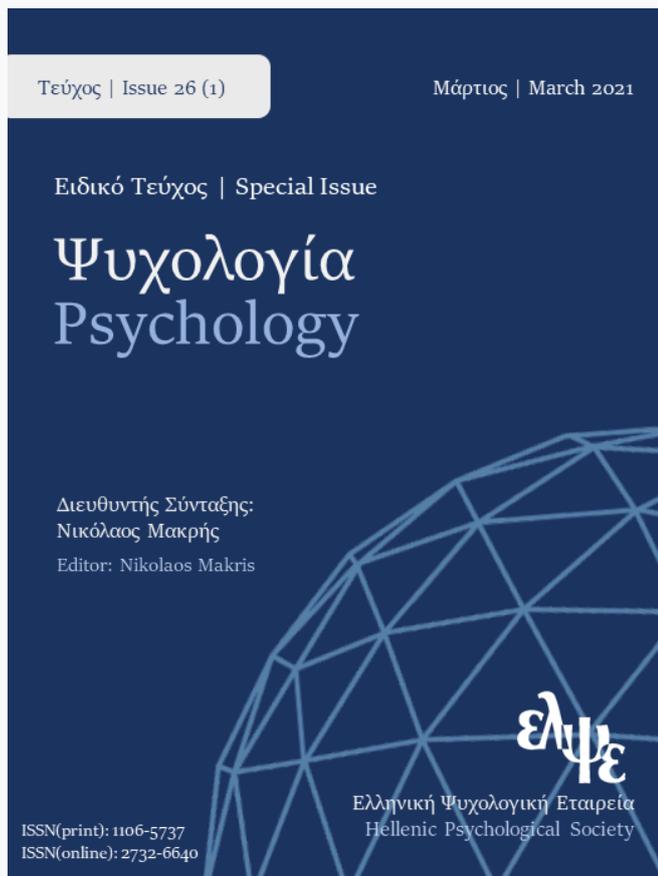


# Psychology: the Journal of the Hellenic Psychological Society

Vol 26, No 1 (2021)

Special Issue: Developmental Psychology. Research, applications and implications



## An investigation of geometric knowledge in pupils with mild educational needs

*Maria Papadam, Ioannis Agaliotis*

doi: [10.12681/psy\\_hps.26234](https://doi.org/10.12681/psy_hps.26234)

Copyright © 2021, Μαρία Παπαδάμ, Ιωάννης Αγαλιώτης



This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/).

### To cite this article:

Papadam, M., & Agaliotis, I. (2021). An investigation of geometric knowledge in pupils with mild educational needs. *Psychology: The Journal of the Hellenic Psychological Society*, 26(1), 135–151. [https://doi.org/10.12681/psy\\_hps.26234](https://doi.org/10.12681/psy_hps.26234)

## ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ | RESEARCH PAPER

# Διερεύνηση γεωμετρικών γνώσεων μαθητών με ήπιες εκπαιδευτικές ανάγκες

Μαρία ΠΑΠΑΔΑΜ<sup>1</sup>, Ιωάννης ΑΓΑΛΙΩΤΗΣ<sup>1</sup><sup>1</sup>Τμήμα Εκπαιδευτικής και Κοινωνικής Πολιτικής, Πανεπιστήμιο Μακεδονίας

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ	ΠΕΡΙΛΗΨΗ
Εικονιστικό και απτικό υλικό Επίπεδα σχήματα Γεωμετρία Ήπιες εκπαιδευτικές ανάγκες Στερεά σώματα	Η Γεωμετρία αποτελεί δομικό στοιχείο των Μαθηματικών με αυξημένες χωρικές και σχεδιαστικές απαιτήσεις, στις οποίες οι μαθητές με Ήπιες Εκπαιδευτικές Ανάγκες (HEA) δυσκολεύονται να ανταποκριθούν. Η συστηματική μελέτη αυτών των δυσκολιών αποτελεί προϋπόθεση της οργάνωσης αποτελεσματικών διδακτικών προγραμμάτων για τους μαθητές με HEA. Ωστόσο, το θέμα δεν έχει ερευνηθεί επαρκώς. Σκοπός της παρούσας έρευνας ήταν η αξιολόγηση των γεωμετρικών γνώσεων 54 μαθητών με HEA (ειδικές μαθησιακές δυσκολίες ή διάσπαση προσοχής), οι οποίοι φοιτούσαν στις δύο τελευταίες τάξεις του δημοτικού σχολείου. Οι συμμετέχοντες κλήθηκαν να διακρίνουν, να περιγράψουν και να ομαδοποιήσουν απτά και εικονιστικά παρουσιασμένα επίπεδα σχήματα και στερεά σώματα. Οι μαθητές αξιολογήθηκαν διαμέσου ημι-δομημένων κλινικών συνεντεύξεων και εργαλείου που στηρίχθηκε στην Αξιολόγηση με Βάση το Αναλυτικό Πρόγραμμα και στο μοντέλο γεωμετρικής σκέψης Van Hiele. Οι συμμετέχοντες και των δύο κατηγοριών ειδικών εκπαιδευτικών αναγκών παρουσίασαν δυσκολίες στη διάκριση σχημάτων και σωμάτων, στη συνεπή χρήση ορολογίας και στη διατύπωση επαγωγικών γεωμετρικών συλλογισμών. Οι συμμετέχοντες με ειδικές μαθησιακές δυσκολίες επεξεργάστηκαν καλύτερα τα απτά σχήματα και σώματα σε σύγκριση με τα εικονιστικά παρουσιασμένα. Οι μαθητές της ΣΤ΄ τάξης παρουσίασαν καλύτερη επίδοση από τους μαθητές της Ε΄ τάξης. Τα αποτελέσματα συζητιούνται ως προς τις διαφορές των δύο κατηγοριών ειδικών αναγκών και την οργάνωση προγραμμάτων παρέμβασης.
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ	
Μαρία Παπαδάμ Στρατηγού Μακρυγιάννη 9 Θεσσαλονίκη 54635, Ελλάδα Email: <a href="mailto:maria.papadam95@gmail.com">maria.papadam95@gmail.com</a>	

Η μάθηση της Γεωμετρίας προσφέρει στους μαθητές ποικίλα οφέλη, στα οποία, εκτός των καθαρά γεωμετρικών γνώσεων, περιλαμβάνονται η ενίσχυση της κριτικής σκέψης, η εμβάθυνση των λογικών συλλογισμών και η βελτίωση της οπτικοχωρικής αντίληψης (Clements & Sarama, 2011). Διεργασίες οπτικοποίησης (δημιουργία οπτικών αναπαραστάσεων), διεργασίες κατασκευής (κατασκευή σχημάτων με χρήση γεωμετρικών οργάνων) και διεργασίες συλλογισμού (λεκτικές δράσεις για επέκταση γνώσης) αποτελούν σημαντικά δομικά στοιχεία της διαδικασίας ανάπτυξης των γεωμετρικών γνώσεων (Dunval, 1998. Gal & Linchevski, 2010). Σύμφωνα με τους Mammarella et al. (2017), η αποτελεσματική λειτουργία αυτών των διεργασιών εξαρτάται από ποικίλες γνωστικές ικανότητες (π.χ. οπτικοχωρική και φωνολογική αντίληψη και μνήμη) και εκτελεστικές λειτουργίες (π.χ. επικαιροποίηση γνώσεων).

