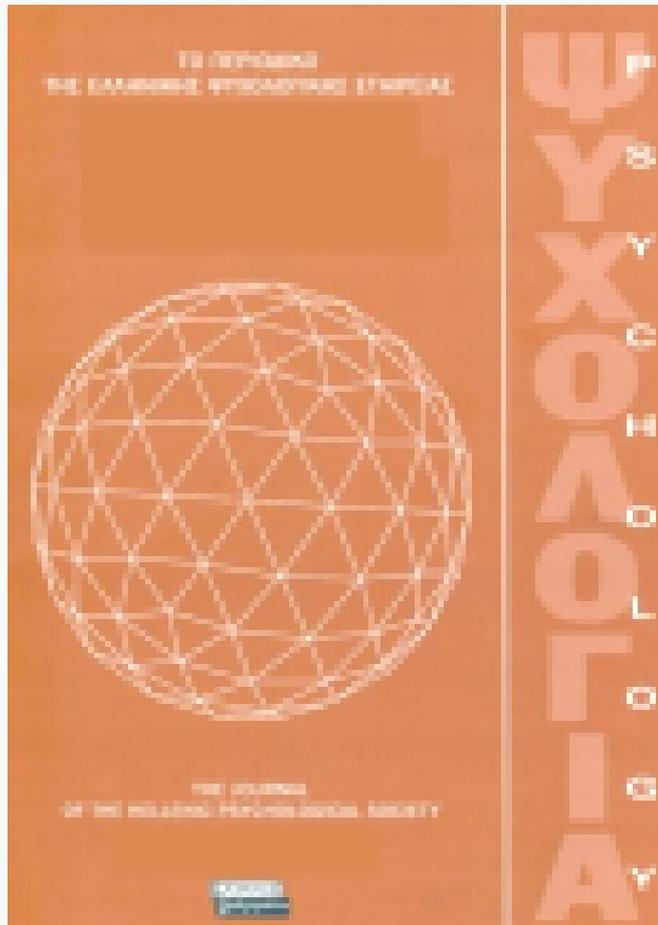


## Psychology: the Journal of the Hellenic Psychological Society

Vol 1, No 1 (1992)



### Γνωστικές ικανότητες και μαθηματικές επιδόσεις σε μαθητές Πρώτης και Δευτέρας Γυμνασίου

*Anastasia Efklides, Andreas Demetriou, Polychronis Moisiadis, Alexandros Marketos*

doi: [10.12681/psy\\_hps.24133](https://doi.org/10.12681/psy_hps.24133)

Copyright © 2020, Αναστασία Ευκλείδη, Ανδρέας Δημητρίου, Πολυχρόνης Μωυσιάδης, Αλέξανδρος Μαρκέτος



This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/).

#### To cite this article:

Efklides, A., Demetriou, A., Moisiadis, P., & Marketos, A. (1992). Γνωστικές ικανότητες και μαθηματικές επιδόσεις σε μαθητές Πρώτης και Δευτέρας Γυμνασίου. *Psychology: The Journal of the Hellenic Psychological Society*, 1(1), 11–29. [https://doi.org/10.12681/psy\\_hps.24133](https://doi.org/10.12681/psy_hps.24133)

## Γνωστικές ικανότητες και μαθηματικές επιδόσεις σε μαθητές Πρώτης και Δευτέρας Γυμνασίου

Αναστασία Ευκλείδη, Ανδρέας Δημητρίου,  
Πολυχρόνης Μουσιάδης, Αλέξανδρος Μαρκέτος,  
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Περίληψη

Η έρευνα αυτή αποσκοπούσε στη διερεύνηση των σχέσεων ανάμεσα σε διάφορες γνωστικές ικανότητες, όπως αυτές ορίζονται στον Εμπειρικό Βιομετρικό Δομοισμό, και τα σχολικά μαθηματικά της Πρώτης Γυμνασίου. Στην έρευνα έλαβαν μέρος 351 μαθητές 1ης και 2ας Γυμνασίου, των δύο φύλων, και από τρία κοινωνικοοικονομικά (ΚΟΙΕ) επίπεδα. Τα υποκειμενικά εξετάστηκαν σε έργα γνωστικά, ενδεικτικά διάφορων ικανοτήτων, και έργα μαθηματικά, που αφορούσαν τους ηρωτούς αριθμούς και γεωμετρικές έννοιες. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η δομή των σχολικών μαθηματικών συνίσταται σε ένα γενικό παράγοντα κι άλλους επιμέρους, που αφορούν μερικές ικανότητες. Ο γενικός μαθηματικός παράγοντας δεν ταυτίζεται με κάποιο γνωστικό παράγοντα, αλλά ορισμένες απόψεις αυτού συσχετίζονται με ορισμένες από τις γνωστικές ικανότητες που εξετάστηκαν. Ως προς τις ατομικές διαφορές, βρέθηκαν σημαντικές επιδράσεις της ηλικίας, του ΚΟΙΕ, και του φύλου, υπέρ των κοριτσιών.

Τα τελευταία χρόνια όλο και περισσότερο διευρύνεται η έρευνα που αφορά τη γνωστική ανάπτυξη. Δύο είναι οι κύριες κατευθύνσεις που μπορεί να διακρίνει κανείς σε αυτήν: πρώτον, η καθαρά γνωστική κατεύθυνση, η οποία εκκινεί από τον Piaget και μελετά τις γνωστικές ικανότητες καθαυτές ανεξάρτητα από τις επιδράσεις της σχολικής γνώσης. Δεύτερον, η θεματικά προσανατολισμένη κατεύθυνση, η οποία εξειδικεύεται στην ανάπτυξη της κατανόησης ειδικών κατά τομείς γνώσεων. Στόχος των ερευνών της πρώτης κατεύθυνσης είναι ο εντοπισμός των γενικών μηχανισμών που είναι υπεύθυνοι για τις αλλαγές που παρατηρούνται κατά τη γνωστική ανάπτυξη (Case, 1988. Demetriou & Efklides, 1988. Fischer, 1980. Halford, 1988. Pascual - Leone, 1988). Αντίθετα οι έρευνες πάνω στη θεματική γνώση αποσκοπούν στη διερεύνηση των ειδικών

γνωστικών διεργασιών που είναι υπεύθυνες για τις αλλαγές στην κατανόηση ειδικών επιστημονικών εννοιών. Έτσι διακρίνει κανείς έρευνες πάνω στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών (De Corte & Verschaffel, 1987. Resnick, 1983. Vergnaud, 1982), εννοιών φυσικής (Chi, Feltovich, & Glaser, 1981), εννοιών ιστορίας (Jurd, 1978). Αποτέλεσμα του παραπάνω διαχωρισμού στον προσανατολισμό των ερευνών για τη γνωστική ανάπτυξη είναι να μη γνωρίζουμε με ακρίβεια πώς οι γενικοί μηχανισμοί της ανάπτυξης επηρεάζουν την κατά τομείς γνώση, και αντιστρόφως, πώς η αύξηση της θεματικής γνώσης επηρεάζει τη γενική γνωστική ανάπτυξη.

Την ανάγκη για επίκληση σχετικά εξειδικευμένων γνωστικών ικανοτήτων που να χειρίζονται τομείς γνώσης αναγνώρισαν ορισμένες νεοπιαζετιανές θεωρίες, όπως η θεωρία Δεξιοτήτων του Fischer

(1980. Fischer & Pipp, 1984) και ο Εμπειρικός - Βιωματικός Δομισμός των Δημητρίου και Ευκλείδη (Demetriou & Efklides, 1988). Η δεύτερη θεωρία προχωρεί, πιο συγκεκριμένα, στην επίκληση Εξειδικευμένων Δομικών Συστημάτων (ΕΔΟΣ), τα οποία ορίζονται ως σφαίρες ή συγκροτήματα από γνωστικές ικανότητες. Τα ΕΔΟΣ χαρακτηρίζονται από την εφαρμογή τους σε ορισμένο πεδίο της πραγματικότητας, τις ποικίλες απόψεις του οποίου επεξεργάζονται. Τα διάφορα ΕΔΟΣ χαρακτηρίζονται επιπλέον από προκατάληψη για ορισμένο συμβολικό σύστημα και ορισμένες γνωστικές διαδικασίες.

Τα ΕΔΟΣ που έχουν αναγνωριστεί έως τώρα είναι:

1) Το Ποιοτικό - Αναλυτικό ΕΔΟΣ, το οποίο εφαρμόζεται σε σχέσεις ομοιότητας-διαφοράς. Το Ποιοτικό - Αναλυτικό ΕΔΟΣ αναλύει τους ερεθισμούς στα συστατικά τους και αναγνωρίζει κανόνες συνδυασμού των.

2) Το Ποσοτικό - Συσχετικό ΕΔΟΣ εφαρμόζεται σε ποσοτικοποιήσιμες σχέσεις και λειτουργεί διακρίνοντας τη μεταβολή κατά μήκος συνεχών διαστάσεων καθώς και σχέσεις συμμεταβολής κατά μήκος μιας ή περισσότερων διαστάσεων.

3) Το Αιτιολογικό - Πειραματικό ΕΔΟΣ εφαρμόζεται σε αιτιώδεις σχέσεις και λειτουργεί μέσω της απομόνωσης των μεταβλητών που επηρεάζουν ένα φαινόμενο και του συστηματικού ελέγχου υποθέσεων.

4) Το Νοερό Εικονικό - Χωροταξικό ΕΔΟΣ εφαρμόζεται σε δομές που γίνονται αντιληπτές ολικά, όπως οι εικόνες, και χειρίζεται χωροταξικές σχέσεις.

5) Το Λεκτικό - Προτασιακό ΕΔΟΣ εφαρμόζεται σε λεκτικό υλικό και στοχεύει στην απομόνωση σημασιολογικών σχέσεων που διέπουν τις προτάσεις.

