Open Schools Journal for Open Science

Vol 6, No 1 (2023)

Open Schools Journal for Open Science - Special Issue -Πρακτικά του «3ου Μαθητικού Συνεδρίου Έρευνας και Επιστήμης»

Αδιάφορη Ισορροπία Διπλού Κώνου σε Κεκλιμένο Επίπεδο

Λευκή Μένεγα, Μαριλένα Μπατατούδη, Ναντίνα Λυμπεροπούλου, Vasilis Dimopoulos, Μάριος Γαλερός, Ευάγγελος Κοτρώνης

doi: [10.12681/osj.32456](https://doi.org/10.12681/osj.32456)

To cite this article:

Μένεγα Λ., Μπατατούδη Μ., Λυμπεροπούλου Ν., Dimopoulos, V., Γαλερός Μ., & Κοτρώνης Ε. (2023). Αδιάφορη Ισορροπία Διπλού Κώνου σε Κεκλιμένο Επίπεδο. *Open Schools Journal for Open Science*, *6*(1). https://doi.org/10.12681/osj.32456

Αδιάφορη Ισορροπία Διπλού Κώνου σε Κεκλιμένο Επίπεδο

Λευκή Μένεγα[1], Μαριλένα Μπατατούδη[2], Ναντίνα Λυμπεροπούλου[3]

[1,2,3]Γενικό Λύκειο Κολλεγίου Ψυχικού

lefki.menega@gmail.com, marilenabat@gmail.com , nadina.libero@gmail.com

Επιβλέποντες Καθηγητές: Μάριος Γαλερός[1], Βασίλης Δημόπουλος[2], Ευάγγελος Κοτρώνης[3]

[1, 2, 3]ΠΕ 04, Γενικό Λύκειο Κολλεγίου Ψυχικού

mgaleros@haef.gr, vdimop@haef.gr, ekotronis@haef.gr

Περίληψη

Το θέμα της εργασίας είναι η μελέτη της αδιάφορης ισορροπίας ενός διπλού κώνου σε κεκλιμένο επίπεδο. Ο διπλός κώνος, γενικά, φαίνεται να «αψηφά» τη βαρύτητα και να ανέρχεται κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου. Πιο συγκεκριμένα, μελετάται πειραματικά η συνθήκη αδιάφορης ισορροπίας του κώνου, που κινείται πάνω σε δύο ράβδους που δημιουργούν κεκλιμένο επίπεδο. Η συνθήκη περιγράφεται από τον τύπο $εφα = εφβ \cdot εφγ$, όπου α η γωνία μεταξύ του οριζόντιου και κεκλιμένου επιπέδου, 2β η οξεία γωνία των ράβδων και 2γ η γωνία στην κορυφή του κάθε κώνου.

Καθώς, αφήναμε τον διπλό κώνο να κυλήσει από μια χαμηλή θέση κινούνταν προς μια υψηλότερη θέση. Επαναλάβαμε την ίδια διαδικασία για δύο ακόμη διπλούς κώνους διαφορετικής γωνίας γ η καθεμία, αλλάζοντας κάθε φορά την γωνία 2β και προσδιορίζοντας για ποια τιμή του 2β υπήρχε αδιάφορη ισορροπία, αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας τις τιμές αυτές ελέγξαμε και επιβεβαιώσαμε διαδοχικά για τους τρείς διπλούς κώνους τον αρχικό τύπο.

Λέξεις κλειδιά: διπλή σβούρα, κέντρο βάρους, κεκλιμένο επίπεδο, αδιάφορη ισορροπία

Εισαγωγή

Τον 18ο αιώνα διαδόθηκε η κλασική μηχανική του Νεύτωνα και κατασκευάστηκαν πολυάριθμες μηχανικές συσκευές και διατάξεις, προκειμένου να μελετηθούν πειραματικά και να ερμηνευθούν οι διατυπώσεις της νευτώνειας μηχανικής. Στα πλαίσια της προσπάθειας αυτής, ένα χαρακτηριστικό πείραμα που υλοποιήθηκε εκείνη την εποχή ήταν η μελέτη της αδιάφορης ισορροπίας του διπλού κώνου. Το πείραμα αυτό αποτελεί ένα κατασκευαστικό παράδοξο ένα φαινόμενο που αντιτίθεται στη λογική (Κυρίκος, και συν., 2019). Στην πραγματικότητα, δημιουργείται μια ψευδαίσθηση καθώς η κίνηση του κώνου μπορεί να ερμηνευθεί με τη βοήθεια ισχυόντων φυσικών νόμων και να αποδειχθεί με απόλυτα λογικά και ορθά επιχειρήματα.