Για την κατανόηση των διαδικασιών ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης έχουν προταθεί διάφορα θεωρητικά μοντέλα. Σημαντική θέση μεταξύ αυτών έχει ασφαλώς το μοντέλο των Pierre και Dina Van Hiele (Fuys, 1985), καθώς έχει χρησιμοποιηθεί ως βάση και πλαίσιο μελέτης της γεωμετρικής σκέψης από πολλούς ερευνητές (π.χ. Battista, 2011. Clements, 2003. Wheatley, 2011). Το μοντέλο περιγράφει πέντε επίπεδα σκέψης από τα οποία διέρχονται οι μαθητές καθώς προχωρούν από την απλή αναγνώριση σχημάτων στην ικανότητα σύνθεσης μιας τυπικής γεωμετρικής απόδειξης. Τα χαρακτηριστικά κάθε επιπέδου σκέψης εμφανίζονται στον Πίνακα 1. Σημειώνεται ότι διάφοροι ερευνητές έχουν κατά καιρούς προτείνει βελτιώσεις του μοντέλου Van Hiele (π.χ. οι Clements et al., 1999 πρότειναν την προσθήκη ενός επιπέδου 0, στο οποίο θα θεωρείται ότι ανήκουν περιπτώσεις ελάχιστης γεωμετρικής σκέψης), ωστόσο το μοντέλο εξακολουθεί να χρησιμοποιείται σε πληθώρα σχετικών ερευνών στην πρότυπη μορφή του (π.χ. Hock et al., 2015. Ramlan, 2016. Wang & Kinzel, 2014). Επισημαίνεται ακόμη ότι τα επίπεδα ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης δεν αντιστοιχούν ακριβώς σε ηλικίες ή τάξεις φοίτησης, καθώς τα χαρακτηριστικά της γεωμετρικής σκέψης κάθε μαθητή δεν είναι μόνο ζήτημα ωρίμανσης αλλά αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης μεταξύ γνωστικών ικανοτήτων και παρεχόμενης διδασκαλίας (Van de Walle, 2005).

### Πίνακας 1

*Επίπεδα γεωμετρικής σκέψης κατά Van Hiele*

Επίπεδα	Χαρακτηριστικά Σκέψης
Επίπεδο 1	Ολιστική (κατ' αίσθηση) αναγνώριση σχημάτων και σωμάτων, αδυναμία προσδιορισμού γεωμετρικών ιδιοτήτων σχημάτων και σωμάτων, φτωχό γεωμετρικό λεξιλόγιο (π.χ. δυνατότητα διάκρισης τετραγώνου από άλλα σχήματα αλλά αδυναμία αναφοράς των ιδιοτήτων του)
Επίπεδο 2	Ανάλυση ιδιοτήτων γεωμετρικών στοιχείων, αξιοποίηση ορολογίας, έλλειψη επαγωγικής σκέψης (π.χ. αδυναμία αντίληψης του σχήματος της πλευράς κύβου)
Επίπεδο 3	Διατύπωση άτυπων συμπερασμάτων, επιμέρους επαγωγικοί συλλογισμοί, ομαδοποιήσεις σχημάτων και σωμάτων με γεωμετρικά κριτήρια (π.χ. κάθε τετράγωνο θεωρείται ορθογώνιο)
Επίπεδο 4	Διατύπωση τυπικών συμπερασμάτων, αξιοποίηση ορισμών, πλήρης ανάπτυξη επαγωγικής σκέψης (π.χ. χρησιμοποίηση γνωστών μερών-διαστάσεων σχημάτων και σωμάτων για εύρεση αγνώστων)
Επίπεδο 5	Πραγματοποίηση αυστηρών συγκρίσεων και αποδείξεων βάσει ανώτερων αξιωματικών συστημάτων (π.χ. επιβεβαίωση θεωρημάτων, χρήση αξιωμάτων)

Επιπλέον, η γεωμετρική ανάπτυξη κάθε άλλο παρά γραμμική και αυτόματη είναι, αφού έχει τεκμηριωθεί ερευνητικά ότι μαθητές που βρίσκονται στο τέλος της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης μπορεί να παρουσιάζουν χαρακτηριστικά λειτουργίας του πρώτου επιπέδου γεωμετρικής σκέψης ή αποσπασματικές γνώσεις που ανήκουν σε διαφορετικά επίπεδα, αλλά πάντως δεν βρίσκονται στο τρίτο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης όπως συχνά υποθέτουν οι συντάκτες των Αναλυτικών Προγραμμάτων (Wu & Ma, 2006). Φυσικά, η κατάκτηση γεωμετρικών γνώσεων δυσχεραίνεται σημαντικά όταν οι μαθητές παρουσιάζουν περιορισμούς στη γνωστική λειτουργία και ιδιαιτερότητες στην επεξεργασία πληροφοριών, όπως συμβαίνει με τους μαθητές με Ειδικές Μαθησιακές Δυσκολίες (ΕΜΔ) και τους μαθητές με Διαταραχή Ελλειμματικής Προσοχής – Υπερκινητικότητα (ΔΕΠ-Υ) (Aquiari et al., 2010. Cawley et al., 2009). Ορισμένα από τα χαρακτηριστικά της ομάδας των ΕΜΔ που επηρεάζουν αρνητικά τη γεωμετρική πρόοδο είναι τα εξής: δυσκολίες στην αναγνώριση αντιληπτικών μορφών, αδυναμίες στη διάκριση μορφής-πλασίου, ανεπάρκειες στην οπτικοχωρική μνήμη, δυσκολίες στις νοητικές αναπαραστάσεις σχημάτων, προβλήματα στον χωροχρονικό προσανατολισμό, αδυναμίες στη λογική οργάνωση πληροφοριών, προβλήματα με τις επιτελικές λειτουργίες και δυσκολίες με τη χρήση ορολογίας (Geary & Hoard,

2005. Montague, 2008). Αντίστοιχα, οι μαθητές με ΔΕΠ-Υ παρουσιάζουν συχνά αδυναμίες στην οπτικοχωρική μνήμη, δυσκολίες στη διάκριση ομοιοτήτων και διαφορών αντιληπτικών μορφών, προβλήματα με τις επιτελικές λειτουργίες, δύσκαμπτες τεχνικές διαχείρισης μαθηματικών έργων και αδυναμίες στη λογική οργάνωση των πληροφοριών (Edmond et al., 2008).

