

## Πρεβεζάνικα Χρονικά

Αρ. 39-40 (2003)

ΠΡΕΒΕΖΑΝΙΚΑ ΧΡΟΝΙΚΑ, 39-40 (2003)



Πυθαγόρεια Αριθμητική και Φίλιοι Αριθμοί

Βασίλειος Πάυλος Νταλλής

doi: [10.12681/prch.29001](https://doi.org/10.12681/prch.29001)

Copyright © 2022, Βασίλειος Πάυλος Νταλλής



Άδεια χρήσης [Creative Commons Αναφορά 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

### Βιβλιογραφική αναφορά:

Νταλλής Β. Π. (2022). Πυθαγόρεια Αριθμητική και Φίλιοι Αριθμοί. *Πρεβεζάνικα Χρονικά*, (39-40), 211-232.  
<https://doi.org/10.12681/prch.29001>

# Πυθαγόρεια Αριθμητική και Φίλιοι Αριθμοί

Νταλλή Βασιλείου του Παύλου  
Φυσικού & Μουσικού σύνθεσης

## Πρόλογος

Υπό μορφή δοκιμίου –πραγματείας– μια επισκόπηση, παρουσίαση της Μαθηματικής Θεωρίας των Πυθαγορείων, με παράλληλη επικέντρωση και εστίαση στο ιδιαίζον κομμάτι της που φέρει τον τίτλο **Φίλιοι Αριθμοί**.

Βασικά βοηθήματα λοιπόν στην εργασία μου αυτή, δύο μεγάλα έργα δύο Άγγλων μελετητών της Αρχαιότητας:

1<sup>ο</sup> το βιβλίο του Thomas Taylor<sup>1</sup>: *Η Θεωρητική Αριθμητική των Πυθαγορείων*, στο οποίο περιέχονται όλα όσα έχουν καταγραφεί γύρω από αυτό το θέμα από τον **Θέωνα**<sup>2</sup> τον Σμυρναίο, τον **Νικόμαχο**<sup>3</sup> τον Γερασήνο, τον **Ιάμ-**

1. Thomas Taylor (1758-1835): *Η Θεωρητική Αριθμητική των Πυθαγορείων*, Εκδόσεις Ιάμβλιχος 1999. Περισσότερα στοιχεία στο βιογραφικό του συγγραφέα.

2. Θέωνας ο Σμυρναίος: Ένας από τους διασωζόμενους αρχαίους συγγραφείς (2<sup>ος</sup> μ.Χ. αι.) που έχει γράψει για την Θεωρητική Αριθμητική, μεταφέροντας έτσι πληροφορίες για την Πυθαγόρεια μαθηματική Αριθμητική Θεωρία. Γεννήθηκε στη Σμύρνη και έγινε γνωστός για το βιβλίο του: *Θέωνος Σμυρναίου Πλατωνικού των κατά το Μαθηματικόν χρησιμων εις την Πλάτωνος ανάγνωσιν*, στο οποίο ερμηνεύει τις ιδέες των Πλατωνικών διαλόγων γύρω από τα Μαθηματικά, την Αστρονομία και τη Μουσική, διασώζοντας έτσι Πυθαγόρειες απόψεις.

3. Νικόμαχος ο Γερασπνός: Σπουδαίος Έλληνας μαθηματικός (1<sup>ος</sup>- 2<sup>ος</sup> μ.Χ. αι.) από τη Γέρασα της Κοίλης Συρίας. Έργο του το σύγγραμμα *Αριθμητική Εισαγωγική*, στο οποίο μεταφέρονται στοιχεία της Πυθαγόρειας Αριθμητικής, μεταφρασμένο μάλιστα στα Λατινικά από το Ρωμαίο Βοήθιο. Υπόψιν ότι από την εποχή του Ευκλείδη (4<sup>ος</sup>-3<sup>ος</sup> αι.) ως την εποχή του Νικόμαχου δε διασώθηκε καμία πραγματεία περί Αριθμητικής, αν βέβαια υπήρχε.

**Βλιχο**<sup>4</sup> και τον **Βοήθιο**<sup>5</sup> και τα οποία οργάνωσε και παρουσίασε ο T. Taylor σε τρία βιβλία<sup>6</sup>,

2<sup>ο</sup> οι δύο τόμοι με την *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών* του **Thomas Little Heath** (1861-1940), έργο που εξέδωσε πρόσφατα το Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης (Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ.), Αθήνα 2001.

Ο T.L. Heath που είναι και αυτός μια αυθεντία στην Ιστορία των Επιστημών και ιδιαίτερα αυτής των Ελληνικών Μαθηματικών, συνέγραψε πολλά έργα, μεγάλο αριθμό άρθρων και επιστημονικών εργασιών. Διετέλεσε δε μέλος της Βρετανικής Ακαδημίας Επιστημών, μέλος της Βασιλικής Εταιρείας του Λονδίνου και Πρόεδρος της Βρετανικής Μαθηματικής Εταιρείας.

Η Πυθαγόρεια και μεταπυθαγόρεια σκέψη διακήρυξε και στερέωσε αναμφισβήτητα αυτό που και η Πλατωνική και κατ' επέκτασιν και η Αριστοτελική σκέψη το υιοθέτησε. Σε κάθε αντικείμενο υλικό ή υπερβατικό (ιδέα;) μπορούμε να αποδώσουμε έναν **αριθμό** ή καλύτερα: οι **Μαθηματικές αρχές** οφείλουν να αποτελούν τα **πρότυπα** όλων των υπαρκτών και μη πραγμάτων και επειδή αυτές οι όποιες Μαθηματικές αρχές ή οι αντίστοιχοι Αριθμοί “δουλεύονται” και μελετώνται πιο εύκολα (σαν αντιπροσωπευτικά δείγματα των όντων) καταλήγουμε να εκφράσουμε, να σχηματίσουμε μια ολόκληρη Θεωρία Αριθμών πλήρη σχέσεων, αντιθέσεων, φιλότιπος (και γιατί όχι, και νείκους;), αναλογιών, θα λέγαμε και Αρετών.

Εδώ να κάνω μια ιδιαίτερη επισήμανση σχετικά με το ότι δεν έχει ξεκαθαρίσει ιστορικά από όλη την Πυθαγόρεια Μαθηματική και Αριθμητική θε-

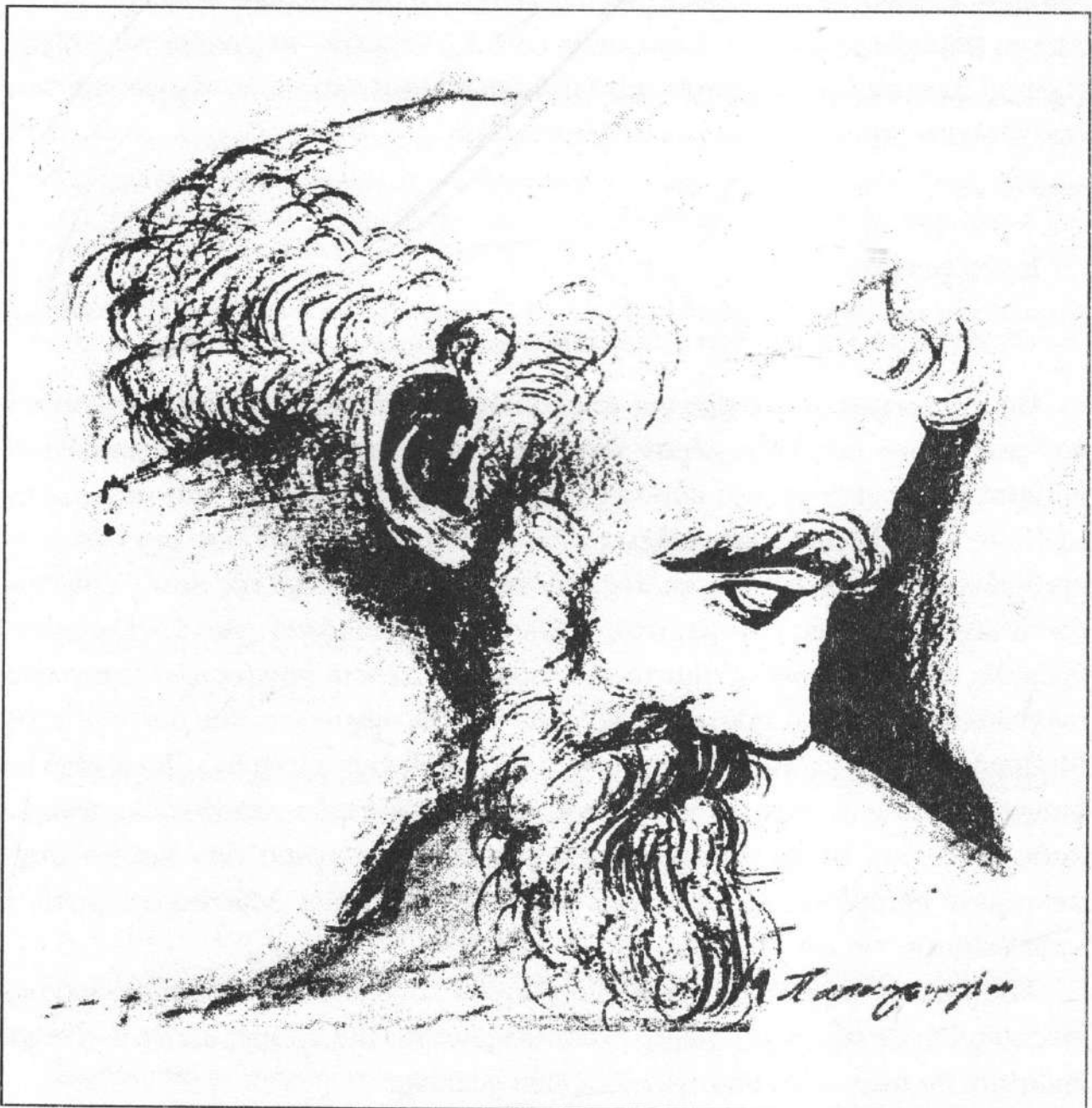
4. Ιάμβλιχος (3<sup>ος</sup>-4<sup>ος</sup> μ.Χ.): Νεοπλατωνικός φιλόσοφος και μαθηματικός από τη Χαλκίδα της Συρίας. Σώζονται 5 από τα 10 βιβλία με τίτλο *Συναγωγή Πυθαγορείων δογμάτων* από τα οποία άντλησε πληροφορίες και ο Taylor. Τα 10 αυτά βιβλία αυτά φέρνουν τίτλους: I. Περί Πυθαγορείου βίου. II. Προτρεπτικός επί φιλοσοφίαν. III. Περί της κοινής Μαθηματικής Επιστήμης. IV. Περί της Νικομάχου Αριθμητικής Εισαγωγής. V. Περί της Αριθμητικής Επιστήμης εις την Φυσικόν. VI. Περί της Αριθμητικής Επιστήμης εις την Ηθικόν. VII. Περί της Αριθμητικής Επιστήμης εις την Θεολογίαν. VIII. Περί της Πυθαγόρειας Γεωμετρίας. IX. Περί της Πυθαγόρειας μουσικής. X. Περί Πυθαγόρειας Αστρονομίας (φημολογείται όμως).