Τέλος, η Μεταγνωστική-Αναλογιστική ικανότητα είναι ένα υπερσύστημα, το

οποίο εφαρμόζεται στα άλλα ΕΔΟΣ και λειτουργεί ως ο διαμεσολαβητής ανάμεσα στο γνωστικό σύστημα και την πραγματικότητα. Το σύστημα αυτό είναι υπεύθυνο για τη διάθεση των γνωστικών πόρων ανάλογα με το πρόβλημα που ζητά επίλυση κάθε φορά. Λόγω αυτής της λειτουργίας του το μεταγνωστικό σύστημα μπορεί να εκληφθεί ως το ελεύθερο από πεδία λογισμικό του γνωστικού συστήματος, το οποίο βρίσκεται ανάμεσα στα ΕΔΟΣ και τον πυρήνα του γνωστικού συστήματος, δηλαδή το νοητικό δυναμικό καθαυτό. Το μεταγνωστικό σύστημα λειτουργεί τόσο σε υποσυνείδητο επίπεδο, κρίνοντας τις απαιτήσεις των έργων κι επιλέγοντας το κατάλληλο ΕΔΟΣ (Demetriou & Efklides, 1988, 1989), όσο και σε συνειδητό επίπεδο. Αυτό γίνεται όταν η υποσυνείδητη επιλογή και επεξεργασία καθώς και οι αυτοματοποιημένες διαδικασίες αποτυγχάνουν να πετύχουν το στόχο τους, οπότε απαιτείται ενσυνείδητη καθοδήγηση της προσοχής. Σε αυτή την περίπτωση το άτομο επικεντρώνει την προσοχή του στην ανάλυση των ερεθισμών, στην επιλογή των ενδεικνυόμενων διεργασιών και στην παρακολούθηση της εφαρμογής της επιλεγμένης λύσης (Ευκλείδη, 1989. Efklides & Demetriou, υπό δημοσίευση).

Το παραπάνω μοντέλο λειτουργίας του γνωστικού συστήματος συνεπάγεται ότι, κατά την επεξεργασία ειδικών κατά τομείς γνώσεων, το άτομο θα επιστρατεύει το καταλληλότερο για τον τομέα ΕΔΟΣ. Προκειμένου για τα Μαθηματικά, το ΕΔΟΣ που βρίσκεται κοντύτερα στην κατανόησή τους είναι το Ποσοτικό - Συσχετικό. Αυτό περιλαμβάνει ικανότητες όπως η ποσοτικοποίηση, η αρίθμηση και η μέτρηση, η κατάταξη μεγθών κατά μήκος μιας διάστασης, η σύγκριση ποσοτικών μεγθών και η εκτίμηση της σχέσης μεταξύ τους, ο χειρισμός σχέσεων συμμεταβολής κατά μήκος μιας ή πε-

ρισσότερων διαστάσεων, και, τέλος, η ανάπτυξη μαθηματικών μοντέλων για την ερμηνεία συστημάτων ποσοτικών σχέσεων.

Πέρα όμως από την ποσοτικοποίηση και το συσχετισμό μεγεθών που μεταβάλλονται κατά μήκος διαστάσεων, η εκμάθηση μαθηματικών προϋποθέτει την απόκτηση γνώσεων και δεξιοτήτων που θα επιτρέψουν την αποτελεσματική εφαρμογή των παραπάνω ικανοτήτων. Προϋποθέτει δηλαδή:

1) Μάθηση ορισμών και κανόνων που αφορούν τους αριθμούς και τις σχέσεις μεταξύ τους.

2) Μάθηση και εφαρμογή αλγορίθμων που αφορούν την εκτέλεση μαθηματικών πράξεων.

3) Εκμάθηση, πέραν των αριθμών, του μαθηματικού συμβολισμού, όπως τα αλγεβρικά σύμβολα.

4) Σχεδιασμό κι ανάλυση σχέσεων στο χώρο, όπως συμβαίνει στη Γεωμετρία. Αυτό σημαίνει ότι η μάθηση των μαθηματικών προϋποθέτει χρήση του Ποιοτικού - Αναλυτικού ΕΔΟΣ, του Λεκτικού - Προτασιακού, το οποίο είναι αναγκαίο τόσο για την εκμάθηση της "μαθηματικής γλώσσας" όσο και των τυπικών σχέσεων μεταξύ προτάσεων κατά την αποδεικτική διαδικασία, καθώς και του Εικονικού - Χωροταξικού για το χειρισμό γεωμετρικών εννοιών. Το Αιτιολογικό - Πειραματικό ΕΔΟΣ φαίνεται το λιγότερο απαιτούμενο. Το Μεταγνωστικό - Αναλογιστικό σύστημα είναι φανερό ότι θα παρεμβαίνει εκεί που χρειάζεται ενσυνείδητη καθοδήγηση της προσοχής στην επιλογή και εφαρμογή των αναγκαίων γνωστικών διαδικασιών.

Με βάση την παραπάνω ανάλυση μπορεί να προβλέψει κανείς ότι η συσχέτιση των διάφορων μαθηματικών έργων με τις ικανότητες που προβλέπει ο Εμπειρικός - Βιωματικός Δομισμός θα

ποικίλει ανάλογα με το έργο και τις ειδικές απαιτήσεις του. Αν, λοιπόν, επικεντρωθεί κανείς στην ύλη των Μαθηματικών που διδάσκεται στην Πρώτη Γυμνασίου στα ελληνικά σχολεία, τότε θα παρατηρήσει ότι η ύλη αυτή συστηματοποιεί όλη τη μαθηματική γνώση που απέκτησαν οι μαθητές στο Δημοτικό σχολείο. Η γνώση αυτή αφορά το μαθηματικό συμβολισμό, την κλίμακα των ακεραίων, δεκαδικών και κλασματικών αριθμών, τους αλγορίθμους των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων, τη μέτρηση ποσοτικοποιήσιμων μεγεθών (βάρος, χρόνος, μήκος, επιφάνεια, όγκος) και, τέλος, γεωμετρικές έννοιες και αλγορίθμους. Η ύλη αυτή δεν περιλαμβάνει έργα σχέσεων μεταξύ σχέσεων, όπως οι αναλογίες, δηλαδή δεν περιλαμβάνει έργα που απαιτούν ικανότητες που κατά τον Εμπειρικό-Βιωματικό Δομισμό αναπτύσσονται μετά τα 13 χρόνια. Κατά συνέπεια, αν πάρει κανείς ταυτοχρόνως έργα ενδεικτικά των ΕΔΟΣ του Εμπειρικού - Βιωματικού Δομισμού και έργα ενδεικτικά της ύλης των Μαθηματικών της Πρώτης Γυμνασίου σε παιδιά που διδάχτηκαν την ύλη αυτή, τότε θα μπορεί να υποθέσει τα ακόλουθα:

1. Τα Μαθηματικά είναι μια σύνθετη δεξιότητα, η οποία σχετίζεται με το Ποσοτικό ΕΔΟΣ αλλά απαιτεί ταυτοχρόνως ικανότητες του Ποιοτικού - Αναλυτικού ΕΔΟΣ, του Εικονικού - Χωροταξικού και του Λεκτικού - Προτασιακού.

2. Η σχέση της μαθηματικής δεξιότητας με το Αιτιολογικό ΕΔΟΣ είναι ελάχιστη.

3. Το Μεταγνωστικό - Αναλογιστικό σύστημα συμβάλλει στη μαθηματική δεξιότητα μόνον εκεί που απαιτείται χρήση μη αυτοματοποιημένων διαδικασιών.

4. Στην ηλικία των 12-13 χρόνων, παρά την προσδοκώμενη σχέση των Μαθηματικών με το Ποσοτικό ΕΔΟΣ, δεν αναμένεται να έχουν αναπτυχθεί οι

ικανότητες χειρισμού ποσοτικών σχέσεων μεταξύ σχέσεων, όπως αυτές εκφράζονται μέσα από την κατανόηση και χρήση του λόγου και αναλογίας. Έτσι, μόλο που στο σχολείο υπάρχει διδασκαλία των ρητών αριθμών με τη μορφή των δεκαδικών και κλασμάτων, η σχέση των επιδόσεων σε αυτές τις έννοιες με την επίδοση σε έργα ρητών που αφορούν αναλογία προβλέπεται μικρή, διότι η αναλογία προϋποθέτει όχι μόνο κατανόηση της κλασματικής σχέσης αλλά και συντονισμό της σχέσης που εκφράζουν δύο κλάσματα. Αυτές οι ικανότητες χειρισμού σχέσεων δευτέρου βαθμού είναι επίτευξη που παρατηρείται γύρω στα 15 χρόνια.

5. Επειδή όμως η συμπεριφορά επηρεάζεται όχι μόνο από παράγοντες ικανότητας αλλά και από παράγοντες που σχετίζονται με τη δημιουργία ατομικών διαφορών, όπως η ηλικία, το φύλο και το κοινωνικοοικονομικό επίπεδο (ΚΟΙΕ), αναμένεται ότι οι επιδόσεις των παιδιών 12 και 13 χρόνων, τόσο σε γνωστικό όσο και σε μαθηματικό επίπεδο, θα επηρεάζονται από τους παράγοντες αυτούς (Demetriou & Efklides, 1987). Ειδικότερα, προβλέπεται:

α) Η επίδραση της ηλικίας να είναι σημαντική υπέρ των κοριτσιών στα λεκτικά έργα.

β) Η επίδραση του κοινωνικοοικονομικού επιπέδου να είναι σημαντική υπέρ του υψηλού έναντι των δύο άλλων, και του μεσαίου έναντι του χαμηλού ΚΟΙΕ.

## Μέθοδος

### Υποκείμενα

Στην έρευνα έλαβαν μέρος 351 μαθητές της 1ης και 2ας Γυμνασίου τριών σχολείων. Δύο από τα σχολεία αυτά ήταν αστικά και ένα αγροτικό. Οι μαθητές του πρώτου σχολείου αντιπροσώ-

πευαν το υψηλό κοινωνικοοικονομικό επίπεδο (ΚΟΙΕ), λόγω του υψηλού μορφωτικού επιπέδου των γονέων τους. Το δεύτερο αστικό σχολείο αντιπροσωπεύει ένα μικτό πληθυσμό ως προς το μορφωτικό επίπεδο των γονέων. Υπ' αυτή την έννοια αντιπροσώπευε το μέσο ΚΟΙΕ. Το αγροτικό σχολείο αντιπροσώπευε το χαμηλό ΚΟΙΕ λόγω του χαμηλού μορφωτικού επιπέδου των γονέων των παιδιών. Συνολικά 117 μαθητές ανήκαν στο υψηλό κοινωνικοοικονομικό επίπεδο, 123 μαθητές ανήκαν στο μέσο και 111 μαθητές στο χαμηλό. Η μέση ηλικία των μαθητών 1ης Γυμνασίου ήταν 12 ετών και ενός μηνός, των μαθητών 2ας Γυμνασίου ήταν 13 ετών και ενός μηνός. Το φύλο αντιπροσωπευόταν περίπου εξίσου και στα τρία ΚΟΙΕ. Η ακριβής σύνθεση του δείγματος δίνεται στον Πίνακα 1.

