Open Schools Journal for Open Science

Vol 8, No 1 (2025)

Πρακτικά του «4ου Μαθητικού Συνεδρίου Έρευνας και Επιστήμης»

Οι ελαστικές συγκρούσεις ως υπολογιστική προσέγγιση του π

Καλλιόπη Σακιζλή, Γεώργιος Φούτρης , Ασημάκης Ιωάννης Επιβλέπων εκπαιδευτικός

doi: [10.12681/osj.43600](https://doi.org/10.12681/osj.43600)

Οι ελαστικές συγκρούσεις ως υπολογιστική προσέγγιση του π

Σακιζλή Καλλιόπη[1], Φούτρης Γεώργιος[2]

[1]5ο ΓΕΛ Βύρωνα, [2]5ο ΓΕΛ Βύρωνα

[1]kellysakizli@gmail.com, [2]gfoutris07@gmail.com

Επιβλέπων Καθηγητής: Ασημάκης Ιωάννης

(Καθηγητής Μαθηματικών ΠΕ03), 5ο ΓΕΛ Βύρωνα

ioasimakis@gmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία γίνεται μελέτη ενός πειράματος φυσικής το οποίο προσεγγίζει τη μαθηματική σταθερά π μέσω του αριθμού των ελαστικών κρούσεων, μεταξύ δύο σωμάτων και ενός ακλόνητου τοίχου. Η εφαρμογή της Αρχής της Διατήρησης της Ορμής και της Αρχής Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας μαζί με κατάλληλο γεωμετρικό μετασχηματισμό συνδυάζει τις επιστήμες της φυσικής και της γεωμετρίας και οι φαινομενικά αόρατες σχέσεις αποκτούν μορφή σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. Αυτό συμβάλλει στην απεικόνιση των κρούσεων του σώματος με τη μεγαλύτερη μάζα, αφενός με το άλλο σώμα και αφετέρου με τον ακλόνητο τοίχο. Ωστόσο, εμφανίζεται ένα σφάλμα το οποίο παρ' όλο που δεν υπολογίζεται με ακρίβεια αλγεβρικά, έχει προσεγγιστεί γεωμετρικά, δηλαδή έχει βρεθεί ένα φράγμα γι' αυτό. Ακόμα, πραγματοποιήθηκε μια ψηφιακή προσομοίωση του πειράματος μέσω ενός κώδικα, καθώς το πείραμα είναι θεωρητικό και δεν μπορεί να υλοποιηθεί στον πραγματικό κόσμο.

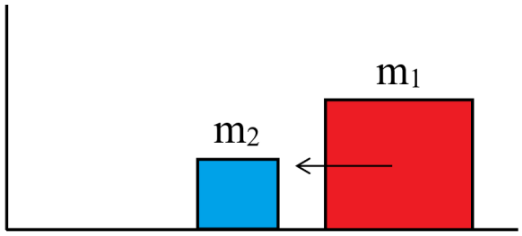
ΛΕΞΕΙΣ-ΚΛΕΙΔΙΑ: υπολογισμός π, ελαστική κρούση, αρχή διατήρησης ενέργειας, αρχή διατήρησης ορμής, ψηφιακή προσομοίωση.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η προσέγγιση της διάσημης σταθεράς π, ενός άπειρου και μυστήριου αριθμού, μέσω ενός ακεραίου αριθμού των κρούσεων, αποτελεί μια πρωτότυπη μέθοδο, η οποία εξάπτει το ενδιαφέρον, ενώ παράλληλα αξιοποιεί γνώσεις που καλλιεργήθηκαν από τα πρώιμα στάδια της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Η ιδέα βασίζεται σε μια εργασία στην οποία γίνεται η προσέγγιση του π μέσω ενός παιχνιδιού μπιλιάρδου (Galperin 2003). Στη συγκεκριμένη εργασία, γίνεται μελέτη ενός πειράματος που βασίζεται στις ελαστικές κρούσεις μεταξύ δύο σωμάτων διαφορετικής μάζας. (Αράπης 2019). Για την ερμηνεία του, εκτός από τις βασικές αρχές που χρησιμοποιούνται στις κρούσεις, αξιοποιήθηκαν και γεωμετρικά θεωρήματα για τη σχέση μεταξύ γωνιών και για τον χώρο των φάσεων. Χρησιμοποιείται ο αριθμός των ελαστικών κρούσεων που πραγματοποιούνται ανάμεσα σε δύο σώματα και έναν ακλόνητο τοίχο.

ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ-Η ΦΥΣΙΚΗ ΠΙΣΩ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΔΕΑ.

Το πείραμα εκτυλίσσεται σε εξιδανικευμένες συνθήκες, με στόχο τη μελέτη του πειράματος χωρίς την επίδραση εξωτερικών παραγόντων. Ειδικότερα, δεν λαμβάνουμε υπόψιν τις αντιστάσεις του αέρα ή την τριβή του δαπέδου. Ακόμη, στο αριστερό άκρο του σώματος με τη μικρότερη μάζα βρίσκεται ένας ακλόνητος τοίχος, άπειρης μάζας, του οποίου η ορμή δεν μεταβάλλεται. Το σώμα μικρότερης μάζας, το οποίο θα αποκαλούμε στη συνέχεια σώμα 2, συγκρούεται, αρχικά, με το σώμα μεγαλύτερης μάζας (σώμα 1), στη συνέχεια με τον τοίχο, μετά με το σώμα 1 κ.ο.κ.



Σχήμα 1: απεικόνιση πειραματικής διάταξης,
όπου m_1 : το σώμα με την μεγαλύτερη μάζα
m_2 : το σώμα με την μικρότερη μάζα

Τα σώματα μετά από κάθε κρούση αποκτούν διαφορετική ταχύτητα σύμφωνα με τους τύπους της ελαστικής κρούσης. Εξαίρεση σε αυτό, αποτελεί η ταχύτητα που αποκτά το σώμα με τη μικρότερη μάζα όταν αυτό συγκρούεται με τον τοίχο. Τότε το μέτρο της παραμένει ίδιο - αφού υπάρχει κίνηση μόνο στον άξονα x' x- αλλάζει, όμως, η φορά της. Παρατηρούμε ότι μετά από κάποιο χρονικό διάστημα οι κρούσεις σταματούν, με τα σώματα να κατευθύνονται προς τα δεξιά αλλά να μην ξανασυναντιούνται, καθώς η ταχύτητα του μεγάλου σώματος είναι μεγαλύτερη από το άλλο σώμα, (ώστε να μην μπορέσει να το φτάσει για να υπάρξει επόμενη επαφή μεταξύ των σωμάτων).

Όπως αναφέρθηκε, λοιπόν, στην παραπάνω πειραματική διάταξη, το επίπεδο είναι λείο και έτσι απουσιάζουν οι τριβές, με αποτέλεσμα να ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας (Α.Δ.Μ.Ε.) με εξίσωση:

$$m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1V_1^2 = E \qquad \textbf{(1)}$$

η οποία είναι εξίσωση μιας έλλειψης και E είναι η αρχική ενέργεια του συστήματος, λόγω της αρχικής ταχύτητας του μεγάλου σώματος.Ακόμα, λόγω του ακλόνητου τοίχου άπειρης μάζας, εκείνος δεν μεταβάλλει την ορμή του, ενώ για κάθε κρούση που πραγματοποιείται μεταξύ μεγάλου και μικρού σώματος, λόγω του ότι θεωρούμε ότι οι κρούσεις είναι ελαστικές, ισχύει η διατήρηση της ορμής:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = \mathrm{m}_1v_1' + m_2v_2{}' \qquad \textbf{(2)}$$

Όπου στο πρώτο μέλος είναι το άθροισμα των ορμών πριν από κάθε κρούση μεταξύ τους, ενώ στο δεύτερο είναι το άθροισμα των ορμών μετά από κάθε κρούση μεταξύ τους. Εδώ πρέπει να αναφερθεί ότι η ορμή στο σύστημα γενικά δεν διατηρείται, διότι ένας μέρος της απορροφάται σε κάθε κρούση του μικρού σώματος με τον τοίχο ακλόνητης μάζας.

ΣΥΣΧΕΤΙΣΜΟΣ ΦΥΣΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Για την εμφάνιση του αριθμού π μέσω της πειραματικής διαδικασίας, είναι απαραίτητο να συσχετισθεί το φυσικό πρόβλημα, με ένα αντίστοιχο γεωμετρικό το οποίο εμπλέκει με άμεσο τρόπο τον αριθμό π.