Ο αριθμός των ερευνών που αναφέρονται διεθνώς στις γεωμετρικές γνώσεις των μαθητών με ΕΜΔ και των μαθητών με ΔΕΠ-Υ είναι περιορισμένος. Από τις λίγες σχετικές έρευνες φαίνεται να προκύπτει ότι η χρήση απτικών ή ενισχυμένων εικονιστικών αναπαραστάσεων βελτιώνει τη γεωμετρική σκέψη (Siew & Abdullah, 2013. Yang & Chen, 2010). Για παράδειγμα, η χρήση Τάγκραμ για τη διδασκαλία γεωμετρικών σχημάτων έχει επιφέρει θετικά αποτελέσματα σε μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης με διάφορες δυσκολίες μάθησης (Siew et al., 2013). Επίσης, διδακτική παρέμβαση που στηρίχτηκε στη χρήση απτικών αναπαραστάσεων απέδωσε θετικά αποτελέσματα στην περίπτωση μαθητών με ΕΜΔ και μαθητών με ΔΕΠ-Υ των δύο τελευταίων τάξεων της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (Zhang et al., 2014). Γενικά, επομένως, η χρήση απτικού υλικού θεωρείται ότι βελτιώνει και υποβοηθά την απόκτηση γεωμετρικών γνώσεων (π.χ. οπτικοποίηση σχημάτων) και την ανάπτυξη λειτουργικών αναπαραστάσεων για τα σχήματα και τα σώματα στην περίπτωση μαθητών με ΕΜΔ (Cass et al., 2003. Grobecker & De Lisi, 2000). Ως προς τους μαθητές με ΔΕΠ-Υ, από την άλλη, σε έρευνα των Kang και Zentall (2011) αποδείχτηκε ότι η χρήση ενισχυμένης εικονιστικής αναπαραστάσης (π.χ. προσθήκη σκιάς στο βάθος) μπορεί να βελτιώσει τη γεωμετρική επίδοση. Παρά τις προαναφερθείσες έρευνες, ωστόσο, από πολλές πλευρές τονίζεται η ανάγκη ενίσχυσης των διαθέσιμων στοιχείων για τις γεωμετρικές δεξιότητες μαθητών με ΕΜΔ και μαθητών με ΔΕΠ-Υ όπως και για τους πιθανούς τρόπους βελτίωσης της διδασκαλίας τους (π.χ. Bergstrom & Zhang, 2016).

Στην Ελλάδα τα παραπάνω θέματα έχουν μελετηθεί ελάχιστα. Μια σχετική αναφορά είναι αυτή των Αγαλιώτη et al. (2011), από την οποία προκύπτει ότι μαθητές δημοτικού σχολείου με ΕΜΔ αντιμετωπίζουν προβλήματα με την αναγνώριση γεωμετρικών σχημάτων (ιδιαίτερα όσων δεν εμφανίζουν πρωτοτυπική μορφή), με την ορολογία, με τη χρήση γεωμετρικών οργάνων, με την εφαρμογή των τύπων και με τη διατύπωση συλλογισμών, παρουσιάζοντας γενικά μια εικόνα που τους κατατάσσει στο πρώτο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης κατά Van Hiele. Δεν εντοπίστηκαν ελληνικές έρευνες αναφορικά με τη γεωμετρική σκέψη μαθητών με ΔΕΠ-Υ.

Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα παραπάνω, αποφασίστηκε η διενέργεια της παρούσας έρευνας με στόχο να δοθούν έγκυρες απαντήσεις στα παρακάτω ερευνητικά ερωτήματα:

1. Σε ποιον βαθμό μαθητές με ΕΜΔ ή με ΔΕΠ-Υ των δύο τελευταίων τάξεων του ελληνικού δημοτικού σχολείου αναγνωρίζουν τα επίπεδα σχήματα και τα στερεά σώματα και σε ποιο επίπεδο κατά Van Hiele αντιστοιχεί η σκέψη τους;
2. Σε ποιον βαθμό διαφοροποιείται η επίδοση μαθητών με ΕΜΔ και μαθητών με ΔΕΠ-Υ στην αναγνώριση επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων και στερεών σωμάτων ως αποτέλεσμα της χειραπτικής ή, εναλλακτικά, της εικονιστικής παρουσίασης των δοκιμασιών;
3. Σε ποιον βαθμό η επίδοση μαθητών με ΕΜΔ ή με ΔΕΠ-Υ στην αναγνώριση επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων και στερεών σωμάτων διαφοροποιείται ανάλογα με την εκπαιδευτική ανάγκη των μαθητών;
4. Σε ποιον βαθμό η επίδοση μαθητών με ΕΜΔ ή με ΔΕΠ-Υ στην αναγνώριση επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων και στερεών σωμάτων διαφοροποιείται ανάλογα με την τάξη φοίτησης των μαθητών;

## Μεθοδολογία

### Μέθοδος

Η ερευνητική στρατηγική που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα μελέτη ήταν η περιγραφική, η οποία είναι κατάλληλη για έρευνες που γίνονται σε σχετικά αδιερεύνητες περιοχές γνώσης με κύριο στόχο την περιγραφή των ειδικών χαρακτηριστικών μιας συγκεκριμένης συνθήκης (Cohen et al., 2008). Εν προκειμένω, η συστηματική καταγραφή των δυσκολιών των μαθητών με ΕΜΔ και των μαθητών με ΔΕΠ-Υ στη Γεωμετρία είναι απαραίτητη

προϋπόθεση για την υλοποίηση αποτελεσματικών προγραμμάτων παρέμβασης. Η σύγκριση των δυσκολιών τους μπορεί να αποδώσει πολύτιμες πληροφορίες για την έκταση στην οποία απαιτείται διαφοροποίηση των προγραμμάτων, δεδομένου ότι μαθητές που ανήκουν σε αυτές τις δύο ομάδες ειδικών αναγκών συχνά συνεκπαιδεύονται.

### **Συμμετέχοντες**

Οι συμμετέχοντες της έρευνας ήταν 32 μαθητές με ΕΜΔ και 22 μαθητές με ΔΕΠ-Υ, οι οποίοι προέρχονταν από γενικά 8/θέσια έως 12/θέσια σχολεία από τα πολεοδομικά συγκροτήματα της Θεσσαλονίκης και του Βόλου. Επισημαίνεται ότι για την εξασφάλιση πρόσβασης στα στοιχεία των συμμετεχόντων δόθηκε άδεια τόσο από το εκάστοτε σχολείο όσο και από τους γονείς και κηδεμόνες των παιδιών. Οι συμμετέχοντες δέχονταν υποστήριξη από τα Τμήματα Ένταξης του σχολείου τους, ενώ οι περισσότεροι από αυτούς παρουσίαζαν παρόμοιες μεταξύ τους δυσκολίες στην ανάπτυξη δεξιοτήτων ανάγνωσης, γραφής και αριθμητικής. Η αναγνώριση των ειδικών αναγκών τους είχε γίνει από αρμόδιους κρατικούς φορείς (ΚΕΣΥ). Τα στοιχεία των συμμετεχόντων παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.

