πληθώρα παραγόντων οι οποίοι μπορεί να συμβάλλουν σε αυτή την αλλαγή.
Αρχικά, το νερό έβραζε πριν αρχίσει η πτώση της θερμοκρασίας. Όταν η θερμοκρασία έφτασε στους 28°C βαθμούς, ενδέχεται να υπήρξε κάποια ανθρώπινη παρεμβολή, όπως η μετακίνηση του σώματος σε άλλο σημείο του δωματίου, όπου ψύχεται περισσότερο. Ακόμη, πιθανόν είναι να υπάρχει κατασκευαστικό λάθος στα μέσα με τα οποία έγιναν οι μετρήσεις. Επίσης, υπάρχει περίπτωση το δοχείο με το νερό να ήρθε σε επαφή με κάποια κρύα επιφάνεια, συντελώντας στην περεταίρω πτώση της θερμοκρασίας.

Εξετάζεται η πιθανότητα ύπαρξης σφάλματος κατά τη μέτρηση:

Πιθανές αιτίες σφάλματος:

1. Απότομη μείωση της θερμοκρασίας της ατμόσφαιρας.
2. Ανθρώπινη παρέμβαση όπως επαφή του ανθρώπινου χεριού με το θερμόμετρο ή με το δοχείο.
3. Αλλαγή της θέσης του δοχείου με αποτέλεσμα να εκτεθεί σε διαφορετικές περιβαλλοντικές συνθήκες.
4. Στιγμιαία δυσλειτουργία του αισθητήρα θερμοκρασίας (να σημειωθεί πως οι υπόλοιπες μετρήσεις μετά από την συμφωνούν με την απότομη μεταβολή

της θερμοκρασίας του νερού οπότε δεν είναι πιθανή η ύπαρξη αυτού του σφάλματος—Θα μελετηθεί με τη διασπορά).

5. Πιθανότατα προστέθηκε εσφαλμένα μια μικρή ποσότητα κρύου νερού στο το δοχείο π.χ. οι υδρατμοί από την εξάτμιση του νερού να υγροποιήθηκαν και να έπεσαν στο δοχείο (πιθανή εξήγηση για το γεγονός ότι οι υπόλοιπες μετρήσεις μετά από συμφωνούν με την απότομη μεταβολή της θερμοκρασίας του νερού, δεδομένου ότι η ποσότητα της θερμότητας που απαιτείται για την μεταβολή της θερμοκρασίας ενός σώματος είναι ανάλογη της μάζας του)

$$Q = m \times c \times \Delta\theta$$

(Θεμελιώδης Νόμος Θερμιδομετρίας)

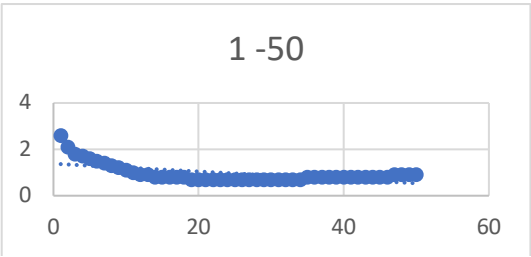
όπου Q η ποσότητα της θερμότητας που μεταφέρεται από ή προς το σώμα που έχει μάζα m, με Δθ η μεταβολή της θερμοκρασίας του σώματος και c μια σταθερά που εξαρτάται από το υλικό του σώματος (ειδική θερμότητα)

3.1.2. Παρατηρήσεις στο διάγραμμα των μετρήσεων «Από 0℃ σε περιβάλλον»

Τα ερωτήματα που προκύπτουν είναι:

i) Γιατί η θερμοκρασία του πάγου αρχικά δείχνει να ελαττώνεται αφότου εκτίθεται σε θερμοκρασία περιβάλλοντος ενώ θα περίμενε κανείς να αυξάνεται; Γιατί η αρχική θερμοκρασία του πάγου(σε => 2,6°C), η οποία θα έπρεπε να είναι η χαμηλότερη, είναι υψηλότερη από τη μικρότερη τιμή που έχει εμφανιστεί στο γράφημα (σε => 0,7 °C);

Αυτό συμβαίνει διότι:
Το αισθητήριο που χρησιμοποιήθηκε για να παρθούν οι μετρήσεις είναι ένα αδιάβροχο αισθητήριο για να μπορεί να βυθίζεται μέσα στο νερό. Το συγκεκριμένο όργανο έχει στο εσωτερικό του το αισθητήριο και απ' έξω περιβάλλεται από ένα μεταλλικό περίβλημα και ανάμεσα στο αισθητήριο και το περίβλημα υπάρχει αέρας. Επομένως το χρονικό διάστημα από που παρατηρήθηκε ότι η καμπύλη πέφτει μέχρι να σταθεροποιηθεί η θερμοκρασία στους περίπου 0,7°C, είναι το χρονικό διάστημα που χρειάζεται μέχρι το αισθητήριο της θερμοκρασίας να έρθει σε θερμική ισορροπία με το μίγμα του πάγου - νερού.
Στο διάγραμμα, => 2,6°C έως => 0,7°C παρατηρείται αρνητική μεταβολή (ελάττωση)



Σχήμα 3: Η αρνητική μεταβολή της θερμοκρασίας

ii) Γιατί από έως το χρονικό διάστημα t=12 έως περίπου t=79 μονάδες χρόνου η θερμοκρασία παραμένει σχετικά σταθερή με πολύ μικρή απόκλιση;

Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι αυτή τη χρονική διάρκεια η φυσική κατάσταση του νερού είναι στερεή (πάγος) που σταδιακά τήκεται (πάγος και νερό). Ο πάγος όσο μεταβάλλει τη φυσική του κατάσταση, δηλαδή σε όλη τη διάρκεια της τήξης, διατηρεί τη θερμοκρασία του σταθερή στους 0 °C. Η θερμική ενέργεια που απορροφά ο πάγος από το περιβάλλον λέγεται λανθάνουσα θερμότητα. Μόνο αφότου ολοκληρωθεί η τήξη του πάγου σε νερό, αρχίζει να ανεβαίνει η θερμοκρασία και να εξισορροπείται με τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος. Παρατηρείται επίσης ότι όσο το νερό πλησιάζει προς τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας μειώνεται μέχρι να αποκατασταθεί η θερμική ισορροπία.

3.2. Υπολογισμοί για την απλή γραμμική παλινδρόμηση

Έγινε προσέγγιση της καμπύλης με βάση τη θεωρία της απλής γραμμικής παλινδρόμησης στο σύνολο των μετρήσεων.

3.2.1. Υπολογισμός Απλής Γραμμικής Παλινδρόμησης στην περίπτωση «Από 0°C σε περιβάλλον»

Με βάση τις εξισώσεις (slope formula) για τη γραμμική παλινδρόμηση , υπολογίστηκαν στο excel τα εξής:

$$\alpha = \frac{(\sum y)(\sum x^2) - (\sum x)(\sum xy)}{n(\sum x^2) - (\sum x)^2} \qquad b = \frac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{n(\sum x^2) - (\sum x)^2}$$

I. Το Sum του x, του y, του x^2, του y^2 και του xy χρησιμοποιώντας εξισώσεις του excel (SUM για το άθροισμα, SUMSQ για το άθροισμα των τετραγώνων, SUMPRODUCT για το άθροισμα των γινομένων των αντίστοιχων μετρήσεων του x,y)

II. Τα sum αντικαταστάθηκαν στους τύπους, καθώς και το n=419, έτσι ώστε να βρεθούν τα α, β

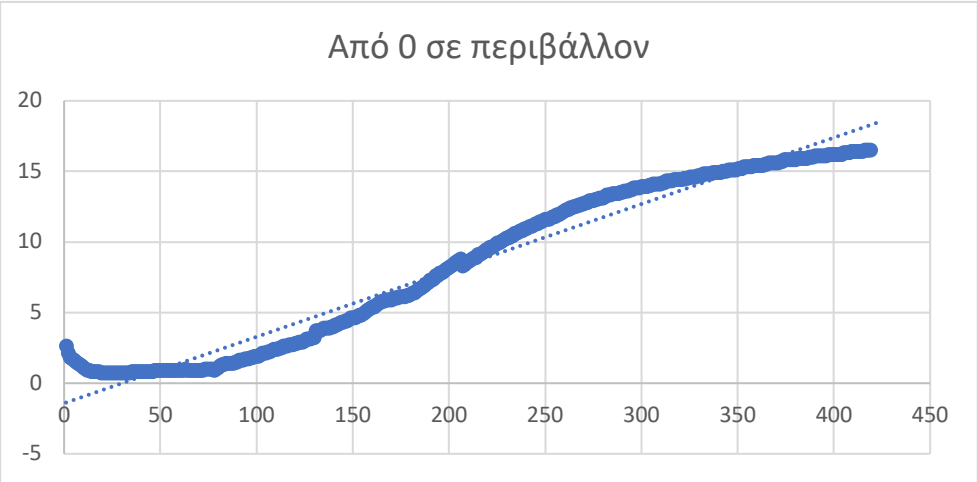
III. Στην εξίσωση y=βx+α αντικαταστάθηκαν τα α και β. Καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι y=0,01x+0,32

ΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΥΠΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ		
SUM X		9316
SUM Y		68,5
SUM X^2		847756
SUM Y^2		421,08
SYM XY		17845,8
(SUM X)^2		86787856
a	0,32	
b	0,01	
y=bx+a		y=0,01x+0,32

Σχήμα 4: Υπολογισμός τύπων γραμμικής παλινδρόμησης

Η εξίσωση γραμμικής παλινδρόμησης που προκύπτει είναι η εξής:

$$y = bx + a => \ y = 0{,}01x + 0{,}32$$



Σχήμα 5: Διάγραμμα απλής γραμμικής παλινδρόμησης

3.2.2. Υπολογισμός Απλής Γραμμικής Παλινδρόμησης στην περίπτωση «Από βρασμό σε περιβάλλον»

Για τον εντοπισμό της γραμμικής εξίσωσης της μορφής y=βx+α, έπρεπε να υπολογιστεί το α και το β μέσω των ακόλουθων τύπων (1):
Με βάση τις αντίστοιχες συναρτήσεις που κατασκευάστηκαν στο excel προέκυψαν οι τιμές των α και β:

$$\Sigma\chi^2 = 847756$$
$$\Sigma\chi = 9316$$
$$(\Sigma\chi)^2 = 86787856$$
$$\Sigma y = 5367{,}2$$
$$\Sigma\chi y = 298539$$
$$n = 136$$

$$a = \frac{5367{,}2 \cdot 84756 - 9316 \cdot 298539}{136 \cdot 847756 - 86787856}, \beta = \frac{136 \cdot 298539 - 9316 \cdot 5367{,}2}{136 \cdot 847756 - 86787856}$$