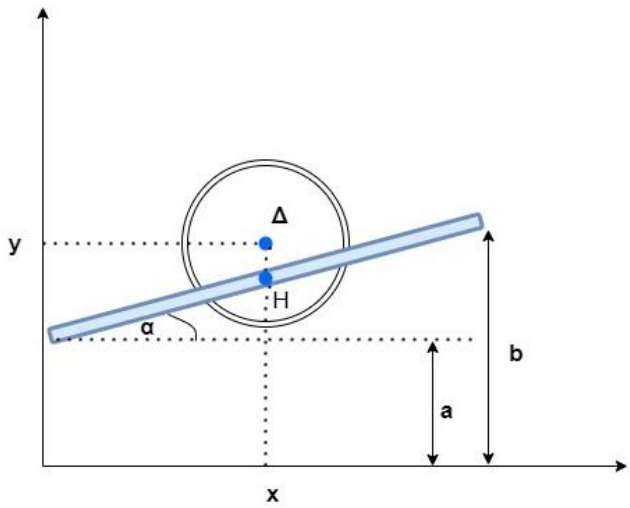
Θεωρητικό υπόβαθρο

Το πείραμα με το διπλό κώνο είναι μια ιδιαίτερα διάσημη διάταξη (Σχήμα 1). Αποτελείται από ένα ισοσκελές τρίγωνο. Οι ίσες πλευρές του τριγώνου είναι δύο ράγες, πάνω στις οποίες είναι τοποθετημένος ένας διπλός κώνος, κατασκευασμένος από δύο κώνους συνδεδεμένους στη βάση τους. Οι ράγες, στη μια τους πλευρά, είναι πολύ κοντά μεταξύ τους, ενώ καθώς προχωρούμε προς την άλλη πλευρά είναι υπερυψωμένες και ανοίγουν μεταξύ τους σχηματίζοντας ένα “V”. Με αυτόν τον τρόπο δημιουργείται ένα κεκλιμένο επίπεδο. Ο διπλός κώνος τοποθετείται στην αρχική θέση, στο σημείο που οι ράγες κύλισης είναι πολύ κοντά μεταξύ τους, δηλαδή το «χαμηλό άκρο» (Σχήμα 1). Οι δυνάμεις που δέχεται ο κώνος είναι το βάρος W, οι δυνάμεις επαφής N_1 και N_2 από τα στηρίγματα στα οποία ακουμπάει ο κώνος και η τριβή από τις ράβδους. Ο διπλός κώνος αρχίζει αυτόματα να κυλάει προς «τα πάνω», δίδοντας την εντύπωση ότι ξεφεύγει από τον παγκόσμιο νόμο της βαρυτικής δύναμης. Το φαινόμενο αυτό έρχεται σε αντίφαση με την κοινή λογική, γι’ αυτό περιγράφεται συχνά ως ένα «μηχανικό παράδοξο». Στην πραγματικότητα, τίποτα δεν μπορεί να αψηφά τη δύναμη της βαρύτητας, ούτε η παραπάνω συσκευή (Kokichi, 2014) .

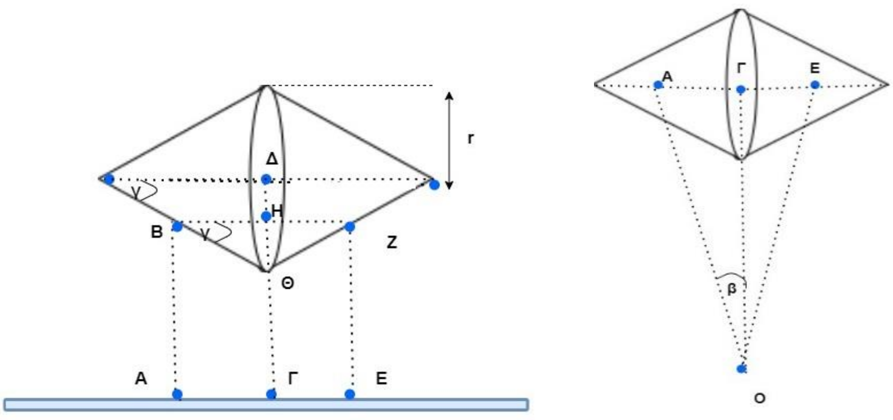
Σχήμα 1: Η διάταξη του πειράματος του διπλού κώνου