### **Πίνακας 2**

*Στοιχεία του δείγματος*

Φύλο Συμμετεχόντων Μαθητών	ΔΕΠ-Υ		ΕΜΔ	
	Ε' τάξη	ΣΤ' τάξη	Ε' τάξη	ΣΤ' τάξη
Αγόρια	6	9	13	7
Κορίτσια	2	5	8	4
Σύνολο	8	14	21	11

### **Εργαλείο και διαδικασία συλλογής δεδομένων**

Τα δεδομένα συλλέχθηκαν διαμέσου ημι-δομημένων κλινικών συνεντεύξεων διάρκειας 15 λεπτών, οι οποίες πραγματοποιήθηκαν από τους ερευνητές. Οι συνεντεύξεις βασίστηκαν σε αυτοσχέδιο εργαλείο το οποίο από άποψη ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης ακολουθούσε τις προβλέψεις του μοντέλου Van Hiele και από άποψη τεχνικών εκπαιδευτικής αξιολόγησης ακολουθούσε τη μέθοδο της Αξιολόγησης βάσει του Αναλυτικού Προγράμματος και την τεχνική των «Παραδειγμάτων και Αντιπαραδειγμάτων» (Αγαλιώτης, 2012. Galletta, 2013. Maier & Benz, 2013). Υπογραμμίζεται ότι η έρευνα απέβλεπε στη συγκέντρωση στοιχείων για τον προσδιορισμό της έκτασης στην οποία είναι ίσως αναγκαία η διαφοροποίηση της διδασκαλίας των δύο ομάδων ειδικών εκπαιδευτικών αναγκών και για τον λόγο αυτόν κρίθηκε ότι δεν απαιτείται σύγκριση των ομάδων με μαθητές τυπικής ανάπτυξης. Βασικά στοιχεία της διαδικασίας αξιολόγησης ήταν (α) η αξιοποίηση δοκιμασιών στις οποίες γινόταν χρήση τόσο απτικού όσο και εικονιστικού υλικού, για να διαπιστωθεί αν ο τρόπος παρουσίασης επηρεάζει την ορθότητα της απάντησης, και (β) η παρότρυνση των μαθητών να προχωρήσουν σε αιτιολόγηση των επιλογών τους με χρήση ορολογίας αντί να περιοριστούν σε απλή υπόδειξη του ορθού, για να επιβεβαιωθεί η γνώση σε αντιδιαστολή με την τυχαία επιλογή.

Το αυτοσχέδιο εργαλείο είχε τέσσερα μέρη. Το πρώτο μέρος αφορούσε τη διάκριση και την ονομασία 20 απτικά παρουσιασμένων σχημάτων εν μέσω απτών αντιπαραδειγμάτων (για κάθε είδος σχήματος υπήρχαν 2 σχετικά αντιπαραδείγματα και 3 παραδείγματα), το δεύτερο τη διάκριση και την ονομασία 20 εικονιστικά παρουσιασμένων σχημάτων εν μέσω εικονιστικών αντιπαραδειγμάτων (2 αντιπαραδείγματα για κάθε σχήμα και 3 παραδείγματα), το τρίτο την ομαδοποίηση 20 απτών στερεών σωμάτων (κύβων, παραλληλεπίπεδων, πυραμίδων και σφαιρών διαφόρων μεγεθών και χρωμάτων) με γεωμετρικά κριτήρια (π.χ. κύβοι σε μία ομάδα, πυραμίδες σε μία δεύτερη κ.ο.κ.) και το τέταρτο μέρος την ομαδοποίηση 20 εικονιστικά παρουσιασμένων σωμάτων. Σε όλες τις δραστηριότητες ζητήθηκε από τους μαθητές να αιτιολογήσουν τις επιλογές τους (π.χ. «Γιατί αυτό είναι τρίγωνο;», «Γιατί αυτά τα στερεά σώματα τα τοποθέτησες σε μία ομάδα; Τι κοινό έχουν μεταξύ

τους;»). Η βαθμολόγηση των απαντήσεων έγινε ως εξής: (α) σωστή απάντηση + σωστή αιτιολόγηση = 2 βαθμοί, (β) σωστή απάντηση χωρίς κατάλληλη αιτιολόγηση = 1 βαθμός, (γ) λανθασμένη απάντηση = 0. Η μέγιστη δυνατή βαθμολογία στις δοκιμασίες που αφορούσαν τα επίπεδα σχήματα ήταν το 40, ενώ στις αντίστοιχες που αφορούσαν τα στερεά σώματα ήταν το 8 (2 βαθμοί επί 4 ομάδες).

## Αποτελέσματα

Η παράθεση των αποτελεσμάτων της παρούσας έρευνας ξεκινά με τα ευρήματα που δίνουν απαντήσεις στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα, προσφέροντας έτσι σημαντικές πληροφορίες σχετικά με τον βαθμό στον οποίο αντιλαμβάνονται επίπεδα σχήματα και στερεά σώματα οι μαθητές με ΕΜΔ και ΔΕΠ-Υ αλλά και το επίπεδο Van Hiele στο οποίο αντιστοιχεί η σκέψη τους. Ξεκινώντας ουσιαστικά από την περιγραφική στατιστική της έρευνας, παρουσιάζουμε παρακάτω την κατανομή των απαντήσεων των μαθητών στη δοκιμασία που αφορούσε την αναγνώριση απτών σχημάτων εν μέσω αντιπαραδειγμάτων (Πίνακας 3) αλλά και τις συχνότητες των σωστών και λανθασμένων απαντήσεων για το σύνολο των παραδειγμάτων και των αντιπαραδειγμάτων των εικονιστικά παρουσιασμένων σχημάτων (Πίνακας 5). Από τα στοιχεία του Πίνακα 3 αξίζει να σημειωθεί ότι μόνο το 31,4% των συμμετεχόντων με ΕΜΔ και το 32,3% των μαθητών με ΔΕΠ-Υ ήταν σε θέση να πραγματοποιήσει σωστή αναγνώριση και γεωμετρικά τεκμηριωμένη αιτιολόγηση τουλάχιστον ενός εκ των τεσσάρων απτικά παρουσιασμένων γεωμετρικών σχημάτων. Επίσης, προκύπτει ότι το 28% των συμμετεχόντων με ΕΜΔ και το 22,9% των συμμετεχόντων με ΔΕΠ-Υ έδωσε λανθασμένες απαντήσεις ή δεν μπόρεσε να δώσει καμιά απάντηση. Οι προαναφερθείσες πληροφορίες φανερώνουν ότι το επίπεδο σκέψης των περισσότερων μαθητών προσιδιάζει στο πρώτο επίπεδο κατά Van Hiele για τα τέσσερα βασικά γεωμετρικά σχήματα.