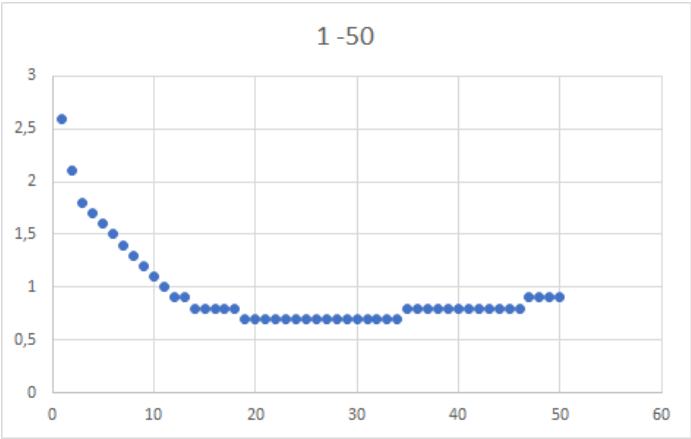
$$a = 62{,}05105, \beta = -0{,}329728$$

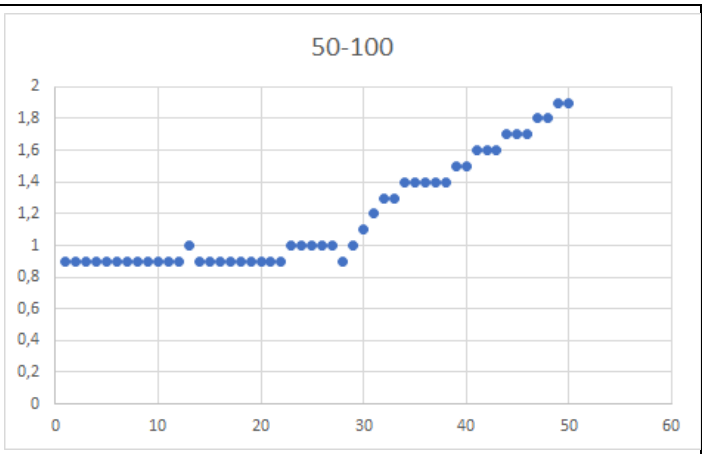
Επομένως, η ζητούμενη εξίσωση θα είναι η: y=-0,3297x+62,051

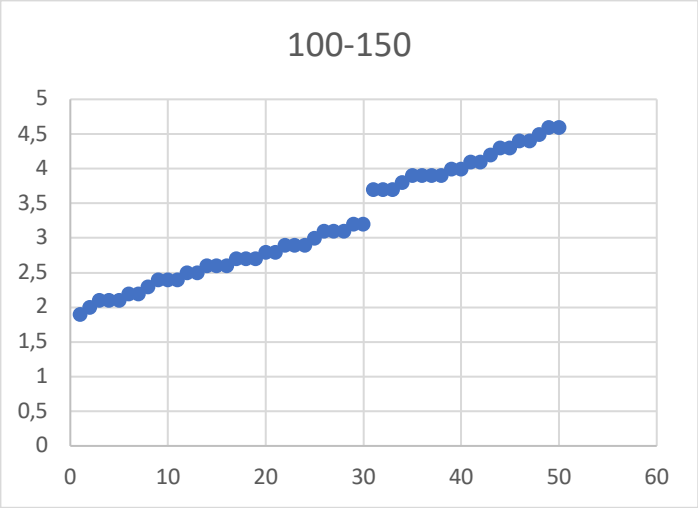
3.3. Η εκθετική προσέγγιση

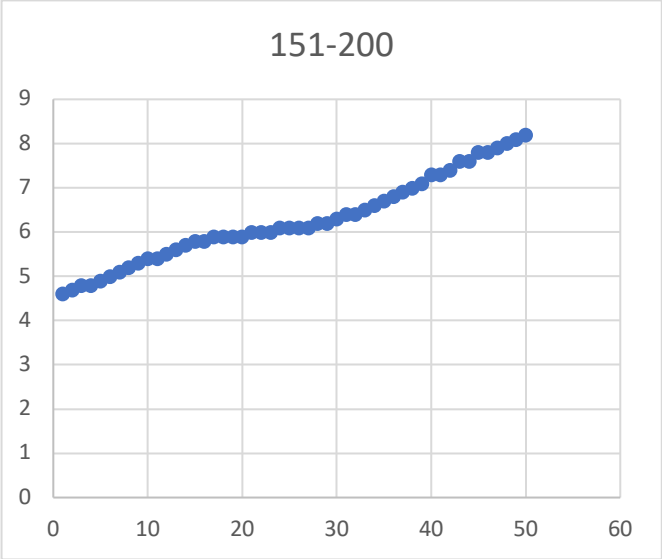
Μετά από παρατηρήσεις στα διαγράμματα που προέκυψαν, παρατηρήθηκε ότι η ευθεία δεν ήταν η μόνη συνάρτηση που θα μπορούσε να περιγράψει τα φαινόμενα, καθώς ανά τμήματα των καμπυλών υπήρχαν διαφοροποιήσεις, τις οποίες δεν απεικόνιζε η γραμμική συνάρτηση, όπως φαίνεται στα παρακάτω διαγράμματα που αποτελούν μέρη των συνολικών ανά πείραμα:

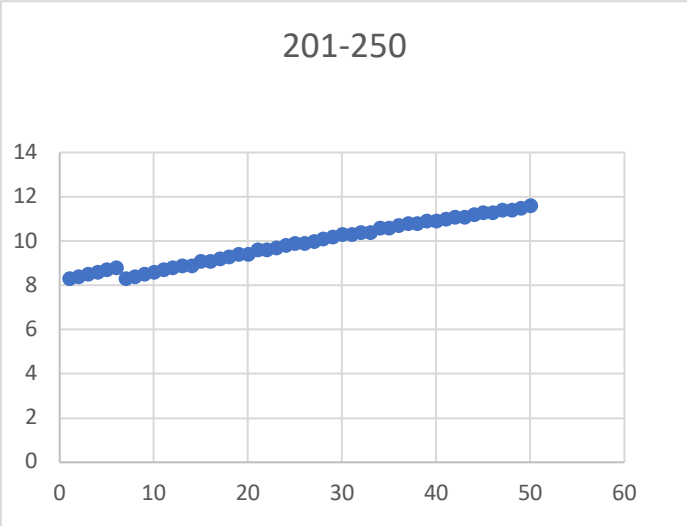
3.3.1. Επιμέρους διαγράμματα για το «από 0℃ σε περιβάλλον»

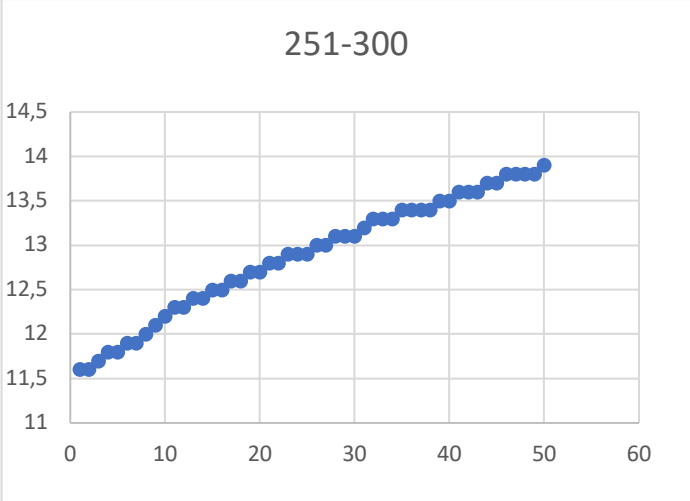

1 -50
3
2,5
2
1,5
1
0,5
0
0
10
20
30
40
50
60

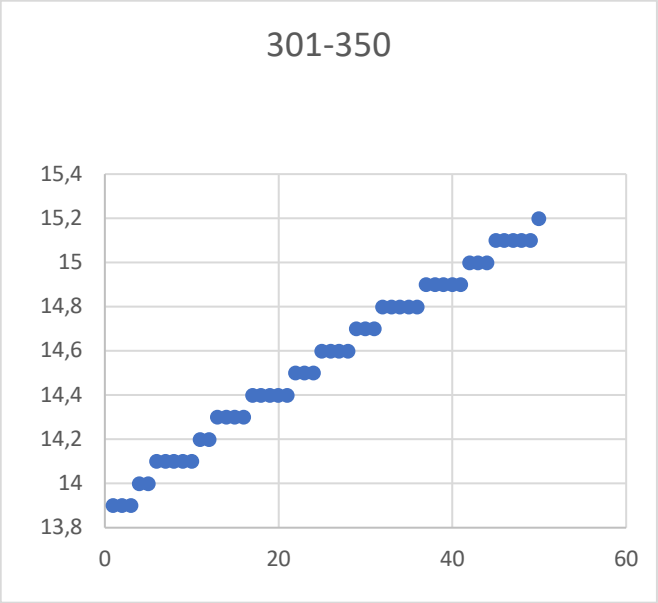

50-100
2
1,8
1,6
1,4
1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
10
20
30
40
50
60