5. Βοήθιος (5<sup>ος</sup>-6<sup>ος</sup> μ.Χ.): Ελληνολάτρης Ρωμαίος συγγραφέας φιλοσοφικών κυρίως, αλλά και μαθηματικών έργων, ο οποίος διασώζει και αυτός παλιότερους συγγραφείς.

6. Πληροφορίες για τους ανωτέρω Μαθηματικούς και συγγραφείς μπορεί να βρει κανείς στο σπουδαίο έργο του Β. Σπανδάγου: *Οι Μαθηματικοί της Αρχαίας Ελλάδας*. Εκδόσεις Αίθρα 1994.



ωρία, τι ανήκει στον ιδρυτή και μεγάλο Δάσκαλο της σχολής και τι στους κατοπινούς μαθητές και συνεχιστές αυτής (τους λεγόμενους Πυθαγόρειους). Οι πηγές είναι ελάχιστες, πολλές φορές και αντιφατικές, αφού ως γνωστόν, ο Πυθαγόρας δεν έγραψε τίποτα. Μόνο αναφορές βρίσκει κανείς σε κείμενα του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη έως την εποχή του Ιάμβλιχου, του Πορφύριου και του Νικόμαχου οι οποίοι ασχολήθηκαν και σχολίασαν τη ζωή και το έργο του Πυθαγόρα και δη της Μαθηματικής του Θεωρίας, μόνο που αυτά έγιναν 800 τουλάχιστον χρόνια μετά την εποχή του Μεγάλου Δασκάλου, πράγμα που μας υποδεικνύει να διατηρήσουμε τις όποιες επιφυλάξεις μας για τις πληροφορίες που μας έρχονται από εκείνη την εποχή.



Έτσι, ξεκινώντας από τα Μυθολογικά και περιδιαβαίνοντας τα Προσωκρατικά και Μετασωκρατικά χρόνια θα ταξιδέψουμε μέχρι την εποχή του Νεοπλατωνισμού όπου και η Μαθηματική Θεωρία του Πυθαγόρα παίρνοντας μια πιο συγκεκριμένη μορφή μετά από τις καταγραφές των: Ιάμβλυχου, Πορφύριου, Θέωνα κ.λπ. συνέχισε την “πορεία” της μέχρι την εποχή της Ύστερης Αναγέννησης και από εκεί σε μας σήμερα. Φυσικά όλα αυτά στα πλαίσια ενός απλού δοκιμίου χωρίς κουραστικές Μαθηματικές και Φιλοσοφικές αναφορές, που σίγουρα θα είχαν σαν προϋπόθεση την ύπαρξη ενός πιο ολοκληρωμένου Μαθηματικοφιλοσοφικού υποβάθρου του οποιουδήποτε αναγνώστη. Ένα δοκίμιο, τέλος, που σε συνδυασμό με το άρθρο μου «Περί Αρμονίας», που θα καταχωρηθεί μελλοντικά στα *Πρεβεζάνικα Χρονικά*, στόχο έχει να σκιαγραφήσει και να επιτονίσει ειδικά θέματα –κομμάτια της Πυθαγόρειας σκέψης– όπως αυτά της **Πυθαγόρειας Μουσικής Αρμονίας** και των **Φίλιων Αριθμών** στο προκείμενο άρθρο.

## Εισαγωγή

### «Ευάν μετά των φίλων» Πλάτων

Θα ήταν όντως παράλογο για τον Πυθαγόρα και τις ιδέες του, οι φυσικοί αριθμοί να μην κρύβουν, πέραν των ήδη ανεγνωρισμένων γεωμετρικών και αριθμητικών σχέσεων, και κάποιες ιδιαίτερες **φίλιες** σχέσεις και μάλιστα εν πρώτοις ατελείς αλλά και τέλειες. Έτσι, εν μέσω των άλλων **αρετών** των αριθμών, προστίθενται και φιλίες, οπότε συνολικά οι αρετές αυτές εμφανίζονται, προβολικά θα λέγαμε, στις κοινωνικές σχέσεις και, γιατί όχι, στα ανθρώπινα πάθη και ιδεολογήματα. Δηλαδή, μια τέλεια οργανωμένη κοινωνία ανθρώπων θα είχε το πρότυπό της στην τέλεια οργάνωση και διάταξη ενός Μαθηματικογεωμετρικού συνεχούς και δη αυτού των αριθμών. (Ίσως εδώ να διαφαίνεται και η ουράνια νυχτερινή, αστρική διάταξη, αφού κάθε αστερισμός έχει τόσο το συγκεκριμένο γεωμετρικό του σχήμα όσο και το συγκεκριμένο αριθμό αστεριών – κάτι που όλοι οι αρχαίοι λαοί παρατηρούσαν κάθε έναστρη νυχτιά.)

Μια αμφιμονοσήμανση ίσως δύο κόσμων, δύο πεδίων, που φαινομενικά είναι άσχετα μεταξύ τους, χωρίς αναλογίες και συνδυασμούς, οπότε η εύλογη ερώτηση θα ήταν η ίδια και για τους δύο χώρους:

Υπάρχει αριθμός χωρίς φίλο, και αντίστοιχα, υπάρχει ευτυχισμένος άνθρωπος χωρίς το έτερόν του; Μια απάντηση συγκεκριμένη και ιδιαίτερος ενδιαφέρουσα αντλεί κανείς από τον Αριστοτέλη<sup>7</sup> ο οποίος λέει: «Ασφαλώς όχι, εκτός αν είναι θεός ή θηρίο, μιας και οι θεοί, ζώντας σε σφαίρες πολύ μακρινές από τα ανθρώπινα δρώμενα, δεν χρειάζονται ιδιαίτερες φιλίες. Ίσως μάλιστα να έχουν την ανάγκη ή να οφείλουν την ύπαρξή τους στις συγκρούσεις και στις διαστάσεις τους εν γένει».

Ήδη στην Πυθαγόρεια και μεταπυθαγόρεια σκέψη, οι απλοί φυσικοί αριθμοί<sup>8</sup> δεν εμφανίζονται σαν απλές ποσοτικές και μόνον οντότητες, αλλά συνδέονται και εκφράζουν ποιότητες, γεωμετρικά<sup>9</sup> σχήματα και ένα σωρό άλλες συμμετρίες, αναλογίες, σχέσεις σαν τις φιλίες που προαναφέραμε. Ακόμα και αυτή την ιδέα-έννοια της Αρμονίας<sup>10</sup> της φύσης, η ίδια σκέψη την ταυτίζει και την αναπαριστά με ένα συγκεκριμένο ιερό αριθμό (η ιερά

7. Πράγματι θα μπορούσε κανείς να ισχυριστεί ότι, διαβάζοντας και μελετώντας τμήματα των έργων του Αριστοτέλη *Ηθικά Νικομάχεια*, *Ηθικά Ευδήμεια* και *Μεγάλα Ηθικά*, έχει μπροστά του ένα ολόκληρο έργο περί φιλίας.

8. Φυσικοί αριθμοί είναι οι ακέραιοι 1, 2, 3, 4, ... (το σύνολο N). Ένας όρος που εισήγαγε στα Μαθηματικά ο Νικόμαχος ο Γερασπνός.

9. Υπάρχουν δηλαδή κατηγορίες φυσικών αριθμών με "γεωμετρική" σημασία π.χ.

i) Τρίγωνοι αριθμοί όπως:

$$a_1 = 1 \quad \text{====>} \quad \bullet$$

$$a_2 = 1+2 = 3 \quad \text{====>} \quad \bullet \bullet$$

$$a_3 = 1+2+3 = 6 \quad \text{====>} \quad \bullet \bullet \bullet$$

$$a_4 = 1+2+3+4 = 10 \quad \text{====>} \quad \bullet \bullet \bullet \bullet \quad (\text{έχουμε δηλαδή τριγωνικό σχήμα})$$

ii) Τετράγωνοι αριθμοί (οι αριθμοί που είναι τέλεια τετράγωνα και εκφράζονται επίσης σαν αθροίσματα περιττών αριθμών), π.χ.:

$$a_1 = 1 = 1^2 \quad (\text{εμβαδόν τετραγώνου με πλευρά 1})$$

$$a_2 = 1+3 = 4 = 2^2 \quad (\text{ομοίως με πλευρά 2})$$

$$a_3 = 1+3+5 = 9 = 3^2 \quad (\text{με πλευρά 3})$$

$$a_4 = 1+3+5+7 = 16 = 4^2 \quad (\text{με πλευρά 4}) \text{ κ.λπ.}$$

10. Περισσότερες πληροφορίες στην εργασία «Περί Αρμονίας» του Βασίλη Νταλλή, που θα δημοσιευθεί σε επόμενο τεύχος των *Πρεβεζάνικων Χρονικών*.



τετρακτύς<sup>11</sup> – ο τριγωνικός αριθμός 10, που δηλώνει το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων αριθμών  $10=1+2+3+4$ )<sup>12</sup>. Πράγματι οι 4 πρώτοι φυσικοί αριθμοί,<sup>13</sup> με τις μεταξύ τους αναλογίες καταδεικνύουν και εκφράζουν αφ' ενός μεν τα εύχη μουσικά διαστήματα μιας οκτάβας (τα διαστήματα 5<sup>ης</sup>, 8<sup>ης</sup>, 4<sup>ης</sup>), αφ' ετέρου δε μια γενικότερη συμπαντική Αρμονία διάχυτη σε οποιαδήποτε κρυμμένη ή φανερή έκφρασή της.

Θα τολμούσαμε να δούμε ακόμη και στην ίδια λέξη **Αριθμός**<sup>14</sup> την ταυτόσημη έννοια της φιλίας, διότι όπως ο αριθμός μετράει και θέτει σε κανονική φυσική διάταξη όλα τα πράγματα, ενώνοντάς τα έτσι σε κάποια φιλική συμμαχία, έτσι και η φιλία συναρμολογεί και θέτει μια ανάλογη ακολουθία –ομάδα, ενότητα ανθρώπινου-υλικού– σε μια δίκαιη και ισορροπημένη κοινωνία.<sup>15</sup> Στον αντίποδα αυτής της πραγματικότητας η μοναξιά –η έλλειψη ακόμα και μιας απλής στοιχειώδους φιλικής παρουσίας– αποκαλύπτει μπροστά στις ψυχές και στα μάτια μας ένα πραγματικά ουσιαστικό κενό. Ένα κενό που –είτε Φυσικομαθηματικό (η Μοντέρνα φυσική, δεν δέχεται καν την ύπαρξή του, αφού είναι αδύνατον να το εννοήσουμε μακριά από κάποιο βαρυτικό πεδίο, πόσο δε μάλιστα στο μικρόκοσμο της Κβαντικής Φυσικής όπου είναι γεμάτο σωματίδια, πεδία και κβαντικές αλληλεπιδράσεις), είτε, εσωτερικά ανθρώπινο να είναι– κρύβει πόνο, ψυχρότητα, σκοτεινότητα, και μοιραία θάνατο ή εξαϋλωση.