### Πίνακας 3

*Επιδόσεις ΕΜΔ και ΔΕΠ-Υ αναφορικά με την αναγνώριση απτών σχημάτων και την αιτιολόγηση των επιλογών τους*

Είδος Απάντησης	ΕΜΔ	ΔΕΠ-Υ
Σωστή και γεωμετρικά αιτιολογημένη απάντηση για 3 ή 4 σχήματα	3 (9,2%)	1 (4,5%)
Σωστή και γεωμετρικά αιτιολογημένη απάντηση για 1 ή 2 σχήματα	7 (22%)	6 (27,3%)
Σωστή απάντηση αλλά χωρίς γεωμετρική αιτιολόγηση για 3 ή 4 σχήματα	8 (25%)	7 (31,8%)
Σωστή απάντηση αλλά χωρίς γεωμετρική αιτιολόγηση για 1 ή 2 σχήματα	5 (15,6%)	2 (9%)
Λανθασμένη απάντηση για 1 ή 2 σχήματα	2 (6,2%)	2 (9%)
Λανθασμένη απάντηση για 3 ή 4 σχήματα	7 (22%)	4 (18,1%)

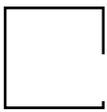
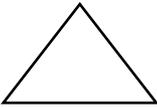
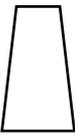
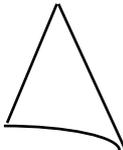
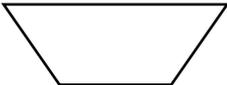
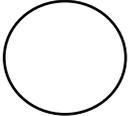
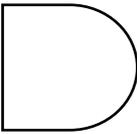
Παράλληλα, προκειμένου να δοθούν περισσότερες πληροφορίες για τα χαρακτηριστικά της γεωμετρικής σκέψης των συμμετεχόντων σχετικά με τα επίπεδα σχήματα, στον Πίνακα 4 παρουσιάζονται τα συνηθέστερα αντιπαραδείγματα των απτικά παρουσιασμένων σχημάτων που προκάλεσαν τη μεγαλύτερη σύγχυση στους μαθητές και των δύο ομάδων, ενώ στον Πίνακα 6 εμφανίζονται οι αιτιολογήσεις που δόθηκαν από μαθητές που έδωσαν σωστή ονομασία αλλά γεωμετρικά ακατάλληλη επιχειρηματολογία για τα εικονιστικά παρουσιασμένα σχήματα.

Έχοντας παραθέσει περιγραφικά στατιστικά στοιχεία της έρευνας σχετικά με τις επιδόσεις των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες που αφορούσαν τα επίπεδα σχήματα, στη συνέχεια παρουσιάζουμε τις αντίστοιχες πληροφορίες για τις επιδόσεις των παραπάνω μαθητών στις δοκιμασίες που αφορούσαν τόσο τα απτικά όσο και τα εικονιστικά παρουσιασμένα στερεά σώματα. Συγκεκριμένα, στον Πίνακα 7 εμφανίζεται η κατανομή των σωστών και λανθασμένων επιλύσεων στην ομαδοποίηση των απτικά παρουσιασμένων σωμάτων. Τονίζεται ότι στις ομαδοποιήσεις των απτών γεωμετρικών σωμάτων 5 μαθητές με ΕΜΔ (15,6%) κατέταξαν τις πυραμίδες, τα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα, τις σφαίρες και τους κύβους σε δύο ομάδες στερεών σωμάτων, εκ

των οποίων η πρώτη περιελάμβανε σώματα με ακμές και κορυφές και η δεύτερη περιελάμβανε μόνο τις σφαίρες. Παράλληλα, στον Πίνακα 8 παρουσιάζεται η κατανομή των σωστών και λανθασμένων επιλύσεων των συμμετεχόντων κατά την ομαδοποίηση των εικονιστικά παρουσιασμένων σωμάτων. Σχετικά με τις ομαδοποιήσεις που αφορούσαν εικονιστικά παρουσιασμένα σώματα αξίζει να επισημανθούν οι εξής συμπεριφορές: από τους 14 μαθητές με ΕΜΔ που έκαναν ελλειπείς κατηγοριοποιήσεις οι 11 (80%) ονόμασαν τα στερεά σώματα αξιοποιώντας ορολογία σχημάτων (βλ. Πίνακα 12), ενώ οι υπόλοιποι 3 μαθητές με ΕΜΔ (9,4%) δημιούργησαν κοινές ομάδες για τα σώματα που μοιράζονται ιδιότητες, δηλαδή δημιούργησαν μία ομάδα με τους κύβους και τα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα, μία δεύτερη ομάδα με τις πυραμίδες και μία τρίτη με τις σφαίρες. Τέλος, 5 μαθητές της ομάδας των μαθητών με ΔΕΠ-Υ (22,7%) πραγματοποίησαν ομαδοποιήσεις οι οποίες αναφέρονταν σε κατηγοριοποίηση βασισμένη στο χρώμα των σωμάτων και όχι στο γεωμετρικό είδος τους. Όλες οι παραπάνω πληροφορίες σε συνάρτηση με τα όσα παρουσιάζουν οι παρακάτω πίνακες συνιστούν στοιχεία τα οποία αναδεικνύουν, αναλόγως με την περίπτωση των επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων, ότι το επίπεδο σκέψης των περισσότερων συμμετεχόντων μαθητών προσιδιάζει και για την περίπτωση των στερεών σωμάτων στο πρώτο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης κατά Van Hiele.

#### Πίνακας 4

Αντιπαραδείγματα με τις περισσότερες λανθασμένες απαντήσεις

Γεωμετρικό Σχήμα	Αντιπαραδείγματα
	  
	  
	 
	  

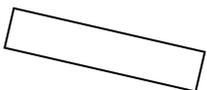
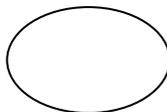
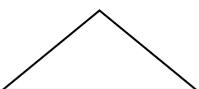
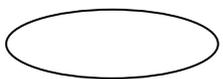
#### Πίνακας 5

Επιδόσεις ΕΜΔ και ΔΕΠ-Υ αναφορικά με την αναγνώριση εικονιστικά παρουσιασμένων σχημάτων και την αιτιολόγηση των επιλογών τους

Είδος Απάντησης	ΕΜΔ	ΔΕΠ-Υ
Σωστή και γεωμετρικά αιτιολογημένη απάντηση για 3 ή 4 σχήματα	Κανένας μαθητής	1 (4,5%)
Σωστή και γεωμετρικά αιτιολογημένη απάντηση για 1 ή 2 σχήματα	2 (6,2%)	5 (22,8%)
Σωστή απάντηση αλλά χωρίς γεωμετρική αιτιολόγηση για 3 ή 4 σχήματα	8 (25%)	5 (22,8%)
Σωστή απάντηση αλλά χωρίς γεωμετρική αιτιολόγηση για 1 ή 2 σχήματα	5 (15,6%)	2 (9%)
Λανθασμένη απάντηση για 1 ή 2 σχήματα	8 (25%)	4 (18,1%)
Λανθασμένη απάντηση για 3 ή 4 σχήματα	9 (28,1%)	5 (22,8%)