Αυτό πραγματοποιείται με την εισαγωγή του χώρου των φάσεων. Αν και υπάρχει η δυνατότητα να αναδυθεί ο αριθμός π και μέσα από τις γεωμετρικές ιδιότητες της έλλειψης, η χρήση της είναι αρκετά πολύπλοκη, οπότε με έναν απλό μετασχηματισμό η έλλειψη μετατρέπεται σε κύκλο.Για την ακρίβεια αν θεωρήσουμε την εξίσωση (1) και θέσουμε :

$$y = v_2\sqrt{m_2}\,, x = v_1\sqrt{m_1}$$

Έχουμε :

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = E \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = E \Rightarrow$$

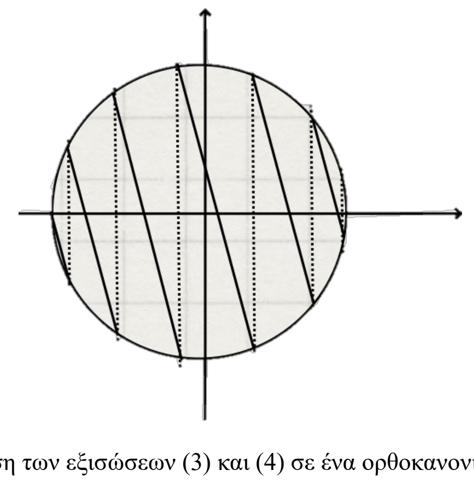
$$x^2 + y^2 = 2E \qquad \textbf{(3)}$$

Η οποία είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων.

Εάν παρατηρήσουμε την μορφή της εξίσωσης που έχει η διατήρηση της ορμής (2) και χρησιμοποιώντας τον παραπάνω μετασχηματισμό, βλέπουμε ότι οι εξισώσεις που προκύπτουν για κάθε κρούση έχουν τη μορφή :

$$\sqrt{m_2}y + \sqrt{m_1}x = c \qquad \textbf{(4)}$$

Δηλαδή αποτελούν μία οικογένεια ευθειών στον χώρο των φάσεων, οι οποίες έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, είναι δηλαδή παράλληλες. Ο χώρος των φάσεων θα έχει τη μορφή:



Σχήμα 2: απεικόνιση των εξισώσεων (3) και (4) σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων

Η αρχική κατάσταση είναι το πρώτο σημείο τομής του x'x με τον κύκλο. Η επόμενη κρούση είναι το σημείο τομής του κύκλου με την ευθεία της οικογένειας (ευθειών) που διέρχεται από το αρχικό σημείο (και βρίσκεται στα ημικύκλια με αρνητικές τεταγμένες). Κάθε επόμενη κρούση, που πραγματοποιείται, είναι το συμμετρικό του σημείου ως προς τον $x'x$ και διαδοχικά το σημείο τομής του κύκλου με την επόμενη ευθεία της οικογένειας. Αυτό συμβαίνει διότι, μετά την κρούση με τον άπειρης μάζας τοίχο, η ορμή, άρα και η ταχύτητα του μικρού σώματος, μεταβάλλουν τη φορά, αλλά όχι το μέτρο της.

Επομένως, οι τομές, τα σημεία που βρίσκονται στο πάνω ημισφαίριο, στο πρώτο και δεύτερο τεταρτημόριο είναι ο αριθμός των κρούσεων των σωμάτων, ενώ τα σημεία που ανήκουν στο κάτω ημισφαίριο, δηλαδή στο τρίτο και στο τέταρτο, είναι οι κρούσεις του μικρού σώματος με τον τοίχο.Θα μπορούσαμε, δηλαδή, να δούμε ότι κάθε κρούση με τη δημιουργία του σημείου τομής μεταξύ των ευθειών και του κύκλου δημιουργεί ένα τόξο συγκεκριμένου μήκους πάνω στον κύκλο. Εδώ βρίσκεται και η βασική ιδέα, η οποία θα αξιοποιηθεί για τον υπολογισμό του αριθμού π. Συγκεκριμένα, στη γραφική αναπαράσταση, τα σημεία τομής της οικογένειας ευθειών με τον κύκλο αθροιστικά δημιουργούν έναν ακέραιο αριθμό N, ο οποίος αποτελεί τη βάση του πειράματος. Εφόσον κάθε κρούση σχηματίζει ένα τόξο, το σύνολο των τόξων που θα δημιουργηθούν θα εξαντλεί το μήκος του κύκλου, εκτός από ένα μικρό σφάλμα, το οποίο είναι ευθέως ανάλογο με το π.Στη συνέχεια πρέπει να αναφερθούν τα εξής.
Αρχικά, όλα τα τόξα που δημιουργούνται είναι ίσα μεταξύ τους (εκτός από το κομμάτι που απομένει και θα επεξηγηθεί αργότερα).
Αν η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x'x είναι η θ τότε θα ισχύει:

$$tan\theta = -\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}.$$

Φαίνεται στο επόμενο σχήμα, αν φ είναι γωνία που αντιστοιχεί σε κάθε τόξο και ω η παραπληρωματική της θ , θα ισχύει:

$$\begin{cases} \varphi + \omega = \dfrac{\pi}{2} \\ \omega = \pi - \theta \end{cases} \Longrightarrow \theta - \varphi = \frac{\pi}{2}$$

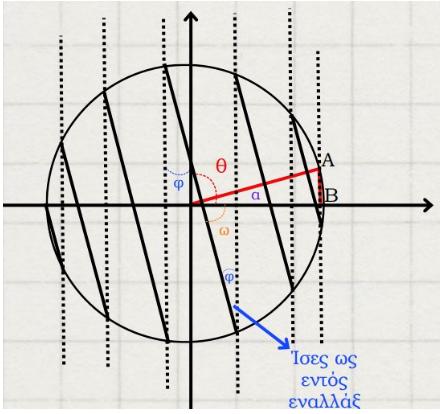
Άρα:

$$tan\varphi = \tan\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \tan[-\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)] = -tan\theta = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$$

Το παραπάνω μπορούμε να το γράψουμε με τη μορφή:

$$\varphi = arctan\left(\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\right) \qquad \textbf{(5)}$$

Σύμφωνα, λοιπόν, με το θεώρημα εγγεγραμμένης επίκεντρης γωνίας συμπεραίνουμε ότι κάθε τόξο θα έχει μήκος $2\varphi\rho$. Θα εξαρτάται, δηλαδή, από την αντίστροφη εφαπτόμενη της ρίζας, του λόγου των μαζών.



Σχήμα 3: εμφάνιση πρωταρχικών γωνιών (φ, θ, α και ω) στο σύστημα αξόνων μεταξύ των σχέσεων (3) και (4)

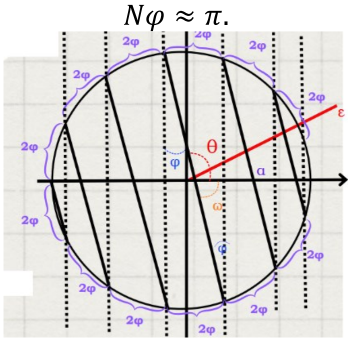
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Κάθε κρούση δημιουργεί ένα τόξο 2φ στον κύκλο (βλέπε Συσχετισμός Φυσικής-Γεωμετρίας).
Επομένως, μέχρι το τέλος της διαδικασίας, ο κύκλος εξαντλείται, με εξαίρεση ένα μικρό σφάλμα που θα υπολογιστεί στη συνέχεια και το συμβολίζουμε με χ. Δηλαδή:

$$2\varphi\rho + 2\varphi\rho + \cdots .2\varphi\rho + 2\chi\rho = 2\pi\rho \Longrightarrow$$
$$\varphi + \varphi + \cdots + \varphi + x = \pi \Longrightarrow$$
$$N\varphi + x = \pi$$

Δηλαδή

$$N\varphi \approx \pi.$$



ΣΧΗΜΑ 4 : συμπλήρωση και εξάντληση του κύκλου με τα τόξα 2φρ

όπου Ν ο ακέραιος αριθμός των κρούσεων που πραγματοποιούνται.
Για να διευκολύνουμε τη διαδικασία υπολογισμού, είναι βολικό το μεγάλο σώμα να έχει μάζα η οποία να είναι άρτια δύναμη του 10 και το μικρό σώμα να έχει μοναδιαία μάζα.
Θα ισχύει:

$$\varphi = arctan\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}. = arctan\left(\sqrt{\frac{1}{10^{2x}}}\right) \approx 10^{-x} \qquad \textbf{(6)}$$

Η τελευταία σχέση οφείλεται στο ότι για μεγάλες τιμές του x, η ποσότητα-όρισμα στη συνάρτηση $arctan$ τείνει στο 0, άρα σύμφωνα με γνωστό όριο της ανάλυσης, θα είναι ικανοποιητική η προσέγγιση:

$$\varphi \approx arctan\varphi$$

Άρα, για παράδειγμα, αν θέσουμε φ=0,01 τότε το Ν θα είναι Ν=100π, αν θέσουμε φ=0,001 τότε το Ν θα είναι Ν=1000π, κ.ο.κ….