### Έργα

Υπήρχαν δύο σύνολα έργων, τα γνωστικά και τα μαθηματικά.

**Γνωστικά έργα.** Τα γνωστικά έργα απευθύνονται στα πέντε ΕΔΟΣ που προβλέπει ο Εμπειρικός - Βιωματικός Δομισμός και το μεταγνωστικό σύστημα. Το Ποιοτικό - Αναλυτικό ΕΔΟΣ αντιπροσωπευόταν από τρία έργα:

α) την Ταξινόμηση Σχημάτων, το οποίο αφορούσε την εύρεση της έννοιας που εκπροσωπούσε μια ομάδα σχημάτων και την ταξινόμηση νέων περιπτώσεων σύμφωνα με την έννοια αυτή.

β) Το Τεστ των Αριθμών, το οποίο έδινε μια σειρά αριθμών κάθε φορά και δύο κενά για να συμπληρωθούν από το υποκείμενο. Οι κανόνες συνδυασμού των αριθμών ήταν ποικίλης δυσκολίας, προσθετικού, πολλαπλασιαστικού και/ή χωροταξικού τύπου.

γ) Το Τεστ των Σχεδίων, το οποίο πα-

ρουσίαζε μια μήτρα 3x3 και ορισμένα σχέδια σε 7 από τα 9 φατνία της. Το υποκείμενο έπρεπε να βρει τον κανόνα που διείπε τη διευθέτηση των σχεδίων και να συμπληρώσει βάσει αυτού τα δύο κενά φατνία της μήτρας.

Το Ποσοτικό - Συσχετικό ΕΔΟΣ αντιπροσωπευόταν από δύο έργα, την Παραγωγικότητα 1 και 2. Η Παραγωγικότητα 1 παρουσίαζε έναν πίνακα που αφορούσε δύο φυτά και την παραγωγικότητά τους σε δύο συνθήκες ποτίσματος. Το υποκείμενο έπρεπε να κρίνει ποιό από τα δύο φυτά επηρεαζόταν περισσότερο από το πότισμα, εκτιμώντας το ρυθμό μεταβολής της παραγωγής στο καθένα από αυτά. Η Παραγωγικότητα 2 παρουσίαζε δύο πίνακες παραγωγικότητας, αντίστοιχους της Παραγωγικότητας 1. Ο πρώτος πίνακας αφορούσε την παραγωγικότητα δύο φυτών όταν αυτά καλλιεργούνταν στην περιοχή Ι. Ο δεύτερος αντιστοιχούσε στην παραγωγικότητα των ίδιων φυτών, όταν αυτά καλ-

λιεργούνταν στην περιοχή ΙΙ. Το υποκείμενο έπρεπε να κάνει τη σύγκριση της παραγωγικότητας των φυτών και στις δύο περιοχές και να κρίνει ποιό επηρεάζεται περισσότερο από το πότισμα.

Το Αιτιολογικό - Πειραματικό ΕΔΟΣ αντιπροσωπευόταν από δύο έργα, το Φωτισμό και το Πότισμα. Ο Φωτισμός αφορούσε το σχεδιασμό ενός πειράματος προκειμένου να ελεγχθεί η υπόθεση ότι η αύξηση του φωτισμού αυξάνει την παραγωγικότητα των φυτών. Στο υποκείμενο δίνονταν δύο διαφορετικά φυτά και δύο συνθήκες φωτισμού με τα οποία να σχεδιάσει το πείραμά του. Το Πότισμα αφορούσε το σχεδιασμό δύο πειραμάτων προκειμένου να ελεγχθεί η υπόθεση ότι η αύξηση του ποτίσματος αυξάνει την παραγωγικότητα του φυτού Α αλλά δεν επηρεάζει την παραγωγικότητα του φυτού Β. Στο υποκείμενο δίνονταν δύο φυτά (Α, Β) και δύο συνθήκες ποτίσματος προκειμένου να οργανώσει το πείραμά του.

#### Πίνακας 1

Αριθμός Υποκειμένων ανά ηλικία, φύλο και τόπο διαμονής

Σχολική τάξη	Τόπος διαμονής	Φύλο	Μέση ηλικία (σε μήνες)	N	
1η Γυμνασίου	Θεσσαλονίκη (Υψηλό SES)	A	147	31	
		K	147	31	
	Σέρρες (Μέσο SES)	A	148	36	
		K	147	16	
	Σέρρες (αγροτική περιοχή) (Χαμηλό SES)	A	147	26	
		K	147	28	168
2α Γυμνασίου	Θεσσαλονίκη (Υψηλό SES)	A	159	30	
		K	159	31	
	Σέρρες (Μέσο SES)	A	159	35	
		K	158	30	
	Σέρρες (αγροτική περιοχή) (Χαμηλό SES)	A	160	31	
		K	158	26	183
					351

Το Εικονικό - Χωροταξικό ΕΔΟΣ αντιπροσωπευόταν από δύο έργα, τα Κρύσταλλα και τις Σκιές. Τα Κρύσταλλα αφορούσαν τη νοερή περιστροφή, επικάλυψη και αντιστροφή απλών γεωμετρικών σχημάτων τα οποία ήταν ζωγραφισμένα πάνω σε δύο διαφανή κρύσταλλα. Οι Σκιές αφορούσαν την αλλαγή στη θέση τριών σχηματοειδών οπών που βρίσκονταν πάνω σε μια σανίδα, όταν έπεφτε το φως από προβολείς πάνω στη σανίδα και σχηματιζόταν η σκιά της.

Το Λεκτικό - Προτασιακό ΕΔΟΣ αντιπροσωπευόταν από δύο έργα, το Θησαυρό και την Άρδευση. Ο Θησαυρός εξέταζε την εκούσια διάψευση προτάσεων που συνδέονταν μεταξύ τους με ορισμένη λογική σχέση, όπως η άρνηση, σύζευξη, διάζευξη, συνεπαγωγή. Η Άρδευση εξέταζε την κατοχή της έννοιας της αναγκαίας αλλά μη επαρκούς συνθήκης στην υποθετική διαλογιστική.

Το Μεταγνωστικό - Αναλογιστικό σύστημα αντιπροσωπευόταν από τρία έργα, τα οποία απαιτούσαν εκτίμηση του βαθμού ομοιότητας μεταξύ ζευγών από τα γνωστικά έργα που είχαν προηγηθεί, καθώς και ανάλυση της ομοιότητας αυτής. Τα τρία ζεύγη έργων ήταν: α) οι Σκιές και τα Κρύσταλλα, τα οποία ανήκαν στο ίδιο είδος ΕΔΟΣ και εκφέρονταν με το ίδιο συμβολικό μέσο. β) Η Παραγωγικότητα 1 και το Τεστ των Αριθμών, τα οποία ανήκαν σε διαφορετικό ΕΔΟΣ αλλά εκφέρονταν με το ίδιο συμβολικό μέσο. γ) Το Τεστ των Αριθμών και το Τεστ των Σχεδίων, τα οποία ανήκαν στο ίδιο ΕΔΟΣ αλλά εκφέρονταν με διαφορετικό συμβολικό μέσο.

**Μαθηματικά έργα.** Τα μαθηματικά έργα ήταν συνολικά τριάντα. Ήταν έργα πολλαπλής επιλογής και αφορούσαν τους δεκαδικούς αριθμούς, τα κλάσματα, και γεωμετρικές έννοιες. Προέρχο-

νταν από την ύλη του βιβλίου των Μαθηματικών της 1ης Γυμνασίου αλλά δεν ανευρίσκονταν αυτούσια μέσα σε αυτό. Εξέταζαν ειδικότερα τα παρακάτω θέματα:

Γραφή και κατανόηση της έννοιας του δεκαδικού αριθμού, του κλάσματος, της γωνίας, του τριγώνου, των παράλληλων και κάθετων γραμμών.

Κατάταξη δεκαδικών αριθμών κατά σειρά μεγέθους.

Μέτρηση μεγεθών, όπως του μήκους και της επιφάνειας.

Ισοδυναμία κλιμάκων μέτρησης στην περίπτωση του βάρους, μήκους, όγκου.

Αλγόριθμους πράξεων: πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση δεκαδικών και κλασμάτων, περίμετρο κι εμβαδόν ορθογώνιου παραλληλογράμμου και τριγώνου.

Μετάφραση λεκτικού κειμένου σε αλγεβρική παράσταση.

Κατανόηση της έννοιας της απόστασης σημείου από ευθεία, της τυποποιημένης μορφής αριθμού, και της επιμεριστικής ιδιότητας.

Ποσοστό.

### Διαδικασία

Η εξέταση των υποκειμένων έλαβε χώρα κατά τους μήνες Οκτώβριο και Νοέμβριο, προτού δηλαδή σωρευθούν οι επιδράσεις της άσκησης στην ύλη της τάξης από το σχολείο. Οι μαθητές της 1ης Γυμνασίου ουσιαστικά εκπροσωπούσαν τη γνώση που προσφέρει το Δημοτικό σχολείο. Λόγω του πλήθους των έργων η εξέταση έγινε σε δύο φάσεις: μια για τα γνωστικά έργα και μια για τα μαθηματικά. Η κάθε εξέταση διαρκούσε περίπου τρεις σχολικές ώρες. Το χρονικό διάστημα μεταξύ των δύο εξετάσεων ήταν περίπου δύο εβδομάδες. Μισά από τα υποκείμενα εξετάστηκαν πρώτα με τα γνωστικά έργα και μισά με τα μαθηματικά.

Η σειρά παρουσίασης των γνωστικών έργων ήταν τυχαιοποιημένη. Η σειρά παρουσίασης των μαθηματικών έργων ήταν σταθερή αλλά με τυχαιοποιημένη τη σειρά μεταξύ δεκαδικών, κλασματικών και γεωμετρικών έργων.

## Αποτελέσματα και Συζήτηση

### Η δομή των ικανοτήτων

Προκειμένου να προσδιοριστεί η σχέση των μαθηματικών επιδόσεων με τις γνωστικές ικανότητες ήταν ανάγκη να διερευνηθεί κατ' αρχήν η δομή των μαθηματικών επιδόσεων και κατόπιν να γίνει ο συσχετισμός τους με τα γνωστικά αντικείμενα.