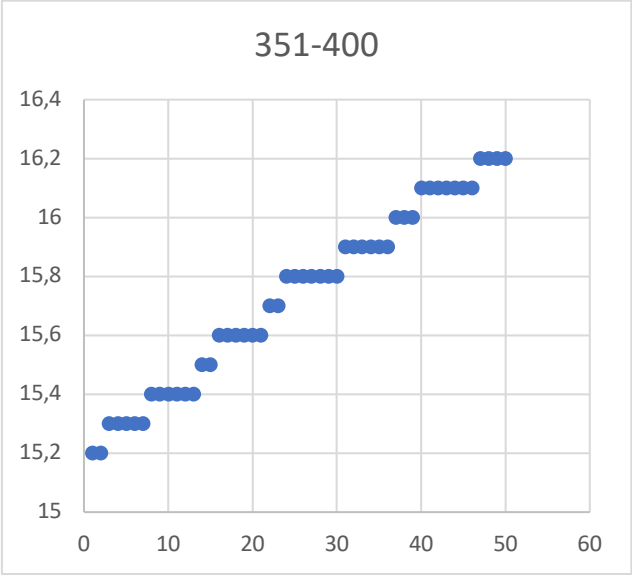

100-150
5
4,5
4
3,5
3
2,5
2
1,5
1
0,5
0
0
10
20
30
40
50
60

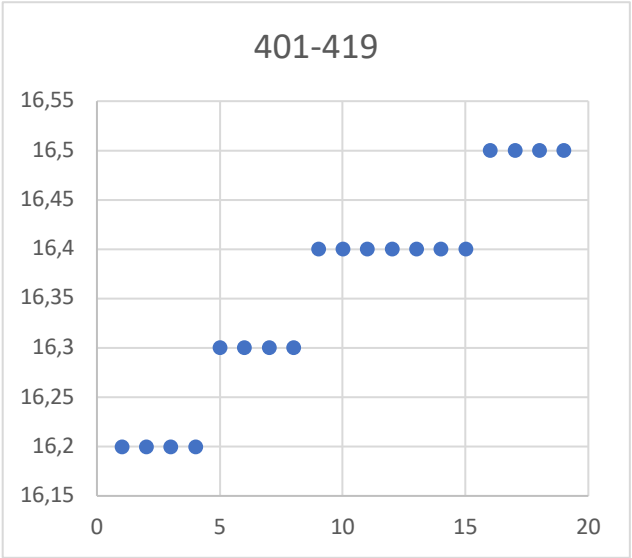

151-200
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0
10
20
30
40
50
60


201-250
14
12
10
8
6
4
2
0
0
10
20
30
40
50
60


251-300
14,5
14
13,5
13
12,5
12
11,5
11
0
10
20
30
40
50
60





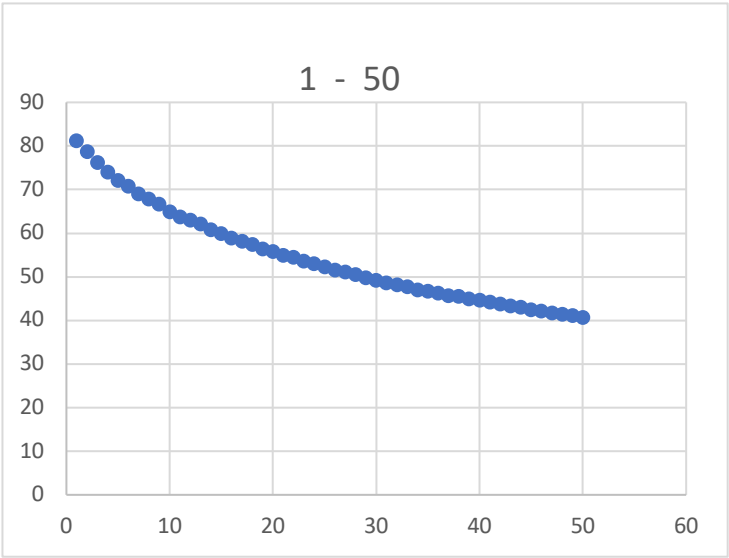


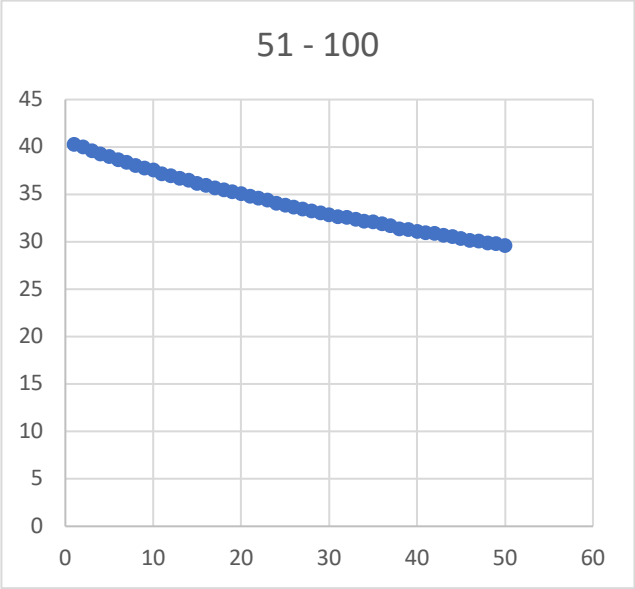
Σχήμα 6: Επιμέρους διαγράμματα από 0 °C σε περιβάλλον

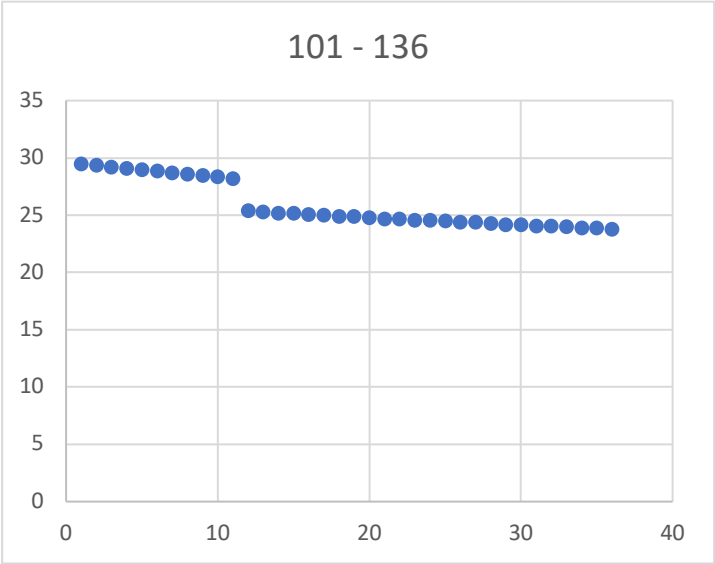
Όπως φαίνεται από τα παραπάνω γραφήματα , η καμπύλη είναι αρκετά διαφορετική ανά διαστήματα, οπότε ζητούμενο αποτελεί η εύρεση μίας συνάρτησης που θα περιγράφει καλύτερα από τη γραμμική το συγκεκριμένο φυσικό φαινόμενο.