Θέλει πραγματικά πολύ αντρισμό για να κατανοήσουμε ότι οι υγιείς σχέσεις αληθινής φιλίας μεταξύ αντρόγυνων, παιδιών, φίλων, (ας ανατρέξει κανείς στη Μυθολογία, στην όμορφη ιστορία του Δάμωνα και του Φιντία ή σε αυτή του Φαέθοντα και του Κύκνου και σε τόσες άλλες) και κατ' επέκτασιν μεταξύ κοινωνιών, χρήζουν του επαναπροσδιορισμού των, μιας και η

11. «Οὐ μὰ τὸν ἄματέρᾳ ψυχῇ παραδόντα τετρακτύν, παγάν ἀνάου φυσέως ρίζωμα τ' ἔχουσας»: Ο ὄρκος των μαθητῶν του Πυθαγόρα, όπως τον αναφέρει ο Θέων, και σημαίνει: «Όχι, δε θα προδώσω, μα τον Πυθαγόρα, ο οποίος παρέδωσε στην ψυχή μας την τετρακτύν, πηγή αιώνιας φύσης, που έχει βαθύ ρίζωμα».

12. Βασικό κομμάτι της Ηρακλείτειας σκέψης εκπεφρασμένη στο απόσπασμα «Ἄρμονία ἀφανὴς φανερῆς κρέσσων», από το οποίο εμφανίζεται και μία ουσιαστική διαφοροποίηση από την αντίστοιχη Πυθαγόρεια.

13. Βλέπε και σημείωση 9. Το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων αριθμών 1, 2, 3, 4.

14. Λεξικό Lindell-Scott, λήμμα Αρ, από όπου και οι λέξεις: Αραρίσκω, Αριθμός, Αρτιος, Αρμονία, Αριστος, Αρμοσις κ.λπ.

15. Thomas Taylor: *Η Θεωρητική Αριθμητική των Πυθαγορείων*, σελ. 235.

επερχόμενη **παγκοσμιοποίηση** (ομογενο-ποίηση) μας περιμένει στη γωνιά και μάλλον δεν πολυκαταλαβαίνει από ουσιαστικές φιλίες και δη, ερωτοφιλίες.<sup>16</sup> Και σαν τέτοιες εννοούνται οι φιλίες-σχέσεις, χωρίς παρεκτροπές και διαστροφές, γιατί αν αυτές πρότευαν ή απλά περίσσευαν, η ζωή θα περίττευε.<sup>17</sup> Κάτι που και η ίδια η Φύση, μέσω της Χημείας, μας υποδεικνύει.

Πράγματι, η ουδετερότητα, η αδράνεια ακόμα και η ιδιώτευση (idiot στις Ευρωπαϊκές γλώσσες, από το Ελληνικό **ιδιώτης**, σημαίνει τον πλίθιο, το βλάκα, τον εκτός πόλεως κατά την Αρχαία Ελληνική αντίληψη) δείχνει μια **ευγένεια** (π.χ. τα αδρανή-ευγενή<sup>18</sup> αέρια που αποτελούν την 8<sup>η</sup> ομάδα του περιοδικού συστήματος) αλλά και μια απομόνωση, μια μοναχικότητα χωρίς φιλίες και αντιδράσεις (δούναι και λαβείν δηλαδή) που στόχο θα είχαν την αμοιβαία αλληλοσυμπλήρωση μιας εκ των προτέρων δεδομένης ατελούς προσωπικότητας. Στη Χημεία αυτό σε πολλές περιπτώσεις γίνεται με αμοιβαία συνεισφορά κοινών ηλεκτρονίων. Αλλά ζωή σημαίνει τουλάχιστον χημικές αντιδράσεις και όχι αδράνεια και αποξένωση. Μια αποξένωση που, φαινομενικά, ίσως, να χαρακτηρίζει και τους Ακέραιους αριθμούς (μεταξύ τους υπάρχουν άπειροι άλλοι ρητοί και άρρητοι), αφού ο Μεγάλος Δάσκαλος αποκάλυψε και παρέδωσε στους κατοπινούς μαθηματικούς και μελετητές ένα σωρό σχέσεις, αρετές αλλά και κρυμμένα μυστικά. Ένας τέτοιος, πρόσφατα απολεσθείς, είναι ο Γιάννης Ξενάκης. Τρανό παράδειγμα μελετητή Μαθηματικού και Μουσικού Δημιουργού ενός ιδιότυπου και πρωτότυπου μουσικού σύμπαντος με ιδιαίτερες αναφορές όχι μόνο στις Πυθαγόρειες αλλά και Παρμενίδειες (ακόμα και Επικούρειες<sup>19</sup>) ιδέες περί Φύσης. Έτσι

16. Για περισσότερα στο πολύ ενδιαφέρον ουσιαστικό και κατά τη γνώμη μου εκρηκτικό, βιβλίο-“καταπέλτη” του Γιάννη Γουδέλη: *Η Ερωτική φιλία των Αρχαίων Ελλήνων*, Εκδόσεις Δίφρος 1992.

17. Ομοίως σελ. 49.

18. Ευγενή αέρια είναι τα χημικά στοιχεία: He (Ήλιον), Ne (Νέον), Ar (Αργόν), Kr (Κρυπτόν), Xe (Ξένον), Rn (Ραδόνιον), τα οποία έχουν στην εξωτερική στοιβάδα του ατόμου τους 8 ηλεκτρόνια (εκτός φυσικά του He). Είναι αρκούτως ευσταθή, αφού έχουν συμπληρωμένη την εξωτερική στοιβάδα τους. Είναι δηλαδή “απρόθυμα” να αντιδράσουν με άλλα άτομα και να σχηματίσουν άλλα μόρια, γι’ αυτό λέγονται και αδρανή.

19. Στην τριάδα, βάθρο της σκέψης του Ξενάκη, θα λέγαμε ότι ο Επίκουρος έχει το ρόλο φορέα – ενός αντιιδεαλιστικού αντίβαρου που, σίγουρα, ταιριάζει στις πολιτικές ιδέες του δημιουργού.



έχουμε την εξής ενδιαφέρουσα αντιστροφή: Ενώ ο Πυθαγόρας μαθηματικοποίησε το σύμπαν (ορατό και ηχητικό), ο Ξενάκης δημιούργησε ηχητικά μουσικά σύμπαντα, στηριγμένος στα Μαθηματικά. Οπότε τα μουσικά συμβάντα (μια απλή μελωδία τζιτζικιού, καταγίδας, εσωτερικές κραυγές κ.λπ.) επαναπροσδιορίζονται πλέον σαν ποσότητες και ποιότητες Μαθηματικές, στοιχεία ενός Μαθηματικού χώρου. Αν μάλιστα αυτά τα συμβάντα ιδωθούν σαν Μουσικές στιγμές – σημεία – ταξιδεύουμε με τη σκέψη του Ξενάκη σε Σημειολογικές προεκτάσεις και υπερβάσεις, που δείχνουν την επιρροή του συνθέτη από το Γαλλικό πνεύμα της εποχής του<sup>20</sup>.

## Α Γενικά περί Πυθαγόρειας Αριθμητικής

Η Διδασκαλία του Πυθαγόρα αποτελεί ένα σύνολο Φιλοσοφικών, Μαθηματικών καθώς και θρησκευτικών δοξασιών (με ιδιαίτερα έντονες καταβολές και επιδράσεις, αναμφίβολα της Ορφικής διδασκαλίας και θρησκείας). Ήτοι μια συνολική αναζήτηση, πορεία, σε όλους τους χώρους της σκέψης και ανθρώπινης κατάκτησης που δημιουργεί και κληρονομεί στους μεταγενέστερους ένα πραγματικό μύθο στον οποίο η αλήθεια και η υπερβολή συνυπάρχουν. Ένας μύθος που ξεκινάει ακόμα και από τη μέρα της γέννησής του. (κάπου ανάμεσα στο 580 και 500 π.Χ. από το Μνήσαρχο και την Παρθενίδα, σύμφωνα με τους βιογράφους, τον Ιάμβλιχο και Πορφύριο) αφού σύμφωνα με αυτόν πήρε το όνομα Πυθαγόρας μετά από την επίσκεψη των γονιών του στο Μαντείο των Δελφών όπου η Πυθία τους ανήγγειλε (αγόρευσε) την επερχόμενη γεννησή του, καθώς και το λαμπρό μέλλον που του επεφύλασσε η τύχη<sup>21</sup>.

Στο βιβλίο του Taylor, πιο συγκεκριμένα θα βρει κανείς συγκεντρωμένα και συστηματοποιημένα από τις αρχαίες πηγές, καθώς και από μελέτες του ίδιου του Taylor, όλα τα στοιχεία μιας πραγματικής Αριθμητικής Θεωρίας

20. Ανάλογες επιρροές θα βρούμε και στον πρωτοποριακό Γάλλο Μουσουργό Claude Debussy (1862-1918) «του οποίου το έργο στηρίζεται κυρίως στη μαγεία του ήχου που χρησιμοποιείται ως ζωγραφικό, περισσότερο, στοιχείο και όχι ως στοιχείο έκφρασης συναισθημάτων», (Karl Nef, *Ιστορία της Μουσικής*, σελ. 517).

21. Όσο για το θάνατό του, τα πράγματα περιπλέκονται. Κατά μία άποψη πέθανε στο Μεταπόντιο, στο ναό των Μουσών όπου είχε εγκλειστεί, από αστία, κατά δε μία άλλη, δολοφνημένος από εξαγριωμένους αντιπάλους.

(ο Πυθαγόρας την αναβίβαζε στην πρώτη θέση μεταξύ των άλλων Επιστημών – συμπεριλαμβανομένης της Αστρονομίας και αυτής της ίδιας της Μουσικής – και τη θεωρούσε ακόμη και **μητέρα** τους) τόσο των λεγόμενων Πυθαγορείων όσο και άλλων μελετητών και σχολιαστών της ζωής και του έργου του Πυθαγόρα.

Ενδεικτικά έχουμε στο προαναφερθέν βιβλίο ταξινομημένα:

1. Τον ορισμό και την ουσία της έννοιας της **μονάδας** αλλά και αυτής του **αριθμού**<sup>22</sup>
2. Τη διαίρεση των αριθμών σε περιττούς, άρτιους, αρτιοπέρισσους<sup>23</sup>, περισσάρτιους<sup>24</sup>, αρτιάκις άρτιους<sup>25</sup> και πρώτους<sup>26</sup>
3. Τους τέλειους<sup>27</sup>, φίλιους<sup>28</sup>, ελλιπείς<sup>29</sup> και υπερτέλειους αριθμούς<sup>30</sup>

---

22. Ενδεικτικά αναφέρω κάποιες απόψεις για την έννοια του αριθμού. Ο ίδιος ο Πυθαγόρας τον όρισε ως την επέκταση και ενέργειά των σπερματικών λόγων που υπάρχουν στη μονάδα. Από δε τον Ίππασο το Μεταποντίνο (5<sup>ος</sup>-4<sup>ος</sup> π.Χ. (από το Μεταπόντιο της Κάτω Ιταλίας, ο οποίος, αν και αρχηγός των Ακουσματικών – η πρώτη τάξη, θα λέγαμε, η πρώτη βαθμίδα της Πυθαγόρειας σχολής – τιμωρήθηκε, σύμφωνα με τον Ιάμβλιχο, με θάνατο από τους άλλους Πυθαγόρειους) διασώθηκε η άποψη ότι αριθμός είναι το πρώτο υπόδειγμα συγκρότησης του κόσμου και ότι είναι όργανο της κρίσης του Θεού σαν δημιουργού του Σύμπαντος. Κατά δε τον Φιλόλαο (από τους πλέον σημαντικούς Πυθαγόρειους του 6<sup>ου</sup> π.Χ. αιώνα από τον Τάραντα της Κάτω Ιταλίας), αριθμός είναι ο πιο εξαιρετός και αυτογενής δεσμός της αιώνιας διάρκειας των εγκόσμιων φύσεων. (Για περισσότερα: T. Taylor, σελ. 67).