Για την αποκάλυψη της δομής των μαθηματικών επιδόσεων εφαρμόστηκε ανάλυση παραγόντων στο σύνολο των υποκειμένων. Ο Πίνακας 2 δίνει τους παράγοντες που απομονώθηκαν. Οι πρώτοι έξι παράγοντες κρατήθηκαν για περιστροφή. Η περιστροφή ήταν πλάγια. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 2, ο πρώτος παράγοντας παίρνει τις κύριες φορτίσεις του από τα προβλήματα που απαιτούσαν γνώση και εφαρμογή αλγορίθμων (αλγόριθμος εμβαδού τριγώνου, αλγόριθμος εμβαδού ορθογωνίου, αλγόριθμοι δεκαδικών πράξεων) καθώς και την αντιστοιχία μονάδων μέτρησης. Ο παράγοντας αυτός φορτιζόταν δευτερευόντως από όλα σχεδόν τα υπόλοιπα μαθηματικά έργα. Πραγματικά, ο παράγοντας αυτός εξηγεί το 31.3% της διακύμανσης ενώ οι υπόλοιποι πέντε παράγοντες εξηγούν το 4-5% της διακύμανσης ο καθένας. Με βάση τα παραπάνω θα μπορούσε να ονομάσει κανείς τον παράγοντα αυτό γενικό μαθηματικό - αλγοριθμικό.

Ο δεύτερος παράγοντας παίρνει τις κύριες φορτίσεις του από τα έργα που απαιτούσαν γραφή και σύγκριση δεκαδι-

κών αριθμών, σύγκριση επιφανειών και το ποσοστό. Το κοινό στοιχείο όλων των έργων που φορτίζουν τον παράγοντα αυτό είναι η σύγκριση ή ο ταυτόχρονος χειρισμός δύο μεγεθών κατά μήκος μιας διάστασης. Ο παράγοντας αυτός θα μπορούσε να ονομαστεί, επομένως, διαστασιακός.

Ο τρίτος παράγοντας φορτίζεται από τα δύο προβλήματα που αφορούσαν τη μέτρηση στο χώρο (μήκος, επιφάνεια). Είναι στην ουσία ο χωρικός παράγοντας.

Ο τέταρτος παράγοντας έχει φορτίσεις από δύο κυρίως έργα, τα κλασματικά. Τα έργα αυτά εξετάζουν την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος. Επομένως αυτός είναι ο κλασματικός παράγοντας.

Ο πέμπτος παράγοντας παίρνει τις κύριες φορτίσεις του από τα δύο έργα που αφορούσαν κατανόηση γεωμετρικών εννοιών σε σύνθετο πλαίσιο αναφοράς (παράλληλες / κάθετες ευθείες, απόσταση σημείου από ευθεία). Φορτίζει επίσης τα προβλήματα που αφορούσαν την αναγνώριση και συμβολισμό συναρτησιακής σχέσης και τη σύγκριση σύνθετων μαθηματικών παραστάσεων. Το κοινό στοιχείο των έργων αυτών είναι η αναγνώριση ορισμένης σχέσης σε ένα νέο ή σύνθετο πλαίσιο αναφοράς. Ο παράγοντας αυτός συσχετίζεται υψηλά με τον πρώτο και δεύτερο παράγοντα,  $r=.368$  και  $r=.347$  αντιστοίχως, πράγμα που υποδηλώνει την ανάγκη για κατοχή της γενικής μαθηματικής γνώσης για την εφαρμογή της σε νέες, σύνθετες καταστάσεις. Για τους παραπάνω λόγους ο παράγοντας αυτός μπορεί να ονομαστεί μεταβιβαστικός, γιατί προϋποθέτει μεταβίβαση γνώσεων σε νέες σύνθετες καταστάσεις.

Τέλος, τον έκτο παράγοντα φορτίζουν τα δύο έργα που αφορούσαν το μαθηματικό συμβολισμό (μετάφραση λεκτι-

κής περιγραφής σε αλγεβρική παράσταση, τυποποιημένη μορφή αριθμού). Άρα αυτός ο παράγοντας είναι ο συμβολιστικός. Η σχέση του με τους άλλους παράγοντες, ακόμη και το γενικό μαθηματικό, είναι ιδιαίτερα χαμηλή,  $r=.127$  η υψηλότερη από αυτές, πράγμα που υποδηλώνει ότι η ικανότητα αυτή συμβάλλει τοπικά μόνο στη μαθηματική δεξιότητα.

### Η σχέση γνωστικών - μαθηματικών ικανοτήτων

Προκειμένου να ανευρεθεί η σχέση μεταξύ των δύο τύπων έργων και να ελεγχθούν οι υποθέσεις της έρευνας, έγινε μια ανάλυση παραγόντων στην οποία συμμετείχαν τόσο τα γνωστικά έργα όσο και τα μαθηματικά. Από το πλήθος των μαθηματικών έργων επιλέχθηκαν για τεχνικούς λόγους (δυνατότητες του στατιστικού προγράμματος) μόνο δεκατέσσερα, εκείνα που κατά την προηγούμενη ανάλυση φόρτιζαν ισχυρό-

Πίνακας 2

Η δομή των παραγόντων που αφαιρέθηκε από τις μαθηματικές επιδόσεις όλου του δείγματος ( $n=351$ )

Έργα / Παράγοντες	I	II	III	IV	V	VI
Δ Γραφή/ανάγνωση		-. 730*				
Δ Γραφή/αντιστοιχία συμβόλου	586*	-. 408	. 354		-. 302	
Κ Υπολογισμός κλάσματος				. 869*		
Κ Γραφή κλάσματος	. 376	-. 352	. 411	. 716*	-. 418	
Δ Διάσταση/σύγκριση	. 375	-. 654*	. 414		-. 367	
Γ Μέτρηση ευθ. τμήμ.			. 700*		-. 385	
Γ Μέτρηση επιφανείας	. 368		. 743			
Γ Διατήρηση επιφανείας		-. 589*			-. 317	. 388
Γ Γραφή/ανάγνωση					-. 782*	
Δ Αντιστοιχία μονάδων μέτρησης	. 685*		. 375	. 390		
Γ Αλγόριθμος εμβ. τριγ.	. 879*	-. 301			-. 416	
Γ Αλγόριθμος εμβ. τριγ. Μαθηματ. συμβολισμός	. 891*			. 328	-. 321	. 654*
Δ Αλγόριθμοι πράξεων	. 512	-. 524*	. 363		-. 388	
Δ Αλγόριθμοι πράξεων	. 655*	-. 521	. 364		-. 320	
Επιμεριστικότητα Μαθηματ. συμβολισμός (τυποπ. μορφή αριθμού)	. 508	-. 552*	. 428		-. 468	
Γ Γραφή/απόσταση σημείου	. 352			. 430		-. 490*
Μαθηματ. συμβολισμός	. 372	-. 492			-. 537*	
Ποσοστό	. 361	-. 534*		. 343	-. 339	
Δ Αλγόριθμος διαί- ρεσης	. 365	-. 404*			-. 387	. 366
Γ Αλγόριθμος εμβαδού	. 639*	-. 533	. 368		-. 307	
Σύγκριση μαθημ. παραστάσεων	. 316				-. 621*	

- Σημείωση: 1. Φορτίσεις κάτω του .30 παραλείπονται.  
2. Ο αστερίσκος \* υποδηλώνει πρωταρχικές φορτίσεις.  
3. Τα γράμματα Δ, Κ και Γ υποδηλώνουν δεκαδικός, κλάσμα και γεωμετρία αντίστοιχως.

τερα τους έξι μαθηματικούς παράγοντες σύμφωνα με το παραγοντικό πρότυπο. Έτσι ο πρώτος παράγοντας αντιπροσωπεύεται από τα αλγοριθμικά έργα (αλγόριθμος πολλαπλασιασμού, αλγόριθμος περιμέτρου και εμβαδού ορθογωνίου, αλγόριθμος εμβαδού τριγώνου με ή χωρίς μετατροπή μονάδων). Ο δεύτερος παράγοντας αντιπροσωπεύεται από το έργο της γραφής των δεκαδικών και του αλγόριθμου της πρόσθεσης και αφαίρεσης δεκαδικών. Ο τρίτος παράγοντας εκπροσωπείται από τα κλασματικά έργα. Ο πέμπτος παράγοντας, εκπροσωπείται από τα έργα γεωμετρικών εννοιών, και ο έκτος παράγοντας από τα έργα μαθηματικού συμβολισμού. Από τα γνωστικά έργα αφαιρέθηκε μόνο ένα, ενώ από τα μεταγνωστικά, εκείνο που αφορούσε τη σύγκριση Κρυστάλλων - Σκιών. Το σύνολο των έργων που περιλήφθησαν στην ανάλυση παραγόντων ήταν είκοσιεπτά. Τα αποτελέσματα δίνονται στον Πίνακα 3.

Και η ανάλυση αυτή έδωσε έξι παράγοντες. Έξι παράγοντες κρατήθηκαν για πλάγια περιστροφή. Ο πρώτος παράγοντας, που εξηγεί το 29,3% της διακύμανσης, είναι ο γενικός μαθηματικός / αλγοριθμικός. Ο παράγοντας αυτός παίρνει τις πρωτογενείς φορτίσεις του από τα αλγοριθμικά έργα, παράλληλα όμως φορτίζει και όλα σχεδόν τα μαθηματικά έργα. Ο παράγοντας αυτός συμπαρασύρει μαζί του τα έργα του Ποιοτικού - Αναλυτικού ΕΔΟΣ, τα Κρυστάλλα του Εικονικού ΕΔΟΣ, το Θησαυρό του Λεκτικού - Προτασιακού ΕΔΟΣ και ένα από τα Μεταγνωστικά έργα. Αυτό σημαίνει ότι ο γενικός παράγοντας δεν έχει ενσωματώσει ακόμη τα έργα αναλογίας και για το λόγο αυτό δεν παίρνει φορτίσεις από τα έργα του Ποσοτικού - Συσχετικού ΕΔΟΣ. Γίνεται φανερό, λοι-

πόν, ότι η κατανόηση και κατάκτηση των βασικών μαθηματικών δεξιοτήτων προϋποθέτει ικανότητες επαγωγικές - μάθησης κανόνων και αλγορίθμων -, ικανότητες εικονικές - χωροταξικές και, τέλος, ικανότητες λεκτικές και μεταγνωστικές. Υπό αυτήν την έννοια επιβεβαιώνεται η πρώτη υπόθεση της έρευνας.