Η κίνηση αυτή είναι απολύτως λογική και το σώμα κινείται στη πραγματικότητα κατηφορικά. Για να κατανοήσουμε όμως το φαινόμενο πρέπει να εξηγήσουμε τι είναι το κέντρο βάρους ενός σώματος. Το κέντρο βάρους είναι το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης δύναμης των στοιχειωδών βαρών των όμοιων τμημάτων, στα οποία έχει χωριστεί το μεγαλύτερο ομογενές σώμα (Kokichi, 2014). Από το κέντρο βάρους του σώματος ισορροπεί ένα σώμα υπό την δράση της βαρύτητας. Στο διπλό κώνο το κέντρο μάζας είναι το κέντρο του κύκλου που σχηματίζουν οι δύο κυκλικές βάσεις όταν ενώνονται. Φαινομενικά, φαίνεται να κυλάει δηλαδή προς τη πλευρά που είναι ψηλότερα από το οριζόντιο επίπεδο. Παρ' όλα αυτά, το κέντρο μάζας του κώνου βυθίζεται μεταξύ των κώνων, καταλήγοντας σε χαμηλότερη τελική θέση, καθώς οι ράβδοι σχηματίζουν κατάλληλη οξεία γωνία.

Το Σχήμα 2 δείχνει μια κατακόρυφη διατομή της διάταξης. Η κεκλιμένη γραμμή αντιπροσωπεύει τις άνω επιφάνειες των ράβδων. Το αριστερό άκρο της ράβδου, που φαίνεται στην αριστερή πλευρά της εικόνας 1, βρίσκεται σε απόσταση a από το έδαφος. Το δεξί άκρο της ράβδου, στη δεξιά πλευρά του σχήματος 1, βρίσκεται σε απόσταση b από το έδαφος. Το σχήμα δείχνει επίσης τη διατομή του διπλού κώνου αφού έχει κυλήσει στην πλαγιά. Το σημείο στη μέση αυτής της διατομής είναι το κέντρο βάρους του διπλού κώνου, το οποίο ονομάζουμε Δ. Η γωνία κλίσης των σιδηροτροχιών είναι α. Θα προσπαθήσουμε να εξάγουμε την εξίσωση μεταξύ x και y. Επίσης, στο Σχήμα 2 βλέπουμε την μπροστινή άποψη του κώνου. Η γωνία γ είναι η μισή της γωνίας κορυφής του κώνου. Το Σχήμα 2 δείχνει και τη προβολή όλης της διάταξης στο έδαφος. Τα Α, Γ, Ε είναι οι προβολές των Β, Δ, Ζ αντίστοιχα.



Σχήμα 2 :Αναπαράσταση πλάγιας όψης διπλού κώνου (Διατομή)



Σχήμα 2 :Αναπαράσταση μπροστινής όψης διπλού κώνου

Με τη βοήθεια της Τριγωνομετρίας θα βρούμε μια σχέση για την τροχιά του κέντρου μάζας.

Στο Σχήμα 2 στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΓ έχουμε :

$$\varepsilon\varphi\beta = \frac{A\Gamma}{O\Gamma} = \frac{AE}{2O\Gamma} \quad (1)$$

και αφού ΑΕ=ΒΖ με x την απόσταση ΟΓ θα έχουμε:

$$BZ = 2x\ \varepsilon\varphi\beta \quad (2)$$

Έστω Η το σημείο στο μέσον του ΒΖ και γ οι εντός- εκτός και επί τα αυτά γωνίες που φαίνονται στο Σχήμα 3 και είναι ίσες. Έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\gamma = \frac{H\Theta}{HB} \Leftrightarrow H\Theta = \varepsilon\varphi\gamma \cdot HB \Leftrightarrow H\Theta = \frac{BZ \cdot \varepsilon\varphi\gamma}{2}$$

όμως λόγω της (2) θα έχουμε:

$$H\Theta = \frac{BZ\cdot\varepsilon\varphi\gamma}{2} = x \cdot \varepsilon\varphi\beta \cdot \varepsilon\varphi\gamma \quad (3)$$

Το ύψος y θα είναι $y = H\Gamma + H\Delta$ (4) και επίσης για την ΗΔ ισχύει : $H\Delta = r - H\Theta$ (5), οπότε από την (3) και την (5) :

$$H\Delta = r - x \cdot \varepsilon\varphi\beta \cdot \varepsilon\varphi\gamma \quad (6)$$