23. Οι άρτιοι αριθμοί που οι υποδιαιρέσεις τους καθίστανται τελικά αδιαίρετοι, π.χ. οι αριθμοί: 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30 κ.λπ.

24. Οι αριθμοί που, διαιρούμενοι, δίνουν συνεχώς νεο-διαιρούμενους αριθμούς, ποτέ όμως τη μονάδα, π.χ. οι αριθμοί: 12, 20, 24, 28, ...

25. Οι αριθμοί που, διαιρούμενοι συνεχώς, θα δώσουν τελικό πηλίκο τη μονάδα, π.χ. 4, 8, 16, 32, 64, ...

26. Πρώτοι και ασύνθετοι είναι οι αριθμοί που κανένας άλλος δεν τους διαιρεί παρά μόνο η μονάδα, η οποία, έτσι και αλλιώς είναι η μητέρα-μήτρα όλων των αριθμών, π.χ. οι αριθμοί: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 κ.λπ. Ενώ δεύτεροι και σύνθετοι είναι οι περιττοί αριθμοί που αποτελούν γινόμενα δύο άλλων πρώτων αριθμών, π.χ. 9, 15, 21, 25, 27, 33, ...

27. Είναι αυτοί που το άθροισμά των διαιρετών τους μας δίνει αυτούς τους ίδιους, π.χ. ο 28 με διαιρέτες τους 1, 2, 4, 7, 14 των οποίων το άθροισμα είναι:  $1+2+4+7+14 = 28$ . Μάλιστα ο Νικόμαχος ο Γερασινός, που γνώριζε τέσσερις τέλειους αριθμούς (6, 28, 496, 8128), έκανε την παρατήρηση ότι ο πρώτος (6) ανήκει στο διάστημα (0, 10), ο δεύτερος (28) στο διάστημα (10, 100), ο τρίτος (496) στο διάστημα (100, 1.000) και ο τελευταίος στο διάστημα (1.000, 10.000). Επίσης ότι τελειώνουν σε 6 ή 8 και μάλιστα



4. Τους σχηματικούς αριθμούς, δηλαδή τετράγωνους, κύβους, ετερομήκεις, γνώμονες και επιμόριους αριθμούς<sup>31</sup>

5. Τη θεωρία των αναλογιών και των μέσων δύο αριθμών με εκτεταμένη παρουσίαση και φιλολογία και των 10 μέσων ανάλογων (6 Πυθαγόρειων και 4 μεταγενέστερων για να συμπληρωθεί η **Ιερά Δεκάς**), με πιο γνωστούς τον Αριθμητικό, το Γεωμετρικό και τον Αρμονικό μέσο

6. Τα γεωμετρικά επίπεδα και στερεά σχήματα καθώς και τις σχέσεις τους με τους Ακέραιους Αριθμούς

7. Τις Ανισότητες

8. Τη βαθύτερη ουσία και τις ιδιότητες των δέκα ιερών ποσοτήτων (από τη μονάδα έως την Ιερή Δεκάδα)<sup>32</sup>

---

→  
εναλλάξ. Βέβαια, μαθηματικά, αποδεικνύεται ότι όλοι οι τέλειοι αριθμοί τελειώνουν σε 6 ή 8, αλλά όχι αναγκαστικά εναλλάξ. Περισσότερα στο βιβλίο του T.L.Heath: *Η Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών*, τόμος I, σελ. 146. Πληροφοριακά, μέχρι σήμερα έχουν βρεθεί συνολικά 37 τέλειοι αριθμοί και έχουν τη μαθηματική μορφή:  $2^{v-1} \times (2^v - 1)$ .

28. Η ύπαρξη των αριθμών αυτών, φυσικά, δεν άφησε αδιάφορο τον Μεγάλο Μαθηματικό I. Euler (1707-1783) ο οποίος μάλιστα μας παρέδωσε 61 ζεύγη τέτοιων με τις ιδιότητες που αναφέρονται στο αντίστοιχο κεφάλαιο περί τέλειων και ατελώς φίλιων αριθμών.

29. Το άθροισμα των διαιρετών τους δεν υπερβαίνει τον ίδιο τον αριθμό, π.χ. 8 με διαιρετές 1, 2, 4 και  $1+2+4 = 7 < 8$ .

30. Εδώ το άθροισμα των διαιρετών υπερβαίνει τον ίδιο τον αριθμό, π.χ. ο 12 με διαιρετές 1, 2, 3, 4, 6 και  $1+2+3+4+6 = 16 > 12$ .

31. Οι αριθμοί που εμπεριέχουν ολόκληρο έναν άλλον και, επιπλέον, κάποιο τμήμα του, π.χ.:  $3/2 = 1+1/2$  ημιόλιος,  $4/3 = 1+1/3$  επίτριτος,  $5/4 = 1+1/4$  επιτέταρτος κ.λπ. Γενικά ο λόγος  $v+1/v$ , όπου  $v$  φυσικός αριθμός.

32. Ενδεικτικά θα αναφερθώ, αντιγράφοντας, όσα στοιχεία συμπεριλαμβάνει στο βιβλίο του ο Taylor σχετικά με την Ιερή Επτάδα και μόνον: Η επτάδα-εβδομάδα (σχήμα: 7 στο οποίο διαφαίνεται ίσως μια μικρή παραφθορά του γράμματος Z ως εβδόμου στη σειρά) έχει λοιπόν αξιοθαύμαστες καθώς και σεβάσμιες-σεπτές (σ - επτά) ιδιότητες, τις οποίες κυρίως ο Ιουδαίος Φίλων στην πραγματεία του περί Δημιουργίας του κόσμου, αναφέρει. Έτσι: α) Συντίθεται από τους 1, 2 και 4 οι οποίοι ανήκουν σε μία γεωμετρική πρόοδο, που, με τη σειρά της, σχηματίζει τις δύο πιο τέλειες μουσικές συμφωνίες: αυτήν της διαπασών (οκτάβα με λόγο 2/1) και αυτήν της δις διαπασών (διπλή οκτάβα με λόγο 4/1). β) Είναι το κοινό άθροισμά της μονάδας+εξάδας ( $1+6=7$ ), ομοίως δυάδα+πεντάδα ( $2+5=7$ ), τριάδα+τετράδα ( $3+4=7$ ). γ) Είναι ιερότατη γιατί, σαν άθροισμά του 3 και 4, συσχετίζεται με το ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές 3, 4 υποτείνουσα 5 και εμβαδόν 6 (εμβ. τριγώνου =  $B \cdot \upsilon / 2 = 3 \cdot 4 / 2 = 12 / 2 = 6$  το οποίο θεωρείται η αρχή των ποιοτήτων - εκ



9. Τη θεωρία των Αρρήτων<sup>33</sup> (με πιο πολλά και ενδιαφέροντα στοιχεία

των πρώτων ουσιών. Σαν άθροισμα λοιπόν του 3 και του 4, η Ιερή Επτάδα υποδηλώνει και την ορθή γωνία που είναι ανάμεσα στις πλευρές του προαναφερθέντος ορθογωνίου τριγώνου (με πλευρές 3, 4, 5) η οποία και αυτή στην Πυθαγόρεια Θεολογία αποτελεί την πραγματική ουσία και τελειότητα των γεωμετρικών σχημάτων. δ) Ορισμένες απόψεις φιλοσόφων την εξομοιώνουν με τη Νίκη, που είναι αμίτωρ, παρθενίς, αναδύομενη και αυτή (όπως η θεά Αθηνά) από το κεφάλι του Δία. Γι' αυτό, ειδικά οι Πυθαγόρειοι, τη μετονομάζουν σε Ηγέτη Κυβερνήτη, όλων των πραγμάτων. ε) Ο 7, όταν προστεθεί στη σειρά των προηγούμενων από αυτόν φυσικών αριθμών, δίνει τον τέλειο αριθμό 28 (σημείωση 28). Πράγματι:  $1+2+3+4+5+6+7 = 28$ . στ) Οι φάσεις της σελήνης κρύβουν τον αριθμό 7 αφού αυτή αποκτά την ολοκληρωμένη τέλεια μορφή της σε 28 ημέρες περνώντας 4 στάδια των 7 ημερών. ζ) Κάθε οργανικό σώμα έχει τρεις διαστάσεις (μήκος, πλάτος, ύψος) και τέσσερα όρια (σημείο, γραμμή, επιφάνεια και στερεό). η) Η ηλικία του ανθρώπου από τη νηπιακή έως τη γεροντική καταδεικνύει την παρουσία της Ιερής Επτάδας. Έτσι στην πρώτη επταετία φυτρώνουν τα δόντια, στη δεύτερη δημιουργείται η ικανότητα αναπαραγωγικού σπέρματος, στην τρίτη πυκνώνουν τα γένια, στη τέταρτη αυξάνει η δύναμη, στην πέμπτη η εποχή του γάμου ενώ στην έκτη (42 χρονών) είναι η ακμή της διάνοιας κ.λπ. (κάτι που εκφράζεται και σε απόψεις τόσο του Σόλωνα του Αθηναίου όσο και του μεγάλου Γιατρού της Αρχαιότητας Ιπποκράτους). θ) Στην ακολουθία αριθμών με λόγο 2 ήτοι: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 ο τρίτος όρος (το 4) είναι τέλειο τετράγωνο, ο τέταρτος (το 8) είναι κύβος ( $8 = 2^3$ ) και ο έβδομος (ο 64) είναι και τετράγωνο ( $64 = 8^2$ ) και κύβος ( $64 = 4^3$ ). Ομοίως στην ακολουθία με λόγο 3: 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, ... ο τρίτος  $9=3^2$ , ο τέταρτος  $27=3^3$ , ο έβδομος  $729=27^2=9^3$ . Το ίδιο θα ισχύει σε κάθε άλλη ακολουθία με λόγο 4 ή 5 κ.λπ. ι) Τόσο στον ουρανό όσο και στη γη θα δούμε την ύπαρξη της Ιερής Επτάδας. Ο ουρανός περιβάλλεται από επτά κύκλους (αρκτικός, ανταρκτικός, καλοκαιρινός, τροπικός, χειμερινός, τροπικός, ισημερινός, ζωδιακός και γαλαξίας). Οι πλανήτες αριθμούνται με τον αριθμό 7, η Άρκτος (ο πιο χρήσιμος αστερισμός για ναυτικούς) αποτελείται από 7 αστέρια, όσα και οι Πλειάδες, οι πλέον χρήσιμες για γεωργούς. ια) Το σώμα μας (ακόμα και η ψυχή μας) έχει συνολικά επτά ορατά μέρη: το κεφάλι, το στήθος, την κοιλία, δύο πόδια, δύο χέρια. Και για να μη μακρηγορούμε, 7 οι παραλλαγές της φωνής, ομοίως οι εκκρίσεις του σώματος, οι ημέρες της έμμηνης ρύσης των γυναικών, τα φωνήεντα της γλώσσας, τα μέρη της κεφαλής, οι χορδές της λύρας κ.λπ. Άρα λοιπόν δεν είναι τυχαίο το όνομα και η ιερότης του αριθμού επτά. Μάλιστα οι Λατίνοι αποκαλώντας τον s-ertem τον απαθανάτισαν σε όλες τις σημερινές Λατινικές γλώσσες (Αγγλικά s-even, Γαλλικά sept κ.λπ.) καταδεικνύοντας το σεβασμό (σ-επτότητα) και τη δύναμη που κρύβει.