Ο δεύτερος παράγοντας είναι ο αιτιολογικός - πειραματικός. Φορτίζεται πρωταρχικώς από τα δύο έργα του Αιτιολογικού ΕΔΟΣ και δευτερευόντως από τα περισσότερα γνωστικά έργα. Μόνο τα έργα με τους αλγόριθμους του εμβαδού τριγώνου, τα οποία απαιτούσαν διάσπαση του αλγόριθμου και μετατροπή των μονάδων μέτρησης από ένα επίπεδο σε ένα άλλο, συμπαρασύρονται στον παράγοντα αυτόν. Αυτό το εύρημα ουσιαστικά επιβεβαιώνει τη δεύτερη υπόθεσή μας που αφορούσε την έλλειψη σχέσης ανάμεσα στο Αιτιολογικό - Πειραματικό ΕΔΟΣ και τη μαθηματική σκέψη

Ο τρίτος παράγοντας φορτίζεται κυρίως από το έργο των Σχημάτων, το οποίο αφορά αναγνώριση γεωμετρικών εννοιών, και ορισμένα γεωμετρικά έργα, όπως η μέτρηση ευθύγραμμου τμήματος. Αρνητικά φορτίζεται από τα έργα του εμβαδού του τριγώνου. Αυτό σημαίνει ότι ο παράγοντας αυτός εκπροσωπεί τις απλές γεωμετρικές έννοιες και γι' αυτό η σχέση με το σύνθετο αλγόριθμο του εμβαδού του τριγώνου είναι αντίστροφη.

Ο τέταρτος παράγοντας είναι ο κλασματικός, ο οποίος φορτίζεται από τα δύο κλασματικά έργα και παρακολουθείται από τα έργα της μέτρησης της επιφανείας και ευθύγραμμου τμήματος. Πρόκειται δηλαδή για κλασματικό / χωρικό παράγοντα, μια και το κλάσμα συχνά ανάγεται και αναπαρίσταται ως μέρος ενός σχήματος.

Ο πέμπτος παράγοντας φορτίζεται από τα δύο έργα του Ποσοτικού ΕΔΟΣ,

τα Κρύσταλλα και τα δύο Μεταγνωστικά έργα. Ο παράγοντας αυτός συμπαρασύρει και τα αλγοριθμικά μαθηματικά έργα. Από τα παραπάνω είναι σαφές ότι ο παράγοντας αυτός είναι ο ποσοτικός / μεταγνωστικός, αυτός που αφορά ικανότητες συσχετιστικές και ταυτοχρόνως προϋποθέτει την τυποποιημένη έκφρασή τους μέσα από αλγορίθμους. Η σύνδεση του ποσοτικού παράγοντα με τη μεταγνώση και τα δυσκολότερα από τα μαθηματικά έργα, τα αλγοριθμικά, δείχνει την ανάγκη της καθοδήγησης της σκέψης μέσω της προσοχής στα έργα αυτά. Αυτό

το εύρημα δείχνει ότι ο ποσοτικός παράγοντας σχετίζεται με το γενικό / μαθηματικό παράγοντα (αυτό άλλωστε φαίνεται και από την ικανοποιητική συσχέτιση των δύο παραγόντων,  $r=.334$ ) αλλά απευθύνεται σε ικανότητες που δεν έχουν ενσωματωθεί ακόμη με το γενικό μαθηματικό. Επομένως επιβεβαιώνεται τόσο η σχετική με τον ποσοτικό παράγοντα όσο και η σχετική με τη μεταγνώση υπόθεση (υποθέσεις 3 και 4)

Ο έκτος παράγοντας είναι πάλι γνωστικός, με κύριες φορτίσεις από τα έργα του Ποιοτικού - Αναλυτικού ΕΔΟΣ, τις

Πίνακας 3

Η δομή των παραγόντων που αφαιρέθηκε από τις γνωστικές και μαθηματικές επιδόσεις όλου του δείγματος (n=351)

Εργα	Παράγοντες					
	I	II	III	IV	V	VI
Σχήματα	.308		.509*		.421	
Αριθμοί	.538	-.331		.368	.493	-.583*
Σκέδρια	.444	-.326	.347		.353	-.531*
Παραγωγ. 1		-.480			.659*	
Παραγωγ. 2		-.511			.581*	
Φωτισμός		-.822*				
Πότισμα		-.767*				
Κρύσταλλα	.438	-.413		.349	.556*	-.364
Σκιές						-.592*
Θησαυρός	.434		.334		.395	-.329
Αρδευση		-.380				-.541*
Ομοιότητες 2	.318				.674*	
Ομοιότητες 3					.677*	
Δ Γραφή						-.669*
Κ Υπολογ. κλάσματος				.805*		
Κ Γραφή	.424			.722*	.321	
Γ Μέτρηση ευθ. τμ.	.475*		.378	.465		-.302
Γ Μέτρηση επιφ.	.333			.558*		-.376
Γ Γραφή	.690					
Γ Αλγόρ. εμβ. τριγ.	.567	-.372	-.423	.400	.543	-.302
Γ Αλγόρ. εμβ. τριγ. μαθηματ.	.529*	-.353	-.397	.393	.544	
Δ Αλγόρ. πράξεων				.332		-.339
Δ Αλγόρ. πράξεων	.608*			.397		-.382
Δ Αλγόρ. πράξεων	.525*	-.371		.456	.495	-.510
Γ Γραφή Μαθημ.	.685*					
Γ Αλγόρ. εμβ. ορθογ.	.601*					
Γ Αλγόρ. εμβ. ορθογ.	.499			.405	.555*	-.467

Σκιές και την Αρδευση. Πρόκειται δηλαδή για τον κατέξοχην γνωστικό παράγοντα. Φορτίζεται επίσης από πολλά μαθηματικά έργα και κυρίως της γραφής των δεκαδικών αριθμών και ορισμένων αλγοριθμικών. Ουσιαστικά ο παράγοντας αυτός επαναλαμβάνει την εικόνα που δίνει ο πρώτος παράγοντας, αλλά με έμφαση στα δύσκολα από τα γνωστικά έργα. Γι' αυτό η συσχέτισή τους είναι  $r = .322$  ενώ η συσχέτιση του παράγοντα αυτού με τους άλλους παράγοντες είναι χαμηλότερη

Γενικά, αν εξετάσει κανείς τις συσχετίσεις των παραγόντων μεταξύ τους, βλέπει ότι ο παράγοντας που συσχετιζόταν ελάχιστα με τους υπόλοιπους ήταν ο τρίτος παράγοντας, αυτός των απλών γεωμετρικών εννοιών. Αυτό μπορεί να αποδοθεί στην υπερβολική ευκολία του έργου αυτού, που δε θέτει απαιτήσεις ούτε στις γνωστικές ούτε στις ειδικές μαθηματικές ικανότητες. Ο αιτιολογικός - πειραματικός παράγοντας επίσης συσχετιζόταν χαμηλά με το γενικό μαθηματικό και τους άλλους παράγοντες, γιατί τα διαδικαστικά σχήματα που εφαρμόζει το ΕΔΟΣ αυτό δεν είναι αναγκαία για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων.

Από τα παραπάνω είναι σαφές ότι για τα παιδιά 12 και 13 χρόνων υπάρχει ένας ισχυρός μαθηματικός παράγοντας, ο οποίος σχετίζεται με τις επαγωγικές, εικονικές και προτασιακές ικανότητες και λιγότερο με τις συσχετικές και τις μεταγνωστικές. Πραγματικά, τόσο οι δύο τελευταίες ικανότητες όσο και η αιτιολογική - πειραματική, είναι ικανότητες που αρχίζουν να αναπτύσσονται κατά την ηλικία αυτή, ενώ οι πρώτες έχουν ήδη αναπτυχθεί σε ικανοποιητικό επίπεδο. Αυτό φαίνεται από τη σύγκριση των επιδόσεων στα διάφορα έργα.

### **Ενδο- και διομαδικές διαφορές ως**

### **προς τις γνωστικές και μαθηματικές ικανότητες.**

Προκειμένου να ελεγχθεί η υπόθεση 5 και να διερευνηθούν οι ατομικές διαφορές, έγινε μια σειρά από αναλύσεις διακύμανσης με προγραμματισμένες αντιπαραθέσεις. Παράγοντες μεταξύ των ομάδων ήταν η ηλικία, το φύλο, και το ΚΟΙΕ. Παράγοντες μεταξύ των έργων ήταν α) τα ΕΔΟΣ για τα γνωστικά έργα και β) οι μαθηματικοί παράγοντες για τα μαθηματικά έργα. Λόγω του σχετικά μεγάλου αριθμού συγκρίσεων, το επίπεδο του  $\alpha$  ορίστηκε στο .005. Η τιμή του αντίστοιχου  $F$  είναι:  $F(1,339)=8.18$ .

**Ηλικία.** Η κύρια επίδραση της ηλικίας ήταν σημαντική τόσο στα γνωστικά,  $F(1,339)=10.909$ ,  $p < .05$ , όσο και στα μαθηματικά έργα  $F(1,339)=23.030$ ,  $p < .001$  (βλ. Σχήμα 1α και 2α). Δηλαδή η διαφορά επιδόσεων μεταξύ της 1ης και 2ας Γυμνασίου ήταν σημαντική, και κυρίως για τα μαθηματικά έργα, όπου η διδασκαλία φαίνεται να έχει επηρεάσει θετικά. Αυτό αποδεικνύεται από το γεγονός ότι η σημαντικότερη διαφορά εντοπίζεται στο μεταβιβαστικό παράγοντα, τον παράγοντα που αφορά την εφαρμογή υπαρχουσών γνώσεων σε νέα σύνθετα πλαίσια

**Φύλο.** Η κύρια επίδραση του φύλου ήταν αντιθέτως ισχυρή στα γνωστικά έργα,  $F(1,339)=24.161$ ,  $p < .005$  (βλ. Σχήμα 1β και 2β). Τα κορίτσια υπερερούσαν των αγοριών τόσο στα γνωστικά όσο και στα μαθηματικά έργα. Το εύρημα αυτό δεν είναι σύμφωνο με παλαιότερα δεδομένα (Demetriou & Efklides, 1985, 1987), που εντόπιζαν τη διαφορά του φύλου στα λεκτικά έργα υπέρ των κοριτσιών και στα εικονικά και ποσοτικά προβλήματα υπέρ των αγοριών. Η διαφορά που βρέθηκε εδώ θα πρέπει να είναι συνέπεια των ηλικιών που εξετάστηκαν. Σε αυτή τη φάση της ηλικίας τους τα κο-

οίτσια έχουν ωριμάσει βιολογικά νωρίτερα από τα αγόρια, πράγμα που αντανακλάται στις επιδόσεις τους.