3.3.2. Επιμέρους διαγράμματα για το «από βρασμό σε περιβάλλον»

3.3.3.







Σχήμα 7: Επιμέρους διαγράμματα από βρασμό σε περιβάλλον

Αποφασίστηκε να προσεγγιστούν οι καμπύλες με εκθετικό μοντέλο μη γραμμικό, καθώς όπως φαίνεται και από τα παραπάνω τμήματα καμπύλων, η γραμμική συνάρτηση δεν αποτυπώνει επαρκώς τις μεταβολές θερμοκρασίας σε σχέση με τον χρόνο.

3.3.4. Υπολογισμοί για την εκθετική προσέγγιση βάσει της θεωρίας

Η εκθετική προσέγγιση και μη γραμμική παλινδρόμηση της μορφής $y = ae^{\beta x}$ μπορεί να μετασχηματιστεί σε μελέτη γραμμικής παλινδρόμησης.
Ισχύει $y = ae^{\beta x} \Rightarrow ln\, y = ln\, a + bx \Rightarrow z = \kappa + \lambda x$,
όπου θέτουμε $z = ln\, y,\ \kappa = ln\, a,\ \lambda = \beta$, οπότε προκύπτει γραμμική σχέση.
Για τη φυσική ερμηνεία των αποτελεσμάτων, επαναφέρουμε τις αρχικές μεταβλητές μέσω των αντίστροφων μετασχηματισμών.

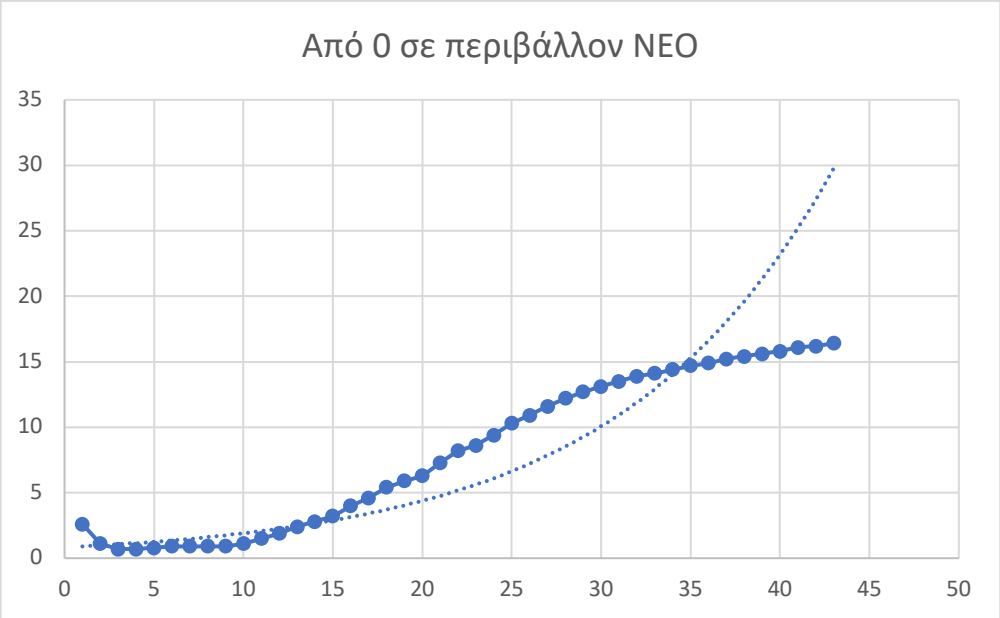
3.3.5. Το εκθετικό μοντέλο - Υπολογισμοί

i) Από 0°C σε περιβάλλον

Από το γραμμικό μοντέλο y = 0,01x +0,32 , όπως αυτό προέκυψε παραπάνω, την προσέγγιση της μορφής $y = Ae^{Bx}$, προκύπτει ότι:

$$a = \ell n\, A \Leftrightarrow 0{,}32 = \ell n\, A \Leftrightarrow A = e^{0{,}32} \Leftrightarrow A \simeq 1{,}377$$

και $B = \beta = 0{,}01$, οπότε η συνάρτηση εκθετικής μορφής που προσεγγίζει την καμπύλη είναι $y = 1{,}377e^{0{,}01x}$.

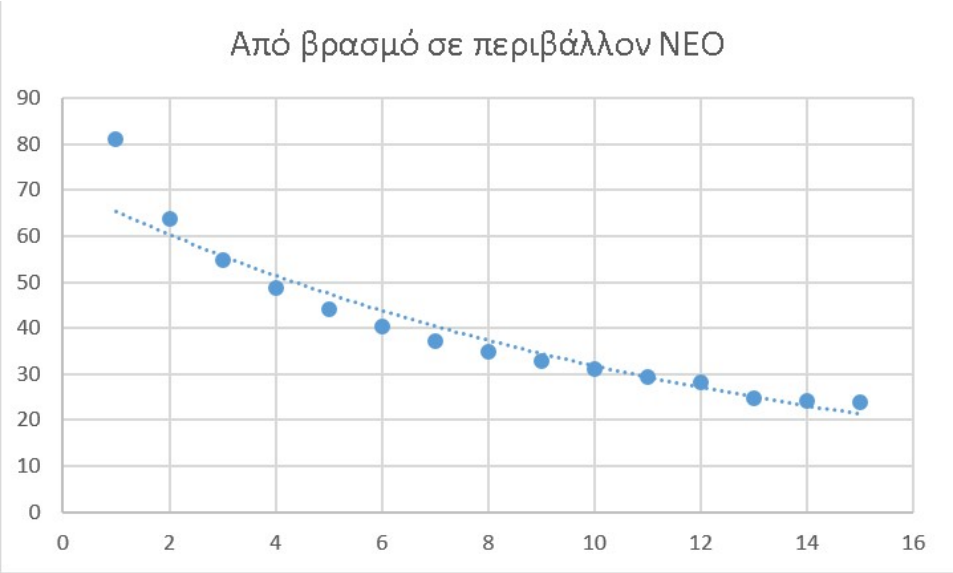


Σχήμα 8: Καμπύλη εκθετικής συνάρτησης «από 0 °C σε περιβάλλον»