33. Μια ολοκληρωμένη μεταπυθαγόρεια εισαγωγή της θεωρίας των Αρρήτων έχουμε το 19<sup>ο</sup> αιώνα με τους μεγάλους Ευρωπαίους Μαθηματικούς: Cantor, Dedekind και Weierstrass. Την ύπαρξη δε των οποίων (Αρρήτων) έκανε "ρητή" ο Ίππασος και έξω από τη Σχολή (σύμφωνα με τον Ιάμβλιχο). Γι' αυτό –κατά μία άποψη– θανατώθηκε από τους άλλους Πυθαγόρειους. Μπορούμε να φαντασθούμε την έκπληξη και το φόβο που ένοιωσαν οι καθ' όλα Θεολογιστές Πυθαγόρειοι, όταν ανακάλυψαν αριθμούς οι οποίοι, αν και έχουν οπτική-γεωμετρική αναπαράσταση, δεν εκφράζονται ρητά.

στον 1<sup>ο</sup> τόμο του T. Little, εκδόσεις Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., *Η ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών*, σελ. 117)

Συνολικά λοιπόν έχει κανείς μπροστά του μια ολοκληρωμένη Θεωρία που ανάγεται σε Μαθηματική Επιστήμη των Αριθμών. Όσο μάλιστα για το ίδιο όνομα (Μαθηματικά) ανήκει (σύμφωνα με τον Πρόκλο<sup>34</sup>) στους Πυθαγόρειους. Αυτοί αντιλήφθηκαν πρώτοι ότι «το σύνολο εκείνο που ονομάζεται **μάθησις** είναι **ανάμνησις** που δεν εισήλθε στις ψυχές από έξω, όπως τα φαντάσματα των αισθητών αντικειμένων εντυπώνονται στη φαντασία, ούτε συμπτωματικά όπως η γνώση που είναι αποτέλεσμα γνώμης διεγειρόμενη πραγματικά από τα προφανή πράγματα και μέσα από την έλλογη δύναμη εξερχόμενη μετατράπηκε σε αυτό που είναι» και συνεχίζει: «ομοίως αυτοί (οι Πυθαγόρειοι) είδαν ότι, αν και η ανάμνηση μπορεί να καταδειχθεί από αρκετά επιμέρους, εν τούτοις αυτή φανερώονταν με τον ύψιστο τρόπο, όπως λέει και ο Πλάτωνας, από τη μαθηματική ευταξία» (T. Taylor, σελ. 41).

Η μάθηση, λοιπόν, είναι η ενθύμηση των αιώνιων παραγωγικών αρχών που είναι έμφυτες στην ψυχή, οπότε η Μαθηματική Επιστήμη δίκην αγωγού γνώσεως που συνεισφέρει στην ενθύμηση τούτων των αρχών, εμφανίζεται σαν η προβολή των αρχετύπων ιδεών, μπροστά στα όμορφα, γήινα και έντρομα “μάτια” μας.

Εδώ συνεπαγωγικά θα έχουμε το ερώτημα:

– Αν ο άνθρωπος (που ουσιαστικά αυτός έμαθε και ξέρει να αριθμεί) δεν υπήρχε, η μαθηματικοποίηση της φύσης και της ουσίας των πραγμάτων θα είχε κάποιο νόημα, ας πούμε για κάποια άλλα γήινα υποκείμενα στη θέση του ανθρώπου π.χ. για τους δεινόσαυρους ή τις κατσαρίδες; Ή αν θέσουμε το ερώτημα κάπως αλλιώς, οι δεινόσαυροι ή οι κατσαρίδες γνωρίζουν, ή, έχει κάποιο νόημα γι’ αυτά τα όντα, το ότι ένα κι ένα κάνουν δύο;

Βέβαια, αυτό δεν απασχόλησε το Μεγάλο Δάσκαλο και τους μαθητές του, που έβλεπαν στους αριθμούς (Φυσικούς, Ρητούς και Άρρητους) την απόλυτη ομορφιά και σοφία. Γι’ αυτούς, η οντότητα των αριθμών, και γενικότερα της Μαθηματικής Επιστήμης, είναι ανεξάρτητη της ανάγκης ύπαρξης του υποκειμένου που νοιώθει την ανάγκη να αριθμεί. Σήμερα η σύγχρονη Επιστήμη,

34. Πρόκλος ο Λύκειος ή Διάδοχος: Νεοπλατωνικός φιλόσοφος και μαθηματικός του 5<sup>ου</sup> μ.Χ. αιώνα. Σπούδασε στην Αλεξάνδρεια μαθηματικά, φιλοσοφία και ρητορική. Πέθανε δε στην Αθήνα διευθύνοντας την ανασυσταμένη Ακαδημία του Πλάτωνα, διαδεχόμενος το δάσκαλό του Συριανό.



Φυσική και Μαθηματικά, έχουν ξεπεράσει την “απλοϊκότητα” αυτής της Πυθαγόρειας λογικής, γιατί η ίδια η Λογική έχει αλλάξει. Υπάρχει διάχυτη η κοινή πλέον πεποίθηση, ότι τα πάντα, από τον μικρόκοσμο ως τον μέγασκο των γαλαξιών, αλλάζουν, ότι δηλαδή οι νόμοι της Φύσης καθώς και η ομορφιά του “Πυθαγόρειου κόσμου” μας εμφανίζουν ένα πιο Ηρακλείτειο<sup>35</sup> “χρώμα” και αίσθηση. Οι αιώνες που αλλάζουν συμπαρασύρουν στο διάβα τους και τις εκάστοτε “Μυθολογίες” που οι προηγούμενοι χρησιμοποιούν. Μια νέα “Μυθολογία” πάντα έρχεται να αφήσει στην άκρη μια παλιότερη, όπως αυτή, σήμερα της Μοριακής Βιολογίας και της Κυβερνητικής (κοντά είναι και ο απόλυτος έλεγχος της πυρηνικής ενέργειας και γιατί όχι και η πλήρης αντιγραφή και αντικατάσταση του ανθρώπινου εγκεφάλου), αύριο ίσως η δημιουργία της τεχνητής νοημοσύνης και η εμφάνιση-επικράτηση του “Μεταθρώπου”<sup>36</sup> και ποιος ξέρει και σε τι άλλα μονοπάτια και νέες “Μυθολογίες” θα οδηγηθεί ο όμορφος πλανήτης μας. Πάντως δεν φαίνεται να γλιτώνουμε από την παρουσία των Ακεραίων Αριθμών αφού και ο Αριθμός Φορολογικού Μητρώου μας και η χαρτογράφηση του D.N.A. μας, εμφανίζουν οριζόντιες ή κάθετες σειρές Αριθμών. Η δε μοντέρνα Φυσική<sup>37</sup> έστρεψε εκ νέου το ενδια-

35. Το «Τα πάντα ρει», (φθέγμα του μεγάλου Εφέσιου που δείχνει την αδιάκοπη ροή-αλλαγή) δεν επαρκεί για να εκφράσει ολοκληρωμένα το είναι και γίνεσθαι τούτου του κόσμου. Η επενέργεια –τουλάχιστον– της έριδας («τα πάντα κατ’ έριν») φέρνει τα πάνω κάτω («πόλεμος πάντων πατήρ») οδεύοντας-άγοντας τη φύση σε μία Συμπαντική Αρμονία. Φυσικά ισχύει και το αντίθετο. Η Αρμονία, διαταρασσόμενη, φέρνει την έριδα, τη χρεία («τα πάντα κατά χρεών»), τον πόλεμο... Και να προσθέσω εδώ μια πληροφορία από το Διογένη Λαέρτιο (βιβλίο 9) ότι ο Ηράκλειτος δεν εκτιμούσε ιδιαίτερα το έργο του Πυθαγόρα. Έτσι, αναφερόμενος στις ευρείες γνώσεις του, φέρεται ως μάλλον να τον υποτιμά λέγοντας: «Η πολλή γνώση δε διδάσκει σοφία, διαφορετικά θα δίδασκε τον Ησίοδο, τον Πυθαγόρα καθώς και τον Ξενοφάνη και τον Εκαταίο». Ο Αριστοτέλης δε εκμαίευσε από την έννοια της Αρμονίας της Ηρακλείτειας και Πυθαγόρειας σκέψης και αυτήν της “φιλίας”, όχι όμως μόνο μεταξύ ιδίων και ομοίων χαρακτήρων, αλλά και σφόδρα αντιθέτων. Έτσι σε μια φιλία το ένα μέλος –χωρίς να ομοιάζει αναγκαστικά με το άλλο– αποτελεί το δεύτερο “εγώ” του άλλου, ή καλύτερα η οντότητα του ενός είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη του άλλου μέλους. Όσο για την ψυχή; Αυτή είναι μοιρασμένη σε δύο σώματα (Αριστοτέλους, *Ηθικά Νικομάχεια*).

36. Για περισσότερα στο κείμενο, του Σπύρου Μάνδρου: «Ο νέος μύθος για τον μετάνθρωπο», στις “Μεταθέσεις”, στην Ύλη του 1999.

37. Ο John Schwarz, καθηγητής στο τμήμα Φυσικής του Τεχνολογικού Ινστιτούτου της Καλιφόρνιας (Caltec), λέει σε μια συνέντευξή του πως έτσι ή αλλιώς τα πράγματα –η φύ-





φέρον της και τις αναζητήσεις της στη Θεωρία των **Υπερχορδών**<sup>38</sup> που εμφανίζει στη βάση της κάτι από την Πυθαγόρεια Αισθητική και Λογική.

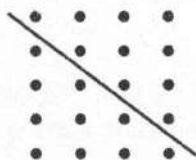
Κλείνοντας αυτή την ενότητα, θα αναφερθώ και σε μια ιδιαίτερη έννοια (κατ' εξοχήν Πυθαγόρεια), σε αυτήν του Δυϊσμού που, από Μαθηματικής πλευράς, αφορά τις έννοιες απείρου-πέρατος. Έννοιες που εμφανίζονται τα Προσωκρατικά χρόνια (ειδικά στην Αναξιμάνδρεια και Πυθαγόρεια σκέψη) και που, στην πορεία, έχουν αλλάξει νόημα και ορισμό. Αυτός ο Δυϊσμός συμπληρώνει τον κατάλογο των αντιθέτων, που η ύπαρξή του συνολικά χαρακτηρίζει και σηματοδοτεί ολόκληρη την Πυθαγόρεια Θεωρία:

Εν - πλήθος	Άρρεν - θήλυ	Φως - σκότος
Άρτιος - περιττός	Ηρεμούν - κινούμενον	Αγαθόν - κακόν
Δεξιόν - αριστερόν	Ευθύ - καμπύλον	Ετερομήκες <sup>39</sup> - τετράγωνον



ση- μπορούν να περιγραφούν με λογικό τρόπο μέσω απλών Μαθηματικών μιας και μέχρι την εποχή μας έχουν μεγάλη επιτυχία σε αυτό. Γιατί λοιπόν η κατάσταση αυτή να μην συνεχιστεί; (*Θεωρία των πάντων - Υπερχορδές*, Εκδόσεις Κάτοπτρο, σελίδα 117).