Άρα, από την (4) και την (6) :

$$y = H\Gamma + r - x \cdot \varepsilon\varphi\beta \cdot \varepsilon\varphi\gamma \quad (7)$$

Στο Σχήμα 1 για τη γωνία α έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\alpha = \frac{H\Gamma - a}{x} \Leftrightarrow H\Gamma = a + x \cdot \varepsilon\varphi\alpha \quad (8)$$

Άρα, τελικά από (7) και (8):

$$y = a + x \cdot \varepsilon\varphi\alpha + r - x \cdot \varepsilon\varphi\beta \cdot \varepsilon\varphi\gamma \Leftrightarrow$$

$$y = a + r + (\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta \cdot \varepsilon\varphi\gamma)x \quad (9)$$

Η εξίσωση (9) έχει κλίση την $\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta \cdot \varepsilon\varphi\gamma$ η οποία πρέπει να είναι αρνητική για να κατεβαίνει επίπεδο ο κώνος, άρα πρέπει:

$$\varepsilon\varphi\alpha < \varepsilon\varphi\beta \cdot \varepsilon\varphi\gamma \quad (10)$$

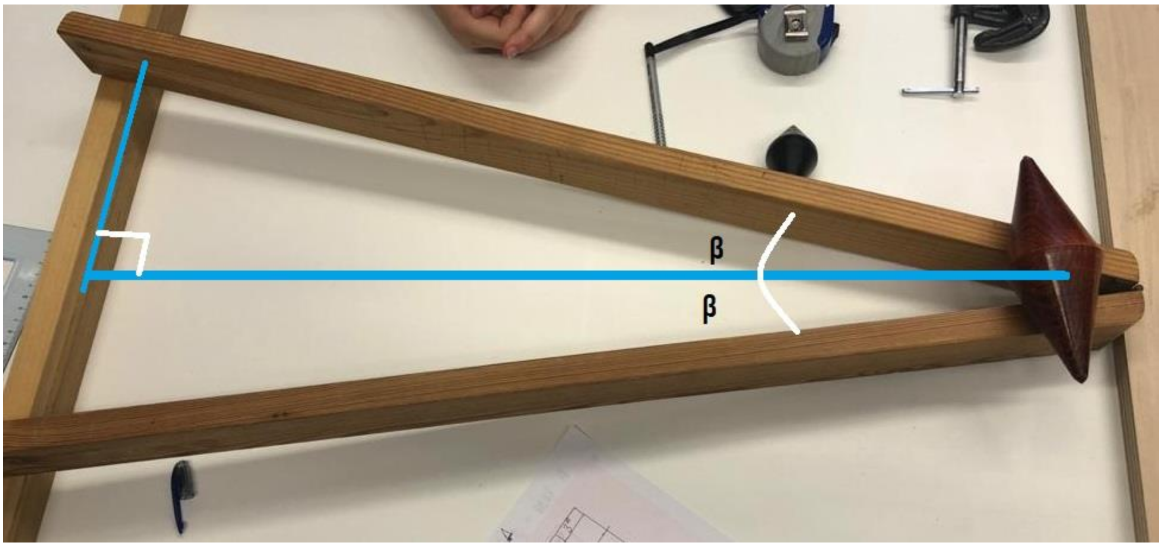
Άρα, για να έχουμε αδιάφορη ισορροπία, πρέπει $\varepsilon\varphi\alpha = \varepsilon\varphi\beta \cdot \varepsilon\varphi\gamma$ και η σβούρα θα ηρεμεί πάνω στις ράβδους (Havil, 2006). Την κατάσταση αυτή ελέγξαμε πειραματικά παρακάτω.

Πειραματική Διαδικασία

Προκειμένου να αποδείξουμε τον παραπάνω τύπο $\varepsilon\varphi\alpha = \varepsilon\varphi\beta \cdot \varepsilon\varphi\gamma$ υλοποιήσαμε το παρακάτω πείραμα.

Αρχικά, χρησιμοποιήσαμε δύο ίδιες ξύλινες ράβδους τοποθετώντας τις άκρες τους πάνω σε ξύλο (Σχήμα 1) σχηματίζοντας κεκλιμένο επίπεδο με σχήμα ισοσκελούς τριγώνου (κάτοψη).

Στη συνέχεια αφήναμε τον μεσαίο διπλό κώνο να κυλήσει κατά μήκος των ράβδων από μία χαμηλότερη σε μια υψηλότερη θέση, και παρατηρήσαμε ότι κινούνταν κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου προς τα επάνω.