### **Το Κοινωνικοοικονομικό Επίπεδο.**

Τις πιο έντονες διαφορές μεταξύ των ομάδων μπορεί να διακρίνει κανείς στις συγκρίσεις μεταξύ των τριών ΚΟΙΕ (βλ. Σχήμα 1γ και 2γ). Τα παιδιά του υψηλού ΚΟΙΕ διέφεραν σημαντικά,  $F(1,339)=21.341$ ,  $p<.001$ , από τα παιδιά μέσου ΚΟΙΕ και πολύ σημαντικά,  $F(1,339)=116.905$ ,  $p<.000$ , από τα παιδιά χαμηλού / αγροτικού ΚΟΙΕ στις γνωστικές επιδόσεις. Η διαφορά μέσου - χαμηλού ΚΟΙΕ ήταν επίσης σημαντική,  $F(1,339)=34.805$ ,  $p<.001$ . Το ίδιο παρατηρήθηκε και ως προς τις μαθηματικές επιδόσεις. Το υψηλό ΚΟΙΕ διέφερε σημαντικά από το μέσο,  $F(1,339)=22.831$ ,  $p<.001$ , και πολύ σημαντικά από το χαμηλό ΚΟΙΕ,  $F(1,339)=104.636$ ,  $p<.000$ . Το μέσο ΚΟΙΕ διέφερε από το χαμηλό σημαντικά επίσης,  $F(1,339)=26.874$ ,  $p<.001$ .

Ορισμένες αλληλεπιδράσεις που παρατηρήθηκαν, και αφορούσαν το ΚΟΙΕ με την ηλικία, αντανακλούν το γεγονός ότι με την αύξηση της ηλικίας και το εντονότερο εκπαιδευτικό περιβάλλον του Γυμνασίου τα παιδιά του μέσου ΚΟΙΕ ανέπτυξαν πολύ αισθητά τις δυνατότητές τους, πράγμα που είχε ήδη συντελεστεί στα παιδιά του υψηλού ΚΟΙΕ. Αντιθέτως τα παιδιά χαμηλού ΚΟΙΕ δεν πέτυχαν την αλλαγή αυτή. Ευρήματα σχετικά με το άνοιγμα περίπου δύο χρόνων στις γνωστικές επιδόσεις των παιδιών υψηλού και χαμηλού ΚΟΙΕ υπήρξαν και σε όλες σχεδόν τις έρευνες των Δημητρίου και Ευκλείδη (Demetriou & Efklides, 1985, 1987, 1989).

Στις μαθηματικές επιδόσεις μόνο η αντιπαράθεση του μέσου με το χαμηλό ΚΟΙΕ αλληλεπιδρούσε με την αντιπαράθεση της ηλικίας,  $F(1,339)=10.940$ ,  $p<.005$ . Κι αυτό γιατί, ενώ το μέσο

ΚΟΙΕ βελτιώνεται πολύ αισθητά από την πρώτη στη δεύτερα τάξη, το χαμηλό ΚΟΙΕ παραμένει στα ίδια επίπεδα. Αυτό σημαίνει ότι ένα ευρύτερα υποστηρικτικό περιβάλλον είναι αναγκαίο προκειμένου να αξιοποιηθεί πλήρως η εμπειρία του σχολείου και να προαχθεί τόσο η κατανόηση των μαθηματικών όσο και η γενικότερη γνωστική ανάπτυξη.

### **Επιδράσεις των έργων.**

**Γνωστικά έργα.** Όπως φαίνεται στο Σχήμα 1, οι μέσες επιδόσεις στα έξι ΕΔΟΣ διέφεραν μεταξύ τους σημαντικά. Όλες οι σχετικές αντιπαράθεσεις ήταν πολύ σημαντικές. Οι χαμηλότερες επιδόσεις υπήρχαν στο Πειραματικό, το Ποσοτικό και το Μεταγνωστικό ΕΔΟΣ. Αυτό υποδηλώνει διαφορές στο επίπεδο δυσκολίας των έργων αυτών έναντι των υπολοίπων. Πραγματικά, οι ικανότητες συστηματικού σχεδιασμού πειραμάτων, αντίληψης της αναλογίας και επίγνωσης των νοερών διεργασιών είναι επιτεύξεις υψηλότερων ηλικιών από ότι οι επαγωγικές, εικονικές και λεκτικές ικανότητες που αναπτύσσονται από νωρίς (Demetriou & Efklides, 1987).

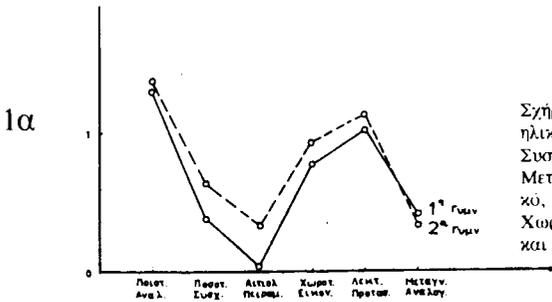
**Μαθηματικές ικανότητες.** Όπως φαίνεται στο Σχήμα 2, ο γενικός μαθηματικός - αλγοριθμικός παράγοντας παρουσιάζει χαμηλότερες επιδόσεις από όλους τους άλλους παράγοντες εκτός του κλασματικού. Τις υψηλότερες επιδόσεις παρουσιάζουν ο διαστασιακός και ο χωρικός παράγοντας. Γενικά, όλες οι διαφορές μεταξύ των μαθηματικών παραγόντων ήταν στατιστικά σημαντικές, εκτός του αλγοριθμικού με τον κλασματικό παράγοντα. Υπήρξε, επίσης, μια σημαντική αλληλεπίδραση των μαθηματικών ικανοτήτων με το ΚΟΙΕ, η οποία θα πρέπει να είναι απόρροια της μικρότερης απόδοσης που έχει η διδασκαλία των μαθηματικών στα παιδιά του χαμη-

λού ΚΟΙΕ. Στα έργα όπου απαιτείται διαστασιακή και χωρική ικανότητα, η επίδραση του σχολείου και ΚΟΙΕ είναι σημαντική, αν και λιγότερο ίσως καθοριστική, διότι οι ικανότητες αυτές συνδέονται με τις αντίστοιχες γνωστικές, οι οποίες είναι ήδη αναπτυγμένες στα παιδιά της ηλικίας αυτής. Γενικά η διαφορά επιδόσεων μεταξύ ΚΟΙΕ ήταν μεγαλύτερη στον αλγοριθμικό από ότι στο μεταβαστικό παράγοντα.

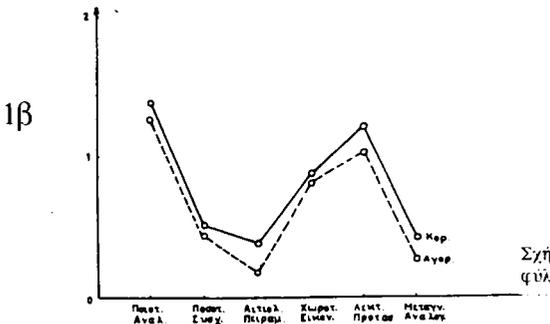
## Γενική συζήτηση

Η έρευνα αυτή αποσκοπούσε να μελετήσει τη δομή των μαθηματικών ικανοτήτων και τη σχέση τους με τις γνωστικές ικανότητες, όπως αυτές περιγράφονται από τον Εμπειρικό - Βιωματικό Δομισμό. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων έδειξε ότι, πρώτον, οι μαθηματικές επιδόσεις διαμορφώνουν έναν κύριο μαθηματικό παράγοντα και επιμέρους δευ-

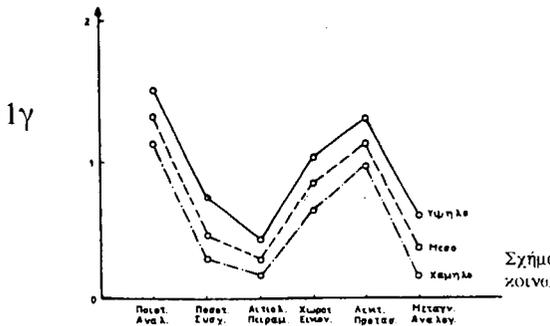
Σχήμα 1



Σχήμα 1α. Μέσες γνωστικές επιδόσεις ως συνάρτηση της ηλικίας και ΕΔΟΣ. Τα σύμβολα: Ποιοτ.-Αναλ., Ποσοτ.-Συσχ., Αιτιολ.-Πειραμ., Χωροτ.-Εικων., Λεξτ.-Πρωτ., Μεταγν.-Αναλογ. αντιστοιχούν στα: Ποιοτικό - Αναλυτικό, Ποσοτικό - Συσχετικό, Αιτιολογικό - Πειραματικό, Χωροταξικό - Εικονικό, Λεκτικό - Πρωτασιακό ΕΔΟΣ, και Μεταγνωστική - Αναλογιστική.



Σχήμα 1β. Μέσες γνωστικές επιδόσεις ως συνάρτηση του φύλου και ΕΔΟΣ.



Σχήμα 1γ. Μέσες γνωστικές επιδόσεις ως συνάρτηση του κοινωνικοοικονομικού επιπέδου και ΕΔΟΣ.

τερεύοντες παράγοντες, οι οποίοι ουσιαστικά αντανακλούν διαφορές στα επίπεδα κατανόησης επιμέρους τομέων της μαθηματικής γνώσης. Δεύτερον, οι μαθηματικές επιδόσεις υπακούουν στη δική τους νομοτέλεια και γι' αυτό δεν ταυτίζονται με τις γνωστικές επιδόσεις. Υπάρχει ωστόσο μια σχέση μεταξύ της βασικής μαθηματικής ικανότητας με την ικανότητα αναγνώρισης και εφαρμογής

κανόνων, την ποσοτικοποίηση, την εικονικότητα και το λογικό συμπερασμό, που συναποτελούν τις θεμελιώδεις εκφάνσεις του γνωστικού συστήματος κατά την προεφηβική περίοδο. Στη συνέχεια θα γίνει μια προσπάθεια για την καλύτερη κατανόηση των δεδομένων αυτών.