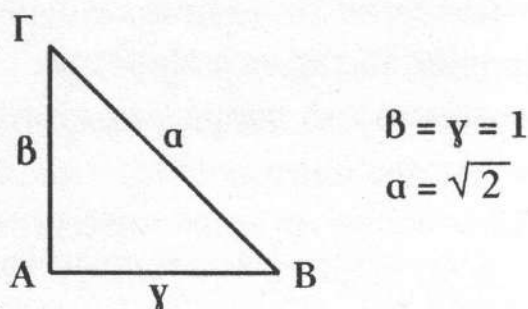
38. Στη Θεωρία των Υπερχορδών η ύλη δεν περιγράφεται πια με τη βοήθεια σωματιδίων με τη μορφή που τους έδινε η Κβαντική Φυσική αλλά με τη βοήθεια χορδών (ανοιχτές ή κλειστές). Έτσι κάθε “κλασσικό” σωματίδιο, στη Θεωρία των Χορδών δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια διεγερμένη κατάσταση (τρόπος) μιας στοιχειώδους χορδής (διαστάσεων της τάξης των  $10^{-33}$  cm). Είναι δηλαδή μια παλλόμενη μικρή χορδή που αποτελεί μια συγκεκριμένη αρμονική μιας θεμελιώδους χορδής (αυτό μας παραπέμπει σίγουρα στην Πυθαγόρεια Αρμονία και Θεωρία της Πυθαγόρειας κλίμακας) όπως ακριβώς συμβαίνει με τις αρμονικές στις χορδές ενός απλού εγχόρδου οργάνου. Έτσι μοιραία οδηγούμαστε στην ίδια σκέψη-ερώτηση που διατυπώνει και ο Aspect στο άρθρο του: «Μήπως η χωριστικότητα είναι μια ψευδαίσθηση;» (*Μεταθέσεις*, Ύλη 1999) λέγοντας: «Μήπως υπάρχει κάποιο βαθύτερο επίπεδο πραγματικότητας όπου τα σωματίδια δεν είναι ιδιαίτερες οντότητες, αλλά προεκτάσεις του ίδιου θεμελιακού κάτι; Η Θεωρία των Χορδών δίνει μια κάποια απάντηση έτσι και αλλιώς.
39. Ο ετερομήκης αριθμός μπορεί να ειπωθεί ως ο μη τετράγωνος αριθμός που είναι το γινόμενο δύο παραγόντων που διαφέρουν κατά μία μονάδα. Έχει δηλαδή την μορφή  $n \cdot (n+1)$ . Π.χ. ο αριθμός  $6 = 2 \cdot 3$ , ο  $20 = 4 \cdot 5$ . Γεωμετρικά, εκφράζει το εμβαδόν ορθογωνίου παραλληλογράμμου με πλευρές (2, 3) και (4, 5) αντίστοιχα. Επίσης, κάθε ετερομήκης αριθμός έχει τη μορφή αθροίσματος δύο ίσων τριγωνικών αριθμών: Π.χ. ο αριθμός 20 :



Μια επανάσταση στη σκέψη ήταν η ανακάλυψη στα Μαθηματικά εννοιών σαν αυτές του απείρου και του πέρατος. Το άπειρο-απροσδιόριστο (που τόσο μπερδεψε με την ανακάλυψή του την Πυθαγόρεια σχολή) συνυπάρχει με το συγκεκριμένο-πεπερασμένο (σχεδόν εμφυτευμένο σε οποιαδήποτε πεπερασμένη μορφή). Μια κατάκτηση-ανακάλυψη που οδήγησε με τη σειρά της στην ανάγκη ορισμού-προσδιορισμού επιπλέον και αυτής της έννοιας του παραλόγου. Ένας άπειρος χώρος, συνειδητός ή υποσυνειδητός, μια μαύρη τρύπα στο χωροχρονικό συνεχές που εγκλωβίζει και στροβιλίζει έννοιες, οντότητες και ουσίες, υπαγορεύοντας στα όργανα μέτρησής μας και στις θεωρίες μας να τον αντιμετωπίσουμε κατάλληλα.

Η σκέψη γύρω στον 7<sup>ο</sup> και 6<sup>ο</sup> π.Χ. αιώνα έκανε το μεγάλο άλμα της. Η σχολή του Πυθαγόρα και ο ίδιος ο Μεγάλος Δάσκαλος πέρασαν το μεγάλο ρήγμα. Τα Μαθηματικά και η Γεωμετρία έκαναν την πιο συγκροτημένη εμφάνισή τους στο ιστορικό γίγνεσθαι. Έννοιες κατανοητές ακόμα και απροσδιόριστες πήραν την κατάλληλη θέση τους στο σώμα μιας ολοκληρωμένης, για τη σκέψη της εποχής εκείνης, Θεωρίας. Ενδεικτικά και με λίγα μαθηματικά ας τα δούμε όλα αυτά σε ένα απλό ερώτημα.

Πώς είναι δυνατόν από ρητές πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου ( $\gamma=\beta=1$ , που συνεπάγεται λόγος των δύο πλευρών  $\gamma/\beta = 1/1 = 1$ ) να έχουμε την υποτεινούσα ασύμμετρη;



Λόγω του Πυθαγορείου Θεωρήματος έχουμε:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \implies \alpha^2 = 1^2 + 1^2 \implies \alpha^2 = 2 \implies \alpha = \sqrt{2}$$

Πράγματι ο  $\sqrt{2}$  είναι ασύμμετρος (άλογος) ως προς τις άλλες δυο πλευρές και άρρητος, αφού δεν μπορεί να γραφεί σαν λόγος δύο ακέραιων αριθμών. Να είναι άραγε η εμφάνιση αυτού του “παράξενου” αριθμού το τίμημα – το νόμισμα για τη διάβασή μας από τον οριζόντιο στον κάθετο κόσμο μας, ή καλύτερα, από τον κόσμο της μιας διάστασης (ευθεία γραμμή) στον κόσμο των δύο διαστάσεων (επίπεδος χώρος); Ποιος να ξέρει άραγε τα αντίστοιχα τμήματα για

τις περιδιαβάσεις μας στις τρεις, στις τέσσερις διαστάσεις και πού θα φτάσει ακόμα η σκέψη του ανθρώπου; (Ήδη η θεωρία των υπερχορδών και των υπερσυμμετριών μιλά για 11 και επιπλέον διαστάσεις. Εκτός δηλαδή από τις τέσσερις φανερές – τρεις του χώρου και μιας του χρόνου – οι υπόλοιπες “συμπύσσονται” σε σημεία χωρίς έτσι να κάνουν ορατή την ουσία τους).

Ένα αποτέλεσμα λοιπόν Άλογο-Παράλογο που μας παραπέμπει ίσως στο Ησιόδειο Χάος με τις τόσες ιδιάζουσες μυθολογικές αναπαραστάσεις του. Σε ένα σωρό Θεότητες, γεννήματα της Νύχτας, του Ερέβους και της Έριδας. Γοργόνες, Μέδουσες και τόσες άλλες μορφές της Ησιόδειας Μυθολογίας (μη εξαιρουμένης και αυτής του Διόνυσου) που μας καταδεικνύουν τον άπειρο και παράλογο κόσμο του “έτερου” υποσυνείδητου εαυτού μας. Λίγο κρασάκι – χυμός της φύσης – αρκεί για να ανοίξει η αυλαία του πιο παράξενου θεάτρου όπου το Λογικό και το Άλογο, το ρητό και Άρρητο-Ασύμμετρο συνυπάρχουν.

Κομμάτι λοιπόν του Αλόγου-Παραλόγου ίσως και η έννοιά του **απείρου** καθώς και αυτή των Άρρητων αριθμών<sup>40</sup>, οι οποίοι αναπαριστώντας και εκφράζοντας Μαθηματικά όλα τα άρρητα (αφανέρωτα) της φύσης ενσωματώθηκαν και υιοθετήθηκαν στο ήδη υπάρχον Μαθηματικό γεωμετρικό συνεχές, χωρίς πλέον να φοβίζονται και να τρομάζουν ούτε τους Πυθαγόρειους<sup>41</sup> που τους ανακάλυψαν ούτε τους κατοπινούς Μαθηματικούς. Μάλιστα η έννοια άρρητος αριθμός, αν και κατ' εξοχήν Πυθαγόρεια Αριθμητική έννοια, απασχόλησε κατά κόρον την Ελληνική Γεωμετρία, εντάχθηκε δε σε αυτή με την ταυτόχρονη “γεωμετρικοποίησή” της σε ασύμμετρη. (Μπορεί κανείς να παρατηρήσει εύκολα ότι αυτό που στο σχήμα μας είναι αριθμητικά άρρητο -

40. Η έννοια του Άρρητου περνώντας από την εποχή των προσωκρατικών στην εποχή του Αισχύλου και του Σοφοκλή, αντικαταστάθηκε ή ενσωματώθηκε σε αυτήν της **ύβρεως**, έννοια που απασχόλησε κατά κόρον την Τραγωδία των ηρωικών χρόνων της Αθήνας. Μια ύβρις που στριμώχνεται στη μοίρα του ανθρώπου που, σαν ένα υποκείμενο που δρα, δεν γνωρίζει εκ των προτέρων τα όρια των πράξεών του. Οπότε επέρχεται η τιμωρία (απαύγασμα μιας όμορφης συζήτησης που είχα με το φίλο μου και συγγραφέα Διαμαντή Κούτουλα).

41. Έχει τονιστεί και παρατηρηθεί ήδη η εμμονή της σκέψης των προσωκρατικών φιλοσόφων, εν γένει, σε μία και όχι πολλαπλή αναπαράσταση της αρχής του κόσμου. Ειδικά για τους Πυθαγόρειους, ο κόσμος είναι μια έκφανση-ενεργοποίηση μιας απλής μαθηματικής επιστήμης. Κάτι που ακόμα και σήμερα ισχύει, μόνο που τα Μαθηματικά έχουν συμπληρωθεί με πλήθος θεωριών, πολλές φορές χωριά καμία φυσική πραγματική αναπαράσταση. Φανταστικοί χώροι μέσα στα μυαλά και από εκεί στις εξισώσεις των Μαθηματικών (χώροι με περισσότερες από τρεις διαστάσεις, υπερσυμμετρίες κ.λπ.).



στην περίπτωση μας ο  $\sqrt{2}$  είναι γεωμετρικά ρητό συγκεκριμένο προσδιορίσιμο με τη μορφή ενός ευθύγραμμου τμήματος που το ονομάζουμε γενικά, στο ορθογώνιο τρίγωνο, υποτείνουσα).