Σχήμα 3: Η πειραματική διάταξη του διπλού κώνου. Στο σχήμα φαίνεται και το ορθογώνιο τρίγωνο που χρησιμοποιήσαμε και η γωνία β

Σχήμα 4: Η μέτρηση της γωνίας 2γ

Ακολούθως, υπολογίσαμε την γωνία 2γ, που είναι η γωνία που σχηματίζεται σε κάθε μία από τις μυτερές άκρες του διπλού κώνου. Για να μετρήσουμε την γωνία 2γ αρκεί να υπολογίσουμε κάποιον από τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας γ και να τον πολλαπλασιάσουμε με το δύο. Έτσι, χρησιμοποιήσαμε δύο ξύλα προκειμένου να κρατήσουμε τον κώνο ευθυγραμμισμένο και να μετρήσουμε το μήκος της διαμέτρου του αλλά και της μεγαλύτερης πλευράς του, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.

Αφού μετρήσαμε το μήκος του διπλού κώνου το διαιρέσαμε με το δύο προκειμένου να έχουμε το ύψος ενός από τα δύο ισοσκελή τρίγωνα που θα σχηματιστούν αν τον κόψουμε στη διάμετρο του. Αντίστοιχα, διαιρέσαμε με το δύο την διάμετρο του διπλού κώνου, και προέκυψε η ακτίνα του, δηλαδή η πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου. Εργαστήκαμε ενδεικτικά στο τρίγωνο (Α) που φαίνεται στο Σχήμα 4. Έχοντας δύο πλευρές από το ορθογώνιο τρίγωνο, υπολογίσαμε την εφαπτομένη της γωνίας γ, και ύστερα από τον πίνακα των τριγωνομετρικών αριθμών αντιστοιχίσαμε αυτό που βρήκαμε με τις μοίρες της γωνίας γ. Ύστερα, χρειάστηκε να πολλαπλασιάσουμε τις μοίρες αυτές με το δύο για να βρούμε την γωνία 2γ. Την διαδικασία αυτή την επαναλάβαμε αρκετές φορές προκειμένου να ελαχιστοποιήσουμε τα σφάλματα κατά τη διάρκεια της πειραματικής διαδικασίας.

Στη συνέχεια, υπολογίσαμε τη γωνία 2β. Η γωνία 2β είναι η γωνία που σχηματίζουν οι δύο ράβδοι πάνω στους οποίους θα ισορροπήσει το κάθε μέγεθος διπλού κώνου. Χρησιμοποιήσαμε τρία διαφορετικά μεγέθη κώνων και κάθε φορά αυξάναμε την γωνία α. Στους πίνακες με τις μετρήσεις για την γωνία β ο 1ος κώνος αντιπροσωπεύει τον μικρότερο, ο 2ος τον μεσαίο και τέλος ο 3ος, τον μεγαλύτερο κώνο. Για να υπολογίσουμε κάθε φορά την γωνία 2β, χρειαστήκαμε έναν χάρακα με τον οποίο βρήκαμε το ύψος του ισοσκελούς τριγώνου που σχηματίζουν οι δύο ράβδοι. Ύστερα εργαστήκαμε σε ένα από τα δύο ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίστηκαν. Μετρήσαμε την απέναντι πλευρά της γωνίας β και την υποτείνουσα του τριγώνου και βρήκαμε το ημίτονο της γωνίας β. Χρησιμοποιώντας πάλι τον πίνακα των τριγωνομετρικών αριθμών βρήκαμε τις μοίρες στις οποίες αντιστοιχεί το ημίτονο αυτό. Τέλος, πολλαπλασιάσαμε τις μοίρες τις γωνίας, γιατί στόχος μας ήταν να βρούμε την γωνία 2β.

Ακολούθως, μελετήσαμε τη γωνία 2β στην οποία οι διπλοί κώνοι σταθεροποιούνται. Τοποθετήσαμε τις δύο ράβδους σε μία γωνία και πάνω τους τοποθετήσαμε έναν από τους κώνους. Εάν μόλις τοποθετούσαμε τον κώνο πάνω στις ράβδους αυτός κινούταν, φροντίζαμε να κλείσουμε τις ράβδους λίγο προκειμένου να μικρύνει η γωνία 2β. Εάν πάλι τοποθετούσαμε τον κώνο πάνω στις ράβδους και αυτός παρέμενε ακίνητος, τότε προχωρούσαμε στον υπολογισμό της γωνίας 2β με τον τρόπο που περιγράφεται παραπάνω. Ακολούθως μεγαλώσαμε την γωνία α και μετρήσαμε πάλι την γωνία 2β που αντιστοιχούσε στην ισορροπία του κώνου. Η διαδικασία αυτή έγινε με τον ίδιο τρόπο και για τους δύο άλλους κώνους

Μετρήσεις

Οι παρακάτω πίνακες δείχνουν, για τις τρεις γωνίες α αντίστοιχα, όταν ο κάθε κώνος ήταν σταθερός ανάμεσα στις ράβδους πόσο ήταν η γωνία β.