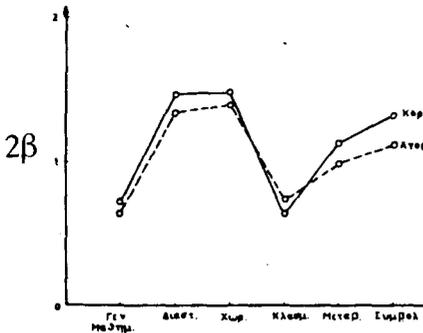
**Φύση της μαθηματικής ικανότητας**

Η απομόνωση ενός γενικού και επιμέ-

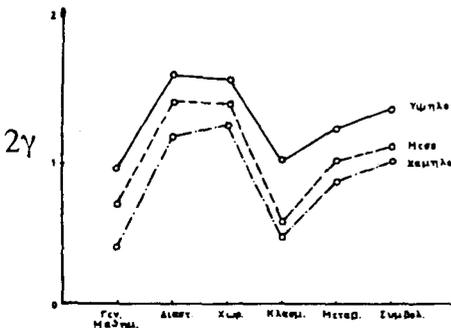
**Σχήμα 2**



Σχήμα 2α. Μέσες μαθηματικές επιδόσεις ως συνάρτηση της ηλικίας και ικανότητας. Τα σύμβολα: Γεν. Μαθμ., Διαστ., Χωφ., Κλασμ., Μεταβ., Συμβολ., αντιστοιχούν στα: Γενική μαθηματική, Διαστασιακή, Χωφική, Κλασματική, Μεταβιβατική και Συμβολιστική ικανότητα.



Σχήμα 2β. Μέσες μαθηματικές επιδόσεις ως συνάρτηση του φύλου και ικανότητας.



Σχήμα 2γ. Μέσες μαθηματικές επιδόσεις ως συνάρτηση του κοινωνικοοικονομικού επιπέδου και ικανότητας.

ρους μαθηματικών παραγόντων είναι εύρημα που συμφωνεί και με τα δεδομένα που προέκυψαν από την μετα-ανάλυση πολλών ερευνών που αφορούσαν κατανόηση των μαθηματικών που διδάσκονται στο σχολείο από την DeGuire (1986). Η DeGuire απομόνωσε έναν κύριο μαθηματικό παράγοντα και άλλους επιμέρους, χωρίς όμως να μπορεί να περιγράψει με ακρίβεια την υφή του. Στην περίπτωση μας ο κύριος μαθηματικός παράγοντας ταυτίζεται με τη χρήση σύνθετων αλγορίθμων. Αυτό δε σημαίνει ότι η υφή του μαθηματικού παράγοντα παραμένει η ίδια σε όλες τις ηλικίες ή σε όλα τα επίπεδα μαθηματικής γνώσης. Ψυχομετρικές έρευνες, ωστόσο, που εξέτασαν τη σχέση της σχολικής μαθηματικής γνώσης με άλλες γνωστικές ικανότητες και τη γενική ευφυΐα, έδειξαν ότι ο παράγοντας της ποσοτικής ικανότητας περιλαμβάνει κυρίως τους αριθμητικούς υπολογισμούς, την υπολογιστική ευχέρεια και την αναπαράσταση λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων (Horn, 1989). Αυτό σημαίνει ότι η μορφή του γενικού μαθηματικού παράγοντα που αναγνωρίστηκε στην έρευνα αυτή αντιστοιχεί πραγματικά σε θεμελιώδη χαρακτηριστικά της μαθηματικής σκέψης.

Η μαθηματική δεξιότητα, από την άλλη, συναπαρτίζεται από μια σειρά επιμέρους ικανοτήτων όπως η αναπαράσταση κατά μήκος διαστάσεων, η εκτίμηση χωρικών μεγεθών, η χρήση ειδικού συμβολισμού και η κατανόηση και χειρισμός κλασμάτων. Οι ικανότητες που είναι επαρκώς αναπτυγμένες στην ηλικία των 12-13 χρόνων είναι η διαστασιακή αναπαράσταση, η μη ποσοτικοποιημένη χωρική και η συμβολιστική. Αυτό στην ουσία σημαίνει ότι τα παιδιά αυτά βρίσκονται στη φάση χρήσης ενός συμβολικού συστήματος δεύτερου βαθμού, του μαθηματικού, αξιοποιώντας τα δεδομένα αναπαραστάσεων πρώτου επιπέδου,

όπως είναι αυτά της γλωσσικής και νοερός εικονικής αναπαράστασης. Έτσι, είναι δυνατή η μετάφραση γλωσσικών περιγραφών όχι μόνο σε αριθμητικές αλλά και σε αλγεβρικές παραστάσεις. Οι γεωμετρικές αναπαραστάσεις, εντούτοις, προκαλούν ιδιαίτερη δυσκολία στους μαθητές της 1ης και 2ας τάξης του Γυμνασίου. Κι αυτό, γιατί η γεωμετρική αναπαράσταση έχει τις δικές της ιδιότητες που δεν ταυτίζονται με αυτές της νοερός εικονικής αναπαράστασης. Για παράδειγμα, ενώ η εικονική - χωρική αναπαράσταση είναι αναλογική, ολική, μη αναλυτική, με έμφαση στη μορφή και όχι στις επιμέρους λεπτομέρειες (Kosslyn, 1985), η γεωμετρική αναπαράσταση προϋποθέτει ανάλυση και επεξεργασία των επιμέρους λεπτομερειών για τα επιμέρους συστατικά του γεωμετρικού συμβολικού συστήματος.

Η χρήση σύνθετων αλγορίθμων, που είναι επίτευξη της ηλικίας αυτής, δείχνει τη μετάβαση από την κατανόηση των ιδιοτήτων του αριθμητικού συμβολικού συστήματος στην εφαρμογή υπολογιστικών διαδικασιών επ' αυτού (Biggs, 1989. Biggs & Collis, 1982). Παρόλα αυτά, η χρήση αλγορίθμων για τον υπολογισμό γεωμετρικών μεγεθών είναι δύσκολη, διότι απαιτείται όχι μόνο μετασχηματισμός από ένα συμβολικό σύστημα, το εικονικό, σε ένα άλλο, το γεωμετρικό, αλλά και αντιστοιχηση του γεωμετρικού με το αριθμητικό. Με άλλα λόγια, χρειάζεται διπλή αναπαραστατική διεργασία, πράγμα που αυξάνει το φόρτο επεξεργασίας του έργου (Halford & Boulton - Lewis, 1992).

Η δυσκολία στο χειρισμό κλασμάτων θα μπορούσε να αναχθεί στο ότι το έργο που χρησιμοποιήθηκε για τον έλεγχο της κατανόησής τους προϋποθέτει μια συναρτησιακή σχέση, δηλαδή το κάθε επόμενο κλάσμα ήταν το 1/2 του προηγούμενου. Οι μαθητές αυτής της ηλικίας

αντιλαμβάνονται τα κλάσματα ως εκφράσεις της σχέσης μέρους-όλου και όχι ως μέσο συντονισμού δύο μεταβαλλόμενων μεγεθών. Έτσι, η εικόνα της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών 1ης και 2ας Γυμνασίου που προβάλλει μέσα από τα δεδομένα μας είναι αυτή που περιγράφεται από τον Εμπειρικό - Βιωματικό Δομισμό και που αφορά την ποσοτικοποίηση μεγεθών που μεταβάλλονται κατά μήκος μιας διάστασης μόνο. Ο συντονισμός μεγεθών που κινούνται σε ανεξάρτητες διαστάσεις δεν έχει εγκαθιδρυθεί ακόμη. Αυτό υποστηρίζεται και από το εύρημα ότι τα ποσοτικά γνωστικά έργα που δόθηκαν στους μαθητές και τα οποία εξέταζαν σχέσεις αναλογίας, δεν λύνονταν από τη πλειοψηφία των μαθητών 12 και 13 ετών.

### **Σχέσεις μαθηματικών και γνωστικών δεξιοτήτων**

Όπως φάνηκε από τις αναλύσεις, οι μαθηματικές δεξιότητες συσχετίζονται όχι μόνο με το Ποσοτικό ΕΔΟΣ, αλλά και το Ποιοτικό, το Χωρικό και το Προτασιακό ΕΔΟΣ. Το Αιτιολογικό ΕΔΟΣ δεν απαιτείται. Αυτό δείχνει την αλληλεξάρτηση των γνωστικών ικανοτήτων προκειμένου να αντιμετωπιστούν σύνθετα προβλήματα και καταστάσεις. Και η μαθηματική γνώση είναι μια σύνθετη γνώση.

Και το εύρημα αυτό συμφωνεί με τα δεδομένα της DeGuire(1986), η οποία βρήκε ότι ο μαθηματικός παράγοντας είναι ανεξάρτητος από γνωστικούς παράγοντες όπως ο γενικός (επαγωγικός), ο αριθμητικός, ο διαλογιστικός, ο χωρικός και ο λεκτικός. Οι παράγοντες που απομόνωσε η DeGuire, παρά τη σύμπτωση στην ονοματολογία, δεν ταυτίζονται με τα ΕΔΟΣ πλήρως, ούτε αφαιρέθηκαν από έργα όμοια με αυτά που χρησιμοποιήθηκαν σε αυτή την έρευνα. Παρόλα

αυτά, από την περιγραφή των ικανοτήτων που δίνει η DeGuire, θα μπορούσε να πει κανείς ότι ο γενικός παράγοντας αντιστοιχεί στο Ποιοτικό - Αναλυτικό ΕΔΟΣ, ο διαλογιστικός παράγοντας στο Λεκτικό - Προτασιακό ΕΔΟΣ και ο χωρικός στο Εικονικό - Χωροταξικό ΕΔΟΣ. Όλοι οι παράγοντες που απομόνωσε η DeGuire, εκτός του λεκτικού, ο οποίος αφορά κατανόηση λεξιλογίου και γλωσσικού κειμένου, σχετίζονται με το μαθηματικό, όπως ακριβώς και με τα δικά μας δεδομένα. Παρόμοια είναι και τα δεδομένα των Furneaux & Rees (1978) και του Very (1967) και Very & Iacono (1970). Φαίνεται, λοιπόν, ότι η μαθηματική γνώση είναι μια σύνθετη δεξιότητα και για την κατανόηση των επιμέρους εννοιών της το γνωστικό σύστημα επιστρατεύει διάφορες γενικότερες ικανότητες, όπως αυτές που περιγράφονται από τη θεωρία μας. Το συμπέρασμα αυτό φαίνεται να υποστηρίζεται και από τα δεδομένα των Demetriou, Gustafsson, Efklides, & Platsidou (1991), που δείχνουν ότι οι σχολικές επιδόσεις στα διάφορα σχολικά μαθήματα συσχετίζονται με τις επιδόσεις σε διάφορα ΕΔΟΣ και όχι μόνον με αυτό που κωδικοποιεί τις κατεξοχήν διεργασίες που απαιτεί η γνώση του σχετικού πεδίου.