## Β Περί φίλιων αριθμών

Πώς είναι δυνατόν δύο τυχαίοι και φαινομενικά ασύνδετοι αριθμοί να έχουν μια ψυχή-ουσία σε δύο σώματα-εκφάνσεις διαφορετικής ποσότητας και διάταξης – στο Αριθμητικό συνεχές; Δηλαδή τι να σημαίνει άραγε ότι είναι φίλιοι;<sup>42</sup> Ήτοι, ο ένας να σηματοδοτεί και να εκφράζει το έτερον εγώ του άλλου; (Όπως διέσωσε ο Ιάμβλιχος στην Πραγματεία του *Περί της Νικομάχου Εισαγωγής*. Περισσότερα στις υποσημειώσεις 2 και 3).

Ας θαυμάσουμε λοιπόν τους δύο πιο μικρούς ακέραιους φίλιους αριθμούς που υπάρχουν στο σύνολο των Φυσικών Αριθμών.

Είναι ο 220 και ο 284. Γι' αυτούς λοιπόν ισχύει :

Οι διαιρέτες του πρώτου (του 220): 1, 2, 4, 5, 10, 11, 22, 44, 55 και 110 αν αθροισθούν δίνουν τον δεύτερο (τον 284).

Πράγματι:  $1+2+4+5+10+11+22+44+55+110 = 284$ .

Ομοίως: οι διαιρέτες του δεύτερου (του 284): 1, 2, 4, 71 και 142 προστιθέμενοι δίνουν τον πρώτο (τον 220). Πράγματι:  $1+2+4+71+142 = 220$ .

Άρα το σώμα του ενός (οι διαιρέτες του προστιθέμενοι) είναι ο άλλος ακριβώς. Εκτός από το προαναφερθέν ζεύγος που αναφέρει ο Ιάμβλιχος, ο Descartes και ο Var Shooter (Μαθηματικοί του 16<sup>ου</sup> και 17<sup>ου</sup> αιώνα) μας δίνουν άλλα τρία ζεύγη: (2620 - 2964), (5020 - 5564) και (6232 - 6358). Κάτι που δεν αναφέρει ο Taylor στην *Αριθμητική* του<sup>43</sup>.

Η υπόθεση αυτή δε διασώθηκε από κανένα έργο γνωστού συγγραφέα της αρχαιότητας, για δε το παραπάνω φίλιο ζεύγος δίνεται και η εξής μέθοδος

42. Ένα απ' τα πολλά επίθετα του Διός είναι και το "φίλιος". Θεός λοιπόν και της φιλίας ο ύπατος των θεών και των ανθρώπων. (Για περισσότερα στη *Μυθολογία* του Desharme στο αντίστοιχο κεφάλαιο περί Διός.)

43. Περισσότερα στοιχεία και περαιτέρω παρουσίαση βρίσκει κανείς και στην *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών* (Αθήνα 1976) του Ε.Σ. Σταμάτη καθώς και στις *Απαρχές των Ελληνικών Μαθηματικών* (Εκδόσεις Τεχνικού Επιμελητηρίου της Ελλάδος 1973) του Α. Szabo.

υπολογισμού του: «Χρησιμοποίησε τον αριθμό 2 ο οποίος είναι τέτοιας ποιότητας, που αν αφαιρέσεις το 1 από το τριπλάσιό του (6), από το εξαπλάσιο του (12) και από δεκαοκταπλάσιο του τετραγώνου του (72), τα υπόλοιπα είναι τρεις πρώτοι αριθμοί: 5, 11 και 71. Εάν το 5 και το 11 πολλαπλασιαστούν μεταξύ τους (55) και αυτό με το 4 (το διπλάσιο του 2), το τελικό γινόμενο  $4 \cdot 55 = 220$  θα είναι ο πρώτος από τους δύο φίλιους που ζητάμε. Για να βρούμε τον άλλο (το 284) χρειάζεται μόνο να πολλαπλασιάσουμε τον τρίτο πρώτο αριθμό (71) με το 4 (το διπλάσιο του 2) οπότε:  $4 \cdot 71 = 284$ » (Taylor, σελ. 190).

Για να υπολογίσουμε τώρα το επόμενο ζευγάρι φίλιων αριθμών κάνουμε τα εξής: Χρησιμοποιούμε αντί του 2, μία από τις δυνάμεις του, που κατέχει την ίδια ποιότητα (με αυτή του 2) όπως ο κύβος του, το  $8 = 2^3$ . Αν αφαιρέσουμε μια μονάδα από το τριπλάσιό του (24), από το εξαπλάσιό του (48) και από το δεκαοκταπλάσιο του τετραγώνου του (1152), τα υπόλοιπα είναι τρεις πρώτοι αριθμοί: 23, 47, 1151. Τώρα, εάν οι 23 και 47 πολλαπλασιαστούν, δίνουν 1081 και αυτό με το 16 (το διπλάσιο του κύβου 8), θα βρεθεί το 17296, ο πρώτος από το δεύτερο φίλιο ζευγάρι. Για τον άλλο αρκεί να πολλαπλασιαστεί ο 1151 με το 16 οπότε έχουμε τον δεύτερο φίλιο του δεύτερου ζευγαριού, ήτοι ο 18416. Τώρα, για το επόμενο φίλιο ζευγάρι παίρνουμε το τετράγωνο του κύβου 8 δηλαδή το 64 και πάει λέγοντας.

Τα τρία πρώτα ζευγάρια, που είναι τα: (220 - 284), (17.296 - 18.416) και (9.363.584 - 9.437.056), μας καταδεικνύουν ότι είναι ιδιαίτερος σπάνια και ότι ανεβαίνοντας στη φυσική κλίμακα απομακρυνόμαστε σε μεγάλες τάξεις μεγέθους και ότι οι τέλεια φίλιοι αριθμοί (γιατί υπάρχουν όπως θα δούμε και ατελώς φίλιοι) κατασκευάζονται – ανακαλύπτονται – μόνο μέσω των δυνάμεων του αριθμού 2 και από κανέναν άλλον (αφού και η πραγματική φιλία μόνο μεταξύ δύο ανθρώπων μπορεί να υπάρξει στην τέλεια μορφή της).

Ένα άλλο, επίσης, συμπέρασμα ουσιαστικό και ενδιαφέρον, που εξάγεται από την παραπάνω θεώρηση, είναι ότι η σπανιότητα αυτή ακολουθεί και μας παραπέμπει στη σπανιότητα της αληθινής φιλίας και στο ανθρώπινο συνεχές. Και μάλιστα εμφανίζεται, ήδη από τα πρώτα τρία ζευγάρια, ότι όσο αυξάνονται σε μέγεθος, ο ένας τείνει (μαθηματικά) στον άλλον.

Σε Μαθηματική μορφή, θα είχαμε για δύο φίλιους  $a_n, b_n$  τη σχέση:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n / b_n) = 1$$

Δηλαδή όσο μεγαλώνουν τα νούμερα ο ένας πλησιάζει αριθμητικά τον άλλο. Μάλιστα σε μία άπειρη επέκταση αυτής της ακολουθίας τέλειων φίλιων αριθμών το τελευταίο ζευγάρι (αν βέβαια υπάρχει) θα έχει απαθανατοποιηθεί στη τέλεια ισότητα-ταυτότητα και αυτό ιδιαίτερα εμφανίζεται στα επόμενα “μεγάλα” ζευγάρια φίλιων αριθμών:

4827120640 - 4831837184 (2 πρώτα κοινά ψηφία)

2473599180800 - 2473901154304 (3 πρώτα κοινά ψηφία)

64851710939294464 - 64851834634082136 (5 πρώτα κοινά ψηφία)

Μια παρένθεση εδώ για να θυμηθώ ότι, ίσως, αυτή η ιδιάζουσα μαθηματική περίπτωση να αντανakλά και να επιτονίζει στο μαθηματικό χώρο αυτό που στην Αρχαία Ελληνική Γραμματεία κατείχε ήδη μια ιδιαίτερη θέση. Αυτής του Δυϊκού Αριθμού, που μας υποδεικνύει ότι η **δυάς** δεν ταυτίζεται και δεν ενσωματώνεται απλά στο πλήθος, αλλά έχει δική της ποιότητα, οντότητα, ακόμα και ιδιοτροπία. Να λοιπόν γιατί έχει μεγάλη σημασία και ενδιαφέρον ο Δυϊκός αριθμός ξέχωρα και σε αντιδιαστολή με τον Ενικό και τον Πληθυντικό, σε χρόνους τέτοιους που η Δυάς έπαιξε, φαίνεται, κάποιο ιδιαίτερο σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη, εξέλιξη και επιβίωση της Αρχαίας Ελληνικής πόλης, ενώ σήμερα “κοιμάται” (ανενεργός ίσως) ξεχασμένος και καταχωνιασμένος σε κάποιες μνήμες από τις οποίες κάποια μέρα ίσως και πάλι να επιστρέψει σαν απαίτηση-ανάγκη-νομοτέλεια για την εύρυθμη λειτουργία κάποιων μοντέρνων και γιατί όχι ιδανικών κοινωνιών.

Αντιγράφω από το Λεξικό του Σταματάκου (σελ. 35): «Ώσαύτως διεφύλαξεν ἡ Ἑλληνική καί τούς, ἐκ τῆς Μιτρὸς Γλώσσης κληρονομηθέντας ἐπίσης τρεῖς ἀριθμούς: τὸν ἐνικόν, τὸν πληθυντικόν καί τὸν **δυϊκόν**, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος ἐκπροσωπεῖ τὴν μονάδα, ὁ δεύτερος τὸ πλῆθος καί ὁ τρίτος τὴν **δυάδα** (τὸ ζεῦγος), ἐνὼ ἡ Λατινική π.χ. διεφύλαξεν, μόνον τούς δύο πρώτους, ἐλάχιστα δέ ἔκνη τοῦ δυϊκοῦ ἀριθμοῦ ἐμφανίζει. Διὰ τοῦ δυϊκοῦ οἱ ἀρχαῖοι Ἑλληνας ἐδῆλωναν συντομότερον, δι’ ἐνός τύπου, μονολεκτικῶς, ὅ,τι αἱ ἄλλαι γλώσσαι ἐκφράζουν διὰ τοῦ πληθυντικοῦ καί τοῦ ἀριθμοῦ **δύο** προιασσομένου. Ὁ τοιοῦτος τρόπος ἐκφορᾶς δέν λείπει βέβαια καί ἀπὸ τὴν Ἑλληνικὴν. Ἐκτός τῆς Ἀρχαίας Ἑλληνικῆς δυϊκόν εἶχον ἐπίσης καί ἡ Σανσκριτικὴ, ἡ Ἑβραϊκὴ, ἡ Ἀρχαία Λατινικὴ, ἡ Ἀρχαία Γερμανικὴ, ἡ Γοθικὴ κ.ἄ. οὐδεμία ὅμως ἐκ τῶν νεωτέρων γλωσσῶν διετήρησε τοῦτον... Εἰς τὸν Δυϊκόν ὑπάρχουν δύο μόνον ὅμοιοι πώσεων, εἷς διὰ τὴν ὀνομαστικὴν καί αἰτιατικὴν καί εἷς διὰ τὴν Γενικὴν καί Δοτικὴν».