ii) Από Βρασμό σε περιβάλλον

Η ίδια διαδικασία πραγματοποιήθηκε και για το διάγραμμα “από Βρασμό σε περιβάλλον.

Συνεπώς, επιλέχθηκαν τα σημεία ανά 10 και σχηματίστηκε το εξής διάγραμμα :



Σχήμα 9: Καμπύλη εκθετικής συνάρτησης «από βρασμό σε περιβάλλον»

Η εκθετική συνάρτηση που αντιστοιχεί στο διάγραμμα “από Βρασμό σε περιβάλλον” είναι η:

$$y = 70.8597e^{-0.0802x}$$

4. Ο ρυθμός μεταβολής

Υπολογισμός του ρυθμού μεταβολής της θερμοκρασίας

Σε κάθε περίπτωση ο ρυθμός μεταβολής ενός φυσικού μεγέθους σε συνάρτηση με το χρόνο είναι ο λόγος της μεταβολής του μεγέθους αυτού προς τη μεταβολή του χρόνου αντίστοιχα.

Στην περίπτωση λοιπόν, του πειράματος της αποκατάστασης θερμικής ισορροπίας, ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας θα δίνεται στις δύο περιπτώσεις που εξετάζονται ως αποτέλεσμα του πηλίκου: $\frac{\Delta\Theta}{\Delta t}$, όπου ΔΘ η μεταβολή της θερμοκρασίας και Δt το αντίστοιχο χρονικό διάστημα.

Βελτίωση: Για καλύτερη προσέγγιση υπολογίστηκε και ο μέσος όρος των μεταβολών θερμοκρασίας ανά δυο μονάδες χρόνου και το αποτέλεσμα είναι το εξής:

i) Από 0 σε περιβάλλον

Πρώτη προσέγγιση:

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{16{,}4 - 2{,}6}{43 - 1} = \frac{13{,}8}{42} \approx 0{,}33$$

Βελτίωση:

ΧΡΟΝΟΣ	ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ	
1	2,6	
2	1,1	=(B3-B2)/(A3-A2)
3	0,7	
4	0,7	0
5	0,8	
6	0,9	0,1
7	0,9	
8	0,9	0
9	0,9	
10	1,1	0,2
11	1,5	
12	1,9	0,4
13	2,4	
14	2,8	0,4
15	3,2	
16	4	0,8
17	4,6	
18	5,4	0,8
19	5,9	
20	6,3	0,4
21	7,3	
22	8,2	0,9
23	8,6	
24	9,4	0,8
25	10,3	
26	10,9	0,6
27	11,6	
28	12,2	0,6
29	12,7	
30	13,1	0,4
31	13,5	
32	13,9	0,4
33	14,1	
34	14,4	0,3
35	14,7	
36	14,9	0,2
37	15,2	
38	15,4	0,2
39	15,6	
40	15,8	0,2
41	16,1	
42	16,2	0,1
43	16,4	
	Δθ/Δt Average	0,3

ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ	
2,6	
1,1	-1,5
0,7	
0,7	0
0,8	
0,9	0,1
0,9	
0,9	0
0,9	
1,1	0,2
1,5	
1,9	0,4
2,4	
2,8	0,4
3,2	
4	0,8
4,6	
5,4	0,8
5,9	
6,3	0,4
7,3	
8,2	0,9
8,6	
9,4	0,8
10,3	
10,9	0,6
11,6	
12,2	0,6
12,7	
13,1	0,4
13,5	
13,9	0,4
14,1	
14,4	0,3
14,7	
14,9	0,2
15,2	
15,4	0,2
15,6	
15,8	0,2
16,1	
16,2	0,1
16,4	
Δθ/Δt Average	=AVERAGE(C3:C43)

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\sum M.O.\,\rho\upsilon\theta\mu o\acute{\upsilon}\ \mu\varepsilon\tau\alpha\beta o\lambda\acute{\eta}\varsigma}{21} \approx 0{,}3$$

ii) Από βρασμό σε περιβάλλον

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{23{,}8 - 81{,}1}{15 - 1} = \frac{-57{,}3}{14} \approx -4{,}09$$

Βελτίωση:

1	81,1	
2	63,7	=(C2-C1)/(B2-B1)
3	54,9	
4	48,6	-6,3
5	44,1	
6	40,3	-3,8
7	37,2	
8	34,8	-2,4
9	32,7	
10	31	-1,7
11	29,5	
12	28,2	-1,3
13	24,7	
14	24,1	-0,6
15	23,8	
		1,59
	Δθ/Δt	-3,99

1	81,1	
2	63,7	-17,4
3	54,9	
4	48,6	-6,3
5	44,1	
6	40,3	-3,8
7	37,2	
8	34,8	-2,4
9	32,7	
10	31	-1,7
11	29,5	
12	28,2	-1,3
13	24,7	
14	24,1	-0,6
15	23,8	
		1,59
	Δθ/Δt	=AVERAGE(D2:D16)