### **Παράγοντες που επηρεάζουν τις μαθηματικές επιδόσεις**

Πέρα όμως από τις επιμέρους ικανότητες που χρησιμοποιούνται για την κατανόηση ενός θεματικού τομέα γνώσης, οι επιδόσεις δεν μπορούν να ερμηνευτούν αν δε ληφθούν υπόψη οι ατομικές διαφορές. Κι αυτό, γιατί οι διάφορες ομάδες του πληθυσμού ή τα άτομα μπορούν να προσεγγίσουν τη θεματική γνώση με διαφορετικούς τρόπους. Οι διαφορές φύλου, για παράδειγμα, στα μαθηματικά εμφανίζονται μόνο σε προβλήματα

που απαιτούν αναλογική σκέψη και όχι στην άλγεβρα ή εφαρμογή αλγορίθμων (Karplus, Pulos, & Stage, 1983. Robitaille & Garden, 1989). Έτσι εξηγείται η διαφορά υπέρ των κοριτσιών στην έρευνα αυτή, μια και τα προβλήματα αφορούν-σαν κυρίως εφαρμογή αλγορίθμων.

Η σημαντική επίδραση της ηλικίας αξίζει επίσης να σχολιαστεί. Η διαφορά υπέρ των 13 χρόνων θα πρέπει να αποδοθεί κυρίως στη διδασκαλία των σχετικών εννοιών στο σχολείο και όχι σε παράγοντες εξελικτικούς. Κι αυτό γιατί οι ικανότητες που πραγματικά βελτιώνονται είναι μόνο οι μεταβιβαστικές και όχι αυτές που συνδέονται με μεγαλύτερη ικανότητα επεξεργασίας, όπως οι κλασματικές - αναλογικές.

Πρέπει επίσης να τονιστεί ότι η βελτίωση είναι συνάρτηση του αρχικού επιπέδου επίτευξης του ατόμου. Στο σημείο αυτό γίνεται κρίσιμη η διαπίστωση των επιδράσεων που ασκεί το ΚΟΙΕ. Έτσι, στους μαθητές χαμηλού ΚΟΙΕ η διδασκαλία απέδωσε πολύ περιορισμένα, γιατί αυτοί βρίσκονταν πολύ χαμηλά τόσο στις αλγοριθμικές ικανότητες όσο και στις άλλες ικανότητες. Η διδασκαλία απέδωσε στο μέσο ΚΟΙΕ και στο υψηλό. Αν λοιπόν σκεφτεί κανείς ότι η μετάβαση από ένα επίπεδο ικανότητας σε ένα ανώτερο προϋποθέτει όχι απλώς δυνατότητα εκτέλεσης ορισμένων ενεργειών αλλά πολύπλευρη θεώρηση των καταστάσεων και συσχετισμό ενεργειών για την επίτευξη ενός αποτελέσματος (Biggs, 1989), τότε είναι φανερό ότι το σχολείο πρέπει να προσφέρει όλες τις δυνατότητες εξάσκησης και εφαρμογής που ένα μη προνομιούχο μορφωτικά περιβάλλον στερείται. Οι τρόποι μέσα από τους οποίους μπορεί να επιτευχθεί ένας παρόμοιος στόχος ξεφεύγουν από τα πλαίσια αυτής της έρευνας.

Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι περαιτέρω έρευνα στις σχέσεις γνωστι-

κών και μαθηματικών ικανοτήτων, όπως και τις ατομικές διαφορές, θα βοηθήσει όχι μόνο στην αποτύπωση των δικτύων των σχέσεων που υπάρχουν μεταξύ των ικανοτήτων, αλλά και στους τρόπους παρέμβασης σε αυτά για τη βελτίωση των επιδόσεων.

## Βιβλιογραφία

- Biggs, J.B. (1989). The modality of learning and forms of competent behaviour. Paper presented at the 3rd Conference of the European Association for Research on Learning and Instruction. Madrid, September.
- Biggs, J.B. & Collis, K.F. (1982). *Evaluating the quality of learning: The SOLO Taxonomy (Structure of the observed learning outcome)*. New York: Academic Press.
- Case, R. (1988). The structure and process of intellectual development. In A. Demetriou (Ed.), *The neo-Piagetian theories of cognitive development: Toward an integration*. (65-101). Amsterdam: North-Holland.
- Chi, M.T.H., Feltovich, P.J., & Glaser, R. (1981). Categorization and representation of physics problems by experts and novices. *Cognitive Science*, 5, 121-152.
- De Corte, E., & Verschaffel, L. (1987). Children's problem solving skills and processes with respect to elementary arithmetic word problems. In E. de Corte, H. Lodewijks, R. Parmentier, & P. Span (Eds.), *Learning and instruction: European research in an international context*. (297-308). Vol. 1. Oxford/Leuven: Pergamon Press/Leuven University Press.
- DeGuire, L. (1986). Reanalyses of factor-analytic studies of mathematical abilities. In S.E. Newstead, S.H. Irvine, & P.L. Dann (Eds.), *Human*

- assessment: Cognition and motivation.* (139-154). Dordrecht: Nijhoff.
- Demetriou, A. & Efklides, A. (1985). Structure and sequence of formal and postformal thought: General patterns and individual differences. *Child Development*, 56, 1062-1091.
- Demetriou, A. & Efklides, A. (1987). Towards a determination of the dimensions and domains of individual differences in cognitive development. In E. de Corte, H. Lodewijks, R. Parmentier, & P. Span (Eds.), *Learning and instruction: European research in an international context.* (41-52). Vol. 1. Oxford/Leuven: Pergamon Press/Leuven University Press.
- Demetriou, A. & Efklides, A. (1988). Experiential Structuralism and neo-Piagetian theories: Toward an integrated model. In A. Demetriou (Ed.), *The neo-Piagetian theories of cognitive development: Toward an integration.* (173-222). Amsterdam: North-Holland.
- Demetriou, A. & Efklides, A. (1989). The person's conception of the structures of developing intellect: Early adolescence to middle age. *Genetic, Social, and General Psychology Monographs*, 115, 371-423.
- Demetriou, A., Gustafsson, J.E., Efklides, A., & Platsidou, M. (1992). Structural systems in developing cognition, science, and education. In A. Demetriou, M. Shayer, & A. Efklides (Eds.), *Modern theories of cognitive development go to school.* London: Routledge.
- Ευκλείδη, Α. (1989). Η συνείδηση υπό το πρίσμα των σύγχρονων ψυχολογικών δεδομένων. *Νέα Παιδεία*, 52, 40-49 και 53, 32-46.
- Efklides, A. & Demetriou, A. (in press) Image of cognitive self, task-knowledge and cognitive performance. In S. McDonald & M.S. Commons (Eds.), *Adult Development: Postformal Stages*, 3. New York: Praeger.
- Fernaux, W. D & Rees, R. (1978). The structure of mathematical ability. *British Journal of Psychology*, 69, 507-512.
- Fischer, K.W. (1980). A theory of cognitive development: The control and construction of hierarchies of skills. *Psychological Review*, 87, 477-531.
- Fischer, K.E. & Pipp, S.L. (1984). Development of the structures of unconscious thought. In K.S. Bowers & D. Meichenbaum (Eds.), *The unconscious reconsidered.* (88-148). New York: Wiley.
- Halford, G.S. (1988). A structure - mapping approach to cognitive development. In A. Demetriou (Ed.), *The neo-Piagetian theories of cognitive development: Toward an integration.* (103-136). Amsterdam: North-Holland.
- Halford, G.S. & Boulton - Lewis, G.M. (1992). Value and limitations of analogs in teaching mathematics. In A. Demetriou, M. Shayer, & A. Efklides, (Eds.), *Modern theories of cognitive development go to school.* London: Routledge.
- Horn, J.L. (1989). Cognitive diversity: A framework of learning. In P.L. Ackerman, R.J. Sternberg, & R. Glaser (Eds.), *Learning and individual differences.* (61-116). New York: Freeman.
- Jurd, M.F. (1978). Concrete and formal operational thinking in history. In J. A. Keats, K.F. Collis, & G.S. Halford, (Eds.), *Cognitive development: Research based on a neo-Piagetian approach.* (285-314). New York:

- Wiley.
- Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E.K. (1983). Proportional reasoning of early adolescents. In Lesh, R. & M. Landau, (Eds.), *Acquisition of Mathematics concepts and processes*. (45-90). Orlando: Academic.
- Pacual-Leone, J. (1988). Organismic processes for neo-Piagetian theories: A dialectical causal account of cognitive development. In A. Demetriou (Ed.), *The neo - Piagetian theories of cognitive development: Toward an integration*. (25-64). Amsterdam: North- Holland.
- Resnick, L. (1983). Mathematics and science learning: A new conception. *Science*, 220, 477-478.
- Robitaille, D.F. & Garden R.A. (Eds.) (1989). *The IEA study of Mathematics II: Contexts and outcomes of school Mathematics*. Oxford: Pergamon.
- Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In T.P. Carpenter, J.M. Moser, & T.A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Very, P.S. (1967). Differential factor structures in mathematical ability. *Genetic Psychology Monographs*, 75, 169-207.
- Very, P.S. & Iacono, C.H. (1970). Differential factor structure of seventh grade students. *The Journal of Genetic Psychology*, 117, 239-251.

### Abstract

The study aimed to investigate the relationship between various cognitive abilities, as they are captured by the Experiential Structuralism, and the school performance in the 7th grade. 351 pupils of the 7th and 8th grade participated in the study. They were drawn from both sexes and the three socio-economical status (SES). The subjects were tested with cognitive tasks, indicative of the various abilities, and mathematical tasks referred to \* numbers and geometrical concepts. The results have shown that the structure of school maths consists of a general factor and some particular factors, addressed to certain abilities. The general mathematical factor is not identical to any cognitive factor. Instead, some of its aspects are correlated to some of the cognitive abilities tested. Considering the individual differences, the effect of age, SES, and sex, in favor of females, was found to be significant.