**Πίνακας 6**

Ενδεικτικές μη γεωμετρικά τεκμηριωμένες απαντήσεις

Γεωμετρικά Σχήματα και Αντιπαραδείγματα	Επιχειρηματολογία Μη Γεωμετρικά Τεκμηριωμένων Απαντήσεων
	«Είναι τετράγωνο γιατί είναι σαν κύβος»
	«Είναι στραβό για ορθογώνιο»
	«Είναι κύκλος γιατί είναι στρόγγυλο»
	«Είναι πολύ μυτερό για τρίγωνο»
	«Δεν είναι τρίγωνο, μοιάζει με σαΐτα»
	«Είναι τρίγωνο, έχει τρεις γωνίες αλλά δεν μπορώ να τις δείξω»
	«Δεν είναι κύκλος, θυμίζει αβγό»

**Πίνακας 7**

Επιδόσεις μαθητών στις ομαδοποιήσεις απτών σωμάτων

Ομαδοποιήσεις	ΕΜΔ	ΔΕΠ-Υ
Σωστές ομαδοποιήσεις σε 1 ή 2 είδη απτών στερεών σωμάτων	10 (31,2%)	9 (41%)
Σωστές ομαδοποιήσεις σε 3 ή 4 είδη απτών στερεών σωμάτων	4 (12,5%)	7 (31,8%)
Λανθασμένες ομαδοποιήσεις σε 1 ή 2 είδη απτών στερεών σωμάτων	9 (28,1%)	3 (13,6%)
Λανθασμένες ομαδοποιήσεις σε 3 ή 4 είδη απτών στερεών σωμάτων	7 (21,9%)	Κανένας μαθητής
Λανθασμένες ομαδοποιήσεις σε όλα τα σώματα ή ομαδοποιήσεις βάσει χρώματος	2 (6,2%)	3 (13,6%)

Επιπρόσθετα, προκειμένου να παρασχεθούν περισσότερα στοιχεία αναφορικά με το επίπεδο σκέψης των συμμετεχόντων μαθητών όσον αφορά τα βασικά στερεά σώματα, στον Πίνακα 9 παρουσιάζονται οι συνηθέστερες λεκτικές αναφορές που δόθηκαν από τις δύο ομάδες μαθητών όταν ζητήθηκε να ονομάσουν τις ομάδες απτών στερεών σωμάτων που δημιούργησαν. Αντίστοιχα, στον Πίνακα 10 δίνονται οι συνηθέστερες ονομασίες που παρουσιάστηκαν στις ομάδες των εικονιστικά παρουσιασμένων σωμάτων όταν οι συμμετέχοντες ερωτήθηκαν σχετικά. Εύκολα παρατηρείται ότι στην πρώτη περίπτωση οι ονομασίες παραπέμπουν σε καθημερινά

αντικείμενα, ενώ στη δεύτερη σε ορολογία επίπεδων σχημάτων, γεγονός το οποίο συνιστά ένδειξη τοποθέτησης της γεωμετρικής σκέψης των συμμετεχόντων στο πρώτο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης κατά Van Hiele.

### Πίνακας 8

*Επιδόσεις μαθητών στις ομαδοποιήσεις εικονιστικά παρουσιασμένων σωμάτων*

Ομαδοποιήσεις	ΕΜΔ	ΔΕΠ-Υ
Σωστές ομαδοποιήσεις σε 1 ή 2 είδη εικονιστικά παρουσιασμένων στερεών σωμάτων	9 (28,1%)	11 (50%)
Σωστές ομαδοποιήσεις σε 3 ή 4 είδη εικονιστικά παρουσιασμένων στερεών σωμάτων	7 (21,9%)	3 (13,6%)
Λανθασμένες ομαδοποιήσεις σε 1 ή 2 είδη εικονιστικά παρουσιασμένων στερεών σωμάτων	8 (25%)	1 (4,5%)
Λανθασμένες ομαδοποιήσεις σε 3 ή 4 είδη εικονιστικά παρουσιασμένων στερεών σωμάτων	6 (18,8%)	2 (9%)
Λανθασμένες ομαδοποιήσεις σε όλα τα σώματα ή ομαδοποιήσεις βάσει χρώματος	2 (6,2%)	5 (22,7%)

### Πίνακας 9

*Ονομασίες απτών σωμάτων*

Στερεά Σώματα	Ονομασία
Κύβοι	«Κουτιά»
Ορθογώνια παραλληλεπίπεδα	«Μακρόστενα κουτιά»
Πυραμίδες	«Σκεπές»
Σφαίρες	«Μπάλες»

### Πίνακας 10

*Ονομασίες εικονιστικά παρουσιασμένων σωμάτων*

Στερεά Σώματα	Ονομασία
Κύβοι	«Τετράγωνα, κουτιά»
Ορθογώνια παραλληλεπίπεδα	«Ορθογώνια»
Πυραμίδες	«Τρίγωνα»
Σφαίρες	«Στρόγγυλα», «Κύκλοι»

Στη συνέχεια, προκειμένου να απαντηθεί τόσο το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα (βαθμός διαφοροποίησης της επίδοσης μαθητών με ΕΜΔ και μαθητών με ΔΕΠ-Υ στην αναγνώριση επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων και στερεών σωμάτων ως αποτέλεσμα της χειραπτικής ή, εναλλακτικά, της εικονιστικής παρουσίασης των δοκιμασιών) όσο και το τρίτο (βαθμός διαφοροποίησης της επίδοσης μαθητών με ΕΜΔ ή με ΔΕΠ-Υ στην αναγνώριση επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων και στερεών σωμάτων ανάλογα με την εκπαιδευτική ανάγκη των μαθητών), παρατίθεται ο Πίνακας 11, στον οποίο παρουσιάζεται ο μέσος όρος και η τυπική απόκλιση της επίδοσης των δύο ομάδων συμμετεχόντων στις δοκιμασίες αναγνώρισης απτικά και εικονιστικά παρουσιασμένων σχημάτων, αλλά και ο Πίνακας 12, στον οποίο εμφανίζεται ο μέσος όρος και η τυπική απόκλιση της επίδοσης στις δοκιμασίες ομαδοποίησης απτικά και εικονιστικά παρουσιασμένων στερεών σωμάτων.