Οπότε, γνωρίζοντας το φ, μπορούμε να υπολογίσουμε με την χρήση του Ν το π.Έτσι, για παράδειγμα αν το μεγάλο σώμα έχει μάζα εκατό, θα πραγματοποιηθούν 314 κρούσεις, το οποίο δίνει σαν πρώτη προσέγγιση του π το γνωστό 3,14.

ΤΕΡΜΑΤΙΣΜΟΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ

Προφανώς, η διαδικασία δεν συνεχίζεται επ' άπειρον. Η διαδικασία τερματίζει όταν το μικρό σώμα έχει μικρότερη ταχύτητα προς τη θετική κατεύθυνση (δεξιά) από ότι το σώμα με τη μεγαλύτερη μάζα. Αυτό απεικονίζεται γεωμετρικά με την περιοχή κάτω από την ευθεία $v_1 = v_2$ και πάνω από τον άξονα x'x. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι αν $v_2 < v_1$ και $v_1 > 0$, το σώμα 1 θα διαφύγει στα δεξιά και δε θα υπάρξει άλλη κρούση.Λύνοντας το παρακάτω σύστημα ανακαλύπτουμε το σημείο στο οποίο τερματίζεται το πείραμα.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2E \\ v_1 = v_2 \end{cases}$$

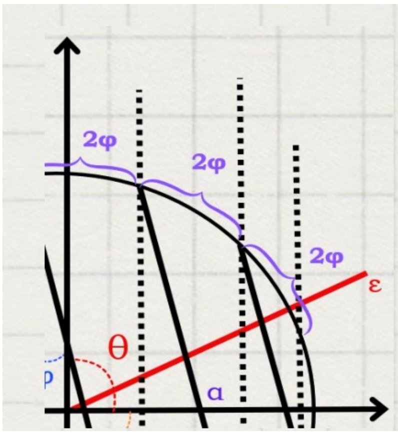
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2E \\ \dfrac{x}{\sqrt{m_1}} = \dfrac{y}{\sqrt{m_2}} \end{cases} \Rightarrow \cdots .. \Rightarrow (x, y)$$

$$= (\ 2E\sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}}, 2E\sqrt{\frac{m_2}{m_1 + m_2}})\ .$$

Άρα:

$$tan\alpha = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$$

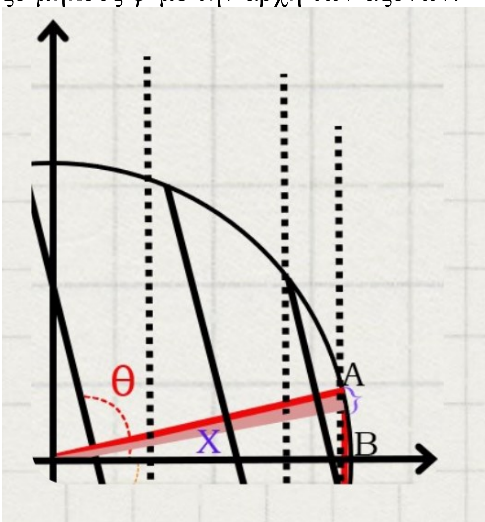
Ισχύει, δηλαδή, ότι η γωνία που προκύπτει από τη λύση του συστήματος μεταξύ της ευθείας και του κύκλου, είναι ίση με την αρχική γωνία φ, καθώς έχουν ίσες εφαπτόμενες οι οποίες, όπως έχει ήδη αναφερθεί, εξαρτάται από τον λόγο των μαζών.



Σχήμα 5: μεγέθυνση του σχήματος για την εστίαση στο σφάλμα που προκύπτει

ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

Αρκετό ενδιαφέρον έχει και η μελέτη του αντίστοιχου σφάλματος. Το κομμάτι του κύκλου που δεν θα καλυφθεί από τα τόξα που χρησιμοποιήθηκαν είναι το τόξο που ορίζεται από το σημείο τομής του κύκλου με την ευθεία $v_1 = v_2$ και το τελευταίο σημείο τομής που αναπαριστά την τελευταία κρούση. Όμως, όπως αναφέρθηκε πιο πριν η ευθεία ορίζει τόξο μήκους φ με την αρχή των αξόνων.