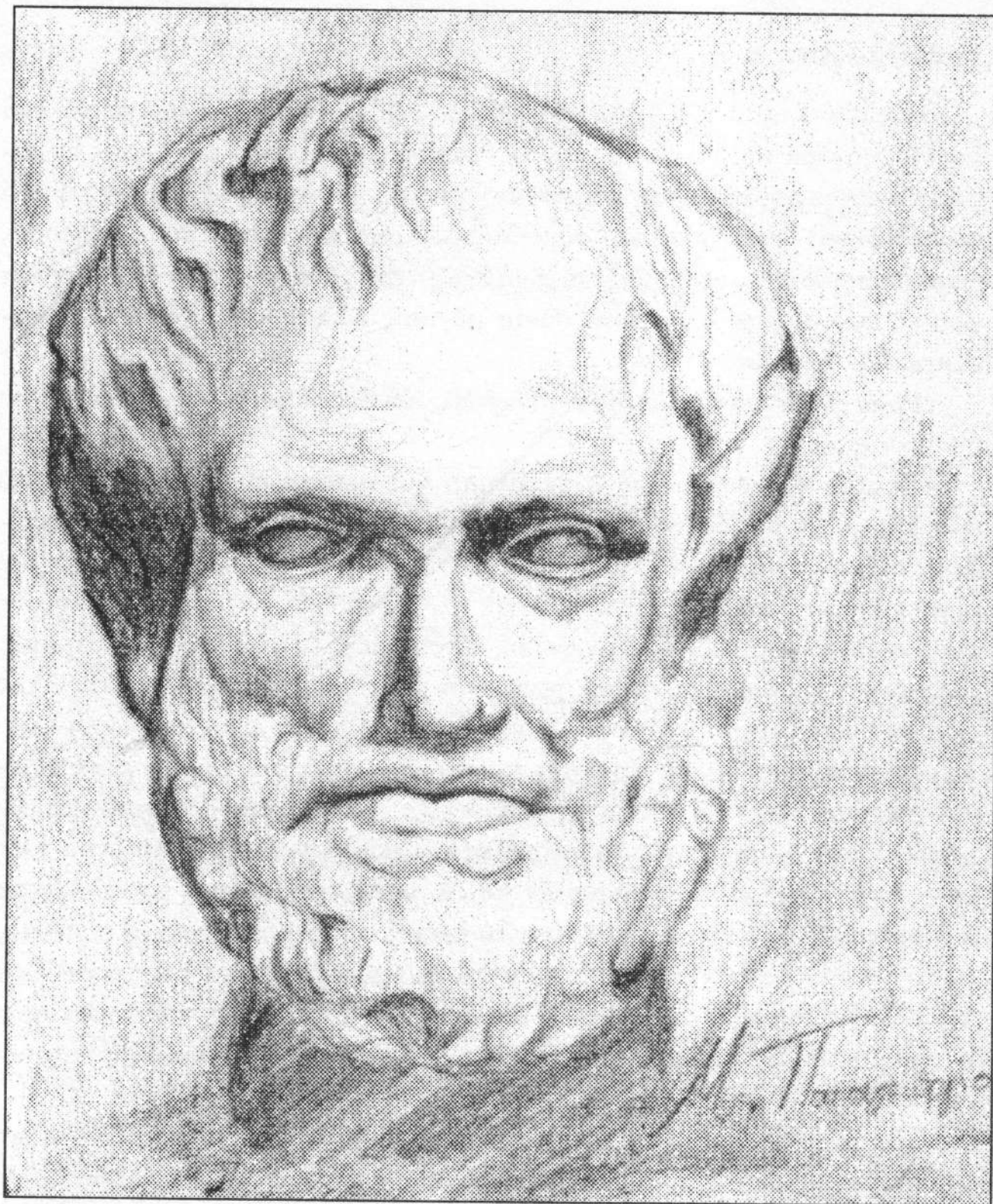
Άρα λοιπόν ο δεσμός-θεσμός των δύο ήταν μία πραγματικότητα. Η Δυάς είχε, δηλαδή, οντότητα που ξεχώριζε καθαρά από τη μονάδα και το πλήθος. Εν κατακλείδι δε και υιοθετώντας απόψεις άλλων μελετητών, θεωρώ ότι ο δεσμός εραστή και ερωμένου εκφράζει ουσιαστικά τη Δυϊκή φιλία –ερωτο-φιλία– που άνθισε σε όλη την ιστορική πορεία της αρχαιότητας. Ο πόλεμος πλάτη με πλάτη εναντίον του εχθρού, με κείνα τα κοντά μαχαιράκια απαιτούσε ισχυρές φιλίες που ξεκίναγαν από τα στάδια των πόλεων και έφταναν ως εκεί, στο στίβο της μάχης. Ο φίλος λοιπόν, στήριζε το νου και τίποτα άλλο, ενώ η γυναίκα τα κορμιά των κουρασμένων πολεμιστών. (Ο Όμηρος γαλούχησε γενιές με τη φιλία του Αχιλλέα και του Πάτροκλου και μην ξεχνάμε τα σταυραδέλφια της Υστεροβυζαντινής περιόδου που ένωναν τα αίματά τους και εκλιπαρούσε ο ένας τον άλλον να του κόψει το κεφάλι για να μην πέσει στα χέρια του εχθρού.)

Κλείνω αυτό το δεύτερο κεφάλαιο αναφερόμενος στους ατελείς φίλιους αριθμούς, γιατί και αυτοί ξεχωρίζουν και επιτονίζονται στην Πυθαγόρεια Αριθμητική. Π.χ. οι αριθμοί 27 και 35: Ο 27 διαιρείται με τους 1, 3, 9 και ο 35 με τους 1, 5, 7 οπότε:  $1+3+9 = 1+5+7 = 13$ . Ομοίως οι αριθμοί 39 και 55: Ο 39 διαιρείται με τους 1, 3, 13 και ο 55 με τους 1, 5, 11 οπότε:  $1+3+13 = 1+5+11 = 17$ . Και ένα σωρό άλλα ζευγάρια όπως (65 - 77), (51 - 91), (95 - 119), (69 - 133), (115 - 187), ...

Εδώ παρατηρούμε ότι έχουμε πληθώρα (και μάλιστα περιττών) ατελώς φίλιων αριθμών, γιατί έτσι συμβαίνει συχνά και σε μια ανθρώπινη κοινωνία. Πιο συχνά λοιπόν τα ατελώς φίλια ζευγάρια από τα τέλεια όμοιά τους, γι' αυτό και τα ανθρώπινα είδη και πάθη κατακυλούν μέχρι και τη φαυλότητα...

**Συμπέρασμα:** Οι “τέλειοι” φίλοι μπορεί να είναι και πραγματικοί φιλόσοφοι και ηγήτορες-ορόσημα<sup>44</sup> μιας απλής ανθρώπινης κοινωνίας, που τελικά απαθανατίζονται στη χώρα των Μακάρων. Ενώ οι άλλοι, οι ατελείς «αυτοί

44. Για έναν πραγματικό φιλόσοφο η ενασχόληση με την ατελή φύση των πραγμάτων ισοδυναμεί με κάθοδο στα Κιμμέρεια Βασίλεια, όπου κινδυνεύει κανείς να αντικρίσει τη φρικτή όψη της σκοτεινής ύλης, τη Γοργώ δηλαδή, με αποτέλεσμα να απολιθωθεί (να μείνει μόνο και για πάντα ύλη – ένα γουρούνι στην αυλή της Κίρκης) από τον κορεσμό ανίκητων παθών – μια συνάντηση, επαφή με μια φυσική “μαύρη τρύπα”. Ένα ταξίδι στο χωρόχρονο της ύλης από το οποίο ο Οδυσσεάς γύρισε πίσω στον κόσμο της Ουσίας, του Ουράνιου Απολλώνιου φωτός, της Διάνοιας και της Πράξης. Στον ίδιο όμως κόσμο που οδήγησε στην τιμωρία, στο θάνατο και την ανάληψη τον αυτοσυνεπή και τυφλωμένο από τα ίδια του τα χέρια βασιλιά της Επτάφυλης Θήβας, τον Οιδίποδα.



που τα μέρη τους είναι μικρότερα από το ολόκληρο, σκιαγραφούν τη φιλία ανάμεσα σε εκείνους που στερούνται του μέτρου από το οποίο συνιστάται η αληθινή αρετή, ενώ εκείνοι, που τα μέρη τους είναι μεγαλύτερα από το ολόκληρο, εκθέτουν την εικόνα της φιλίας αυτών που υπερβαίνουν αυτό το μέτρο» (T. Taylor, σελ. 198).



## Επίλογος

Θα κλείσω αυτό το σημείωμα-μελέτη, αντί επιλόγου, με ένα χωρίο από τον Πρωταγόρα του Πλάτωνα, που το θεώρησα ουσιαστικό και άκρως ενδιαφέρον, για να καταδείξω μέσα από αυτό ότι η συντροφιά, η φιλία (πέρα από όσα ανάφερα) χρειάζονται και συμπόσια με κρασί και αναζήτηση-συζήτηση, όπου εκδηλώνεται, εν μέσω των συμμετεχόντων, ο έρωτας του ακούειν και φυσικά του λέγειν (σύμφωνα πάντα με τους νόμους που ορίζει ένα συγκεκριμένο συμπόσιο φίλων).

«Ευάν μετά των φίλων...» με κρασί, κουβέντα μέχρι της έλευσης του πρωινού φωτός :

«Νομίζω άλλωστε, πως η συζήτηση για ποίηση είναι κάτι που πολύ ομοιάζει με τα συμπόσια των κοινών και αγοραίων ανθρώπων. Αυτοί, αλήθεια, ανίκανοι να κάνουν συντροφιά ο ένας στον άλλον κατά την ώρα του συμποσίου με δικά τους μέσα, ούτε με την φωνή τους, ούτε με τους λόγους των, επειδή τους λείπει η μόρφωση, δίνουν μεγάλη τιμή στις αυλητρίδες, πληρώνοντας ακριβά την ξένη φωνή των αυλών και μ' αυτήν περνούν την ώρα της συναναστροφής των... Όπου όμως συμπότες είναι άνθρωποι καλλιεργημένοι, εκεί δεν θα δεις ούτε αυλητρίδες, ούτε χορεύτριες, ούτε κιθαρίστριες. Θα δεις εκεί αυτούς τους ίδιους να είναι ικανοί να κρατούν τη συντροφιά τους χωρίς αυτές τις ανοησίες και παιδαριωδίες, με τη δική τους τη φωνή, να μιλούν και να ακούν με τη σειρά τους ο ένας τον άλλον με κοσμιότητα, έστω κι αν πιουν πολύ κρασί... Και μόνοι τους οι συμπότες με τα δικά τους μέσα γεμίζουν τη συντροφιά, γνωρίζοντας ο ένας του άλλου την αξία με τις συζητήσεις του. Τέτοιας λογής ανθρώπους νομίζω ότι πρέπει να μιμηθούμε εγώ και συ...» (Πλάτων, Πρωταγόρας, Εκδόσεις Ζαχαρόπουλος, σελ. 109)

Πραγματική ευτυχία και ο θάνατος εν μέσω φίλων μ' ένα τελευταίο κρασί και τραγούδι χωρισμού, κι ας κλαψουρίζουν οι γυναίκες και τα κλαρίνα. Γιατί αυτός (ο θάνατος) δεν είναι ικανός να εξαφανίζεται, αλλά να απαθανατίζεται.