Μέσα από τους Πίνακες 11 και 12 καταδεικνύεται ότι σε γενικότερες γραμμές τόσο στην περίπτωση των επίπεδων σχημάτων όσο και στην περίπτωση των στερεών σωμάτων ο μέσος όρος επίδοσης των συμμετεχόντων ήταν πολύ καλύτερος στην περίπτωση των απτών έναντι των εικονιστικών παρουσιάσεων. Ωστόσο, για να

απαντηθεί επαρκώς το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, θεωρήθηκε ότι ήταν απαραίτητη η αξιοποίηση επαγωγικού ελέγχου. Συγκεκριμένα, σύμφωνα με τα αποτελέσματα του μη παραμετρικού ελέγχου Wilcoxon, ο οποίος χρησιμοποιήθηκε προκειμένου να γίνει σύγκριση των επιδόσεων των δύο ομάδων μαθητών χωριστά για κάθε τρόπο αναπαράστασης των επίπεδων σχημάτων (τρισδιάστατη και εικονιστική παρουσίαση), οι μαθητές με ΕΜΔ εμφάνισαν στην απτική αναπαράσταση (τρισδιάστατη) σημαντικά καλύτερη επίδοση σε σχέση με την επίδοση που παρουσίασαν στην αντίστοιχη δραστηριότητα με εικονιστική αναπαράσταση ( $z = -2,003, p = 0,045, r = 0,033$ ). Κάτι τέτοιο, ωστόσο, δεν εντοπίστηκε στους μαθητές με ΔΕΠ-Υ, αφού η επίδοσή τους στη δοκιμασία των σχημάτων που παρουσιάστηκαν τρισδιάστατα δεν διέφερε στατιστικώς σημαντικά από την αντίστοιχη επίδοση στη δοκιμασία όπου τα σχήματα παρουσιάστηκαν εικονιστικά ( $z = -0,712, p = 0,477, r = 0,12$ ).

### Πίνακας 11

Μέσος όρος και τυπική απόκλιση επίδοσης μαθητών στις δοκιμασίες αναγνώρισης απτικά και εικονιστικά παρουσιασμένων σχημάτων ως προς την κατηγορία της εκπαιδευτικής ανάγκης

Κατηγορία Εκπαιδευτικής Ανάγκης	Επίδοση σε Απτικά Παρουσιασμένα Σχήματα		Επίδοση σε Εικονιστικά Παρουσιασμένα Σχήματα	
	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση
ΕΜΔ	16,92	2,46	15,65	4,21
ΔΕΠ-Υ	17,11	2,84	17,56	1,35

### Πίνακας 12

Μέσος όρος και τυπική απόκλιση επίδοσης μαθητών στις δοκιμασίες ομαδοποίησης απτικά και εικονιστικά παρουσιασμένων στερεών σωμάτων ως προς την κατηγορία της εκπαιδευτικής ανάγκης

Κατηγορία Εκπαιδευτικής Ανάγκης	Επίδοση σε Απτικά Παρουσιασμένα Στερεά Σώματα		Επίδοση σε Εικονιστικά Παρουσιασμένα Στερεά Σώματα	
	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση
ΕΜΔ	3,15	2,21	2,98	3,44
ΔΕΠ-Υ	3,47	2,78	3,14	2,15

Αναφορικά με τα στερεά σώματα, τα αποτελέσματα του μη παραμετρικού ελέγχου Wilcoxon έδειξαν ότι η επίδοση των μαθητών με ΕΜΔ δεν διέφερε σημαντικά όταν τα στερεά σώματα παρουσιάζονταν ως τρισδιάστατα ή ως εικονιστικές αναπαραστάσεις ( $z = -0,471, p = 0,637, r = 0,10$ ). Ομοίως, δεν εντοπίστηκε στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των επιδόσεων των μαθητών με ΔΕΠ-Υ ως αποτέλεσμα του τρόπου αναπαράστασης των στερεών σωμάτων (τρισδιάστατα και εικονιστικά παρουσιασμένα) ( $z = -0,735, p = 0,463, r = 0,19$ ).

Παράλληλα, αξίζει να επισημανθεί, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, ότι τα στοιχεία των Πινάκων 11 και 12 προσφέρουν απάντηση και στο τρίτο ερευνητικό ερώτημα περί ύπαρξης ή μη σημαντικής διαφοράς στις μέσες επιδόσεις των συμμετεχόντων ως προς την κατηγορία της εκπαιδευτικής τους ανάγκης. Για τη σύγκριση των εν λόγω επιδόσεων και έχοντας, φυσικά, απορρίψει την υπόθεση κανονικότητας στην κατανομή των μαθητικών σκορ, κρίθηκε απαραίτητη για το μέγεθος των υπο-ομάδων των συμμετεχόντων της παρούσας έρευνας η χρήση μη παραμετρικών επαγωγικών ελέγχων. Έτσι, λοιπόν, ο επαγωγικός έλεγχος με το κριτήριο Mann-Whitney U έδειξε ότι στη δραστηριότητα αξιολόγησης όπου τα γεωμετρικά σχήματα παρουσιάστηκαν απτικά δεν υπήρξε στατιστικά σημαντική διαφοροποίηση μεταξύ των δύο ομάδων ειδικών αναγκών ( $U = 318, z = -0,592, p = 0,055$ ). Ωστόσο, πάλι διαμέσου του κριτηρίου Mann-Whitney U, φάνηκε ότι υπήρχε στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των μέσων όρων των επιδόσεων των δύο ομάδων στη δοκιμασία στην οποία τα γεωμετρικά σχήματα παρουσιάστηκαν στους συμμετέχοντες εικονιστικά ( $U = 321, z = -0,653, p = 0,033$ ). Μάλιστα, μέσα από τα

στοιχεία του Πίνακα 14 γίνεται φανερό ότι οι μαθητές με ΔΕΠ-Υ στην τελευταία δοκιμασία ανταποκρίθηκαν αρκετά καλύτερα από τους μαθητές με ΕΜΔ.

Αναφορικά με τα στερεά σώματα, ο επαγωγικός έλεγχος με το κριτήριο Mann-Whitney U δεν φανέρωσε στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των μέσων επιδόσεων των δύο ομάδων μαθητών ως προς την κατηγορία της εκπαιδευτικής τους ανάγκης σε καμία από τις δοκιμασίες που αφορούσαν τα στερεά γεωμετρικά σώματα ( $U = 348$ ,  $z = -0,84$ ,  $p = 0,933$  για τις τρισδιάστατες παρουσιάσεις και  $U = 351$ ,  $z = -0,21$ ,  $p = 0,983$  για τις εικονιστικές).

Τέλος, με στόχο να αναδειχτεί κατά το δυνατόν και η αναπτυξιακή διάσταση της παρούσας έρευνας και προκειμένου να απαντηθεί το τέταρτο ερευνητικό ερώτημα περί ύπαρξης ή μη σημαντικής διαφοράς στις μέσες επιδόσεις των συμμετεχόντων ως προς την τάξη φοίτησής τους, παρατίθενται οι Πίνακες 13 και 14, όπου εμφανίζεται ο μέσος όρος επίδοσης των μαθητών τόσο στα απτικά όσο και στα εικονιστικά παρουσιασμένα σχήματα και στερεά σώματα σε συνάρτηση με την τάξη φοίτησης των συμμετεχόντων.