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\sum M.O.\,\rho\upsilon\theta\mu o\acute{\upsilon}\ \mu\varepsilon\tau\alpha\beta o\lambda\acute{\eta}\varsigma}{8} \approx -3{,}99$$

5. Αποτελέσματα

Για τις δύο περιπτώσεις του πειράματος αποκατάστασης της θερμικής ισορροπίας προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

- **Από 0 σε περιβάλλον:**
  Γραμμικό μοντέλο: $\mathbf{y = 0{,}01x + 0{,}32}$
  Εκθετικό μοντέλο: $\mathbf{y = 1{,}377e^{0{,}01x}}$
  Ο ρυθμός μεταβολής βάσει της εκθετικής: 0,01377
  Ο ρυθμός μεταβολής βάσει των σημείων από τις μετρήσεις: 0,33
  Ο ρυθμός μεταβολής βάσει της γραμμικής προσέγγισης: 0,01

- **Από βρασμό σε περιβάλλον:**
  Γραμμικό μοντέλο: $\mathbf{y = -0{,}329728x + 62{,}051}$
  Εκθετικό μοντέλο: $\mathbf{y = 70{,}8597e^{-0{,}0802x}}$
  Ο ρυθμός μεταβολής βάσει της εκθετικής: - 5, 68295

Ο ρυθμός μεταβολής βάσει των σημείων από τις μετρήσεις: - 4,09
Ο ρυθμός μεταβολής βάσει της γραμμικής προσέγγισης: - 0,32973

6. Συμπεράσματα

Για τις δύο περιπτώσεις της αποκατάστασης θερμικής ισορροπίας που εξετάστηκαν, παρατηρείται ότι οι ρυθμοί μεταβολής δεν ταυτίζονται. Όμως είναι ο ρυθμός μεταβολής της εκθετικής προσέγγισης , ο οποίος είναι πιο κοντά στον ρυθμό μεταβολής με βάση τα δεδομένα – μετρήσεις του πειράματος.
Μάλιστα και στις δύο περιπτώσεις ο ρυθμός μεταβολής της γραμμικής προσέγγισης απέχει αρκετά του μέσου όρου που υπολογίστηκε για το ρυθμό μεταβολής των πειραματικών δεδομένων.
Συμπερασματικά θα μπορούσε να ειπωθεί ότι τα αποτελέσματα της θεωρίας της παλινδρόμησης με κατάλληλη επιλογή συνάρτησης (εκθετικής) , η οποία στηρίχτηκε στην εποπτεία μέσω του διακριτού μοντέλου είναι αρκετά κοντά στο θεωρητικό μοντέλο και τα αποτελέσματα της θεωρίας για το ρυθμό μεταβολής της εκθετικής συνάρτησης.
Το ερώτημα για περαιτέρω έρευνα που προκύπτει είναι πώς μπορούν να ελαχιστοποιηθούν τα σφάλματα που προκύπτουν κατά τις προσεγγίσεις μέσα από τη θεωρία της παλινδρόμησης και πότε θα θεωρείται ικανοποιητική μία προσέγγιση του φυσικού φαινομένου.
Μία διόρθωση , τέλος, που προτείνεται στην περίπτωση αποκατάστασης θερμικής ισορροπίας από 0 ^{o} C , θα ήταν η εξαίρεση των πρώτων μετρήσεων μέχρι να επέλθει δηλαδή θερμική ισορροπία μεταξύ του αισθητήρα και του πάγου.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Δαμιανού, Χ., Κούτρας, Μ. (2000). *Εισαγωγή στη Στατιστική, Μέρος Ι,* Αθήνα: εκδόσεις Συμμετρία

Κιόχος, Π. 1993. *Στατιστική,* Αθήνα: εκδόσεις Intebooks

Orton, A. (1984), *Understanding Rate of Change*, Mathematics in School Vol. 13, No. 5 (Nov., 1984), pp. 23-26 (4 pages), Published By: The Mathematical Association

Finney, R.L., Weir, M. D., Giordano, F. R. (2006) *THOMAS Απειροστικός Λογισμός, τόμος ΙΙ,* απόδοση στα Ελληνικά – επιστημονική επιμέλεια Αντωνογιαννάκης Μ., Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης

http://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/2680/Fysiki_A-Lykeiou_html-empl/

https://www.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:functions/x2f8bb11595b61c86:average-rate-of-change-word-problems/a/average-rate-of-change-review

https://courses.lumenlearning.com/ivytech-collegealgebra/chapter/find-the-average-rate-of-change-of-a-function/

https://math.libretexts.org/Bookshelves/Calculus/Book%3A_Calculus_(OpenStax)/03%3A_Derivatives/3.4%3A_Derivatives_as_Rates_of_Change

http://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/4704/Mathimatika-kai-Stoicheia-Statistikis_G-EPAL_html-apli/index2_4.html

http://www.unipi.gr/faculty/mbouts/statprog/SPSS_lesson9-10.pdf

http://opencourses.uom.gr/courses/diethnon-europaikon-spoudon/72-statistikh-analysh-me-xrhsh-h-y/enothtes/128-aplh-grammikh-palindromhsh?vid=151&vtp=720

http://www.mit.edu/~6.s085/notes/lecture3.pdf

https://www0.gsb.columbia.edu/faculty/pglasserman/B6014/Regression.pdf