Γωνία γ σε μοίρες:		εφγ
γ1	21.55	0,395
γ2	20.10	0,366
γ3	25.60	0,479

Πίνακας 1: Η γωνία γ και η εφγ για κάθε κώνο

Για α=2,05					
Διπλοί Κώνοι	Γωνία β σε μοίρες	εφα	εφβ	$\varepsilon\varphi\beta \cdot \varepsilon\varphi\gamma$	Απόκλιση από εφα (%)
1ος	5,40	0,036	0,094	0,037	2,78
2ος	5,90	0,036	0,103	0,038	2,00
3ος	4,21	0,036	0,073	0,035	-2,78
Για α=2,4					
Διπλοί Κώνοι	Γωνία β σε μοίρες	εφα	εφβ	$\varepsilon\varphi\beta \cdot \varepsilon\varphi\gamma$	Απόκλιση από εφα (%)
1ος	5,91	0,042	0,103	0,041	-2,38
2ος	6,80	0,042	0,119	0,044	4,75
3ος	5,15	0,042	0,090	0,043	2,38
Για α=3,66					
Διπλοί Κώνοι	Γωνία β σε μοίρες	εφα	εφβ	$\varepsilon\varphi\beta \cdot \varepsilon\varphi\gamma$	Απόκλιση από εφα (%)
1ος	7,9	0,064	0,139	0,065	-1,56
2ος	10,2	0,064	0,180	0,065	-1,56
3ος	7,4	0,064	0,130	0,063	1,56

Πίνακας 2: Συγκεντρωτικός πίνακας

Συμπεράσματα

Ο στόχος του πειράματος μας ήταν να μελετήσουμε το κατασκευαστικό παράδοξο του διπλού κώνου που αποτελεί τέχνασμα της Νευτώνειας Μηχανικής. Επαληθεύσαμε ότι ισχύει ο θεωρητικός τύπος για την αδιάφορη ισορροπία στη διάταξη του διπλού κώνου με μικρή απόκλιση που μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι οι γωνίες ήταν πολύ μικρές αλλά και στην παράλλαξη κατά τη λήψη των μετρήσεων λόγω της γεωμετρικής ιδιαιτερότητας του σχήματος του διπλού κώνου. Μέσω αυτού του πειράματος καταφέραμε να κατανοήσουμε ότι ακόμα και αν ορισμένα προβλήματα φαινομενικά είναι αντίθετα με την κοινή λογική, πειραματικά αποδεικνύεται ότι ισχύουν και μπορούν να αιτιολογηθούν αν μελετήσουμε εις βάθος τα συγκεκριμένα φαινόμενα.

Ευχαριστίες

Θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε τον τεχνικό του Εργαστηρίου Φυσικών Επιστημών του σχολείου κ. Νικόλαο Κόγια για την πολύτιμη βοήθειά του στην εκτέλεση του πειράματος.

Βιβλιογραφία

Κυρίκος, Ευθύμης. "Κατασκευαστικά Και Φυσικά Παράδοξα, Όταν Οι Νόμοι Της Φυσικής Φαίνεται Να Μη Λειτουργούν-Αθηνοδρόμιο",*Αθηνοδρόμιο*, www.athinodromio.gr/%CE%BA%CE%B1%CF%84%CE%B1%CF%83%CE%BA%CE%B5%CF%85%CE%B1%CF%83%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AC-%CE%BA%CE%B1%CE%B9-%CF%86%CF%85%CF%83%CE%B9%CE%BA%CE%AC-%CF%80%CE%B1%CF%81%CE%AC%CE%B4%CE%BF%CE%BE%CE%B1-%CF%8C/ Πρόσβαση 22 Ιαν. 2021.

Kokichi, Sugihara. "Design of solids for antigravity motion illusion". ScienceDircet, www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925772113001752, Πρόσβαση 22 Ιαν. 2021.

Julian Havil, Defying gravity: The uphill roller, plus.maths.org/content/defying-gravity-uphill-roller Πρόσβαση 22 Ιαν. 2021.