Σχήμα 6: προσέγγιση - προσδιορισμός του σφάλματος ως μια μεταβλητή τιμή x

Άρα, αν x είναι το σφάλμα θα ισχύει:

$$x < \varphi = arc\tan\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}.$$

Όμως, καθώς χρησιμοποιούμε στη θέση του σώματος με μάζα m_1 , μάζες οι οποίες αυξάνονται απεριόριστα, υπακοούοντας την σχέση $m_1 = m_2 10^x$, παρατηρούμε ότι, καθώς

$x \to +\infty$, θα έχουμε $arc\tan\sqrt{\frac{1}{10^x}} \to 0$.

Αυτό σημαίνει ότι, όσο αυξάνεται η μάζα που χρησιμοποιούμε για το σώμα 2, τόσο το σφάλμα τείνει στο 0, άρα και η προσέγγιση του π γίνεται όλο και πιο ακριβής.

ΚΩΔΙΚΑΣ

Για τη μελέτη του πειράματος και την αναπαράσταση της αρχικής του διάταξης ψηφιακά, δημιουργήσαμε έναν κώδικα με τη βοήθεια της Unity Engine και σε γλώσσα C#. Έτσι, καταφέραμε να αναπαραστήσουμε γραφικά την πειραματική διάταξη και τις εξιδανικευμένες συνθήκες που απαιτούνται. Ο κώδικας που δημιουργήσαμε, στην ουσία προσομοιάζει, σε έναν δισδιάστατο χώρο, τις κρούσεις μεταξύ δύο σωμάτων και ενός ακλόνητου τοίχου άπειρης μάζας, υπολογίζοντας κάθε κρούση και αθροίζοντας αυτές σε έναν ακέραιο αριθμό, ο οποίος εμφανίζεται στην οθόνη και βοηθά στην έγκυρη προσέγγιση του άπειρου αριθμού π, μέχρι και το τέταρτο δεκαδικό του ψηφίο. Το πείραμα είναι θεωρητικό και οι κρούσεις είναι χιλιάδες. Για τον λόγο αυτό, κάθε παραπάνω δεκαδικό ψηφίο απαιτεί περισσότερες κρούσεις, δηλαδή μεγαλύτερη

διαφορά αναλογίας μαζών των σωμάτων, διαδικασία αρκετά χρονοβόρα. Έτσι λοιπόν, αντιλαμβανόμαστε πως ο κώδικας θεωρητικά είναι ικανός να προσομοιάσει και την παραμικρή κρούση, προσεγγίζοντας με πολύ μεγάλη ακρίβεια το π, όμως η διαδικασία θα ήταν ανέφικτη στον πραγματικό χρόνο.
Παρακάτω παρατίθενται ορισμένα αριθμητικά αποτελέσματα μαζί με το αντίστοιχο σφάλμα καθώς ο λόγος των μαζών μεταβάλλεται.

Λόγος μαζών m_2/m_1	Αριθμός κρούσεων	Υπολογισμός του π	Σφάλμα < $tan^{-1}(10^{-n})$	$\pi - \tilde{\pi}$
10^{-2}	31	3,1	0,09967	0,04159
10^{-4}	314	3,14	0,00999	0,00159
10^{-6}	3.141	3,141	0,00099	0,00059
10^{-8}	31.415	3,1415	0,00009	0,00009

Σχήμα 7. Πίνακας με τα αριθμητικά αποτελέσματα του κώδικα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Άρθρα

G. Galperin.(2003) Playing pool with π (the number π from a billiard point of view) ,Regular and chaotic dynamics 2003, Volume 8, Number 4, pp. 375-394.
Παναγιώτης Ε.Αράπης, Φυσικός Διαδοχικές μετωπικές ελαστικές κρούσεις, 20 Ιουλίου 2019-Αθήνα

Ιστοσελίδες και οπτικοακουστικό υλικό στο διαδίκτυο

https://youtu.be/jsYwFizhncE?si=NoOoZ0mbbJ4N3HQC
https://www.3blue1brown.com/