### Πίνακας 13

Μέσος όρος και τυπική απόκλιση επίδοσης μαθητών στις δοκιμασίες αναγνώρισης απτικά και εικονιστικά παρουσιασμένων σχημάτων ως προς την τάξη φοίτησης

Τάξη Φοίτησης		Επίδοση σε Απτικά Παρουσιασμένα Σχήματα		Επίδοση σε Εικονιστικά Παρουσιασμένα Σχήματα	
		Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση
Ε' τάξη	ΕΜΔ	15,95	3,66	15,07	4,31
	ΔΕΠ-Υ	16,15	2,78	16,95	2,76
ΣΤ' τάξη	ΕΜΔ	17,88	4,56	16,26	4,05
	ΔΕΠ-Υ	18,14	2,37	18,31	1,36

### Πίνακας 14

Μέσος όρος και τυπική απόκλιση επίδοσης μαθητών στις δοκιμασίες ομαδοποίησης απτικά και εικονιστικά παρουσιασμένων στερεών σωμάτων ως προς την τάξη φοίτησης

Τάξη Φοίτησης		Επίδοση σε Απτικά Παρουσιασμένα Στερεά Σώματα		Επίδοση σε Εικονιστικά Παρουσιασμένα Στερεά Σώματα	
		Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση
Ε' τάξη	ΕΜΔ	3,05	1,67	2,91	2,22
	ΔΕΠ-Υ	3,18	2,65	2,83	1,87
ΣΤ' τάξη	ΕΜΔ	3,24	3,28	3,13	2,67
	ΔΕΠ-Υ	3,83	2,35	3,47	2,34

Αξιολογώντας τους δύο τελευταίους πίνακες, γίνεται φανερό ότι τα παιδιά της μεγαλύτερης τάξης, τόσο στην περίπτωση των επιπέδων σχημάτων όσο και στην περίπτωση των στερεών σωμάτων, ανταποκρίθηκαν καλύτερα σε σχέση με τους μικρότερους μαθητές. Ωστόσο, προκειμένου να εξακριβωθεί το αποτέλεσμα που απαντά το τέταρτο ερευνητικό ερώτημα αξιοποιήθηκε και πάλι ο μη παραμετρικός έλεγχος Mann Whitney U. Με βάση τον προαναφερθέντα έλεγχο βρέθηκε ότι οι διαφορές των επιδόσεων των μαθητών (και των δύο κατηγοριών ΗΕΑ) ήταν στατιστικά σημαντικές, τόσο στην περίπτωση των απτικά παρουσιασμένων σχημάτων ( $U = 357$ ,  $z = -0,35$ ,  $p = 0,021$  για ΕΜΔ και  $U = 334$ ,  $z = -0,53$ ,  $p = 0,04$  για ΔΕΠ-Υ) όσο και στην περίπτωση των εικονιστικά παρουσιασμένων σχημάτων ( $U = 359$ ,  $z = -0,67$ ,  $p = 0,04$  για ΕΜΔ και  $U = 357$ ,  $z = -0,43$ ,  $p = 0,003$  για ΔΕΠ-Υ), υπέρ των συμμετεχόντων της μεγαλύτερης τάξης. Τέλος, επισημαίνεται ότι στις δοκιμασίες που αφορούσαν τα στερεά σώματα στατιστικά σημαντική διαφοροποίηση ως προς την τάξη φοίτησης παρατηρήθηκε μόνο για

την ομάδα των μαθητών με ΔΕΠ-Υ τόσο στη δοκιμασία με τα απτά σώματα ( $U = 441, z = -0,871, p = 0,004$ ) όσο και σε αυτή με τις εικονιστικές αναπαραστάσεις ( $U = 389, z = -0,465, p = 0,271$ ), με τις επιδόσεις των μαθητών της ΣΤ' τάξης να είναι σημαντικά υψηλότερες.

## Συζήτηση-Συμπεράσματα

Σκοπός της παρούσας έρευνας ήταν η συγκριτική μελέτη της ικανότητας μαθητών με ΕΜΔ ή με ΔΕΠ-Υ οι οποίοι φοιτούσαν στην Ε' και ΣΤ' τάξη δημοτικού να αναγνωρίζουν γεωμετρικά σχήματα και σώματα και να τα διακρίνουν από μη γεωμετρικά σχήματα αιτιολογώντας τις επιλογές τους. Ειδικότερα, διερευνήθηκαν τα εξής: το επίπεδο γεωμετρικής σκέψης στο οποίο αντιστοιχεί η σκέψη των παραπάνω μαθητών κατά Van Hiele (πρώτο ερευνητικό ερώτημα), οι ενδο-κατηγορικές διαφορές ως προς τον τρόπο αναπαράστασης γεωμετρικών σχημάτων και σωμάτων (απτικό - εικονιστικό) (δεύτερο ερευνητικό ερώτημα), οι διαφορές μεταξύ των δύο κατηγοριών ειδικών αναγκών (τρίτο ερευνητικό ερώτημα), αλλά και οι διαφορές στις επιδόσεις των συμμετεχόντων ως προς την τάξη φοίτησής τους (τέταρτο ερευνητικό ερώτημα).

Καταρχάς, οι συμμετέχοντες και των δύο ομάδων παρουσίασαν σε σημαντικό βαθμό δυσκολία στην αναγνώριση γεωμετρικών σχημάτων, ιδιαίτερα όσων παρουσιάστηκαν σε μη πρωτοτυπική μορφή (π.χ. ορθογώνια παραλληλόγραμμα με μία διάσταση πολύ μεγαλύτερη από την άλλη). Το φαινόμενο αυτό ήταν πιο έντονο στην περίπτωση των εικονιστικά παρουσιασμένων σχημάτων και εμφανίστηκε σε μεγαλύτερη έκταση στην ομάδα των ΕΜΔ. Τα ευρήματα αυτά απαντούν στο πρώτο ερώτημα της έρευνας, αναδεικνύουν τις δυσκολίες στη διαχείριση των βασικών γεωμετρικών σχημάτων που προσιδιάζουν σε χαμηλά επίπεδα σκέψης κατά Van Hiele και συνάδουν με ευρήματα των Αγαλιώτη et al. (2011), οι οποίοι βρήκαν, παρομοίως, ότι μαθητές με ΕΜΔ εμφανίζουν αδυναμίες στην αναγνώριση σχημάτων, ιδιαίτερα όταν αυτά έχουν μη πρότυπες αναλογίες. Τα αποτελέσματα συμφωνούν επίσης με εκείνα ερευνών που έγιναν σε άλλα εκπαιδευτικά συστήματα, δείχνοντας πιθανώς κοινά στοιχεία επεξεργασίας πληροφοριών μεταξύ των συμμετεχόντων με ΕΜΔ (π.χ. Maier & Benz, 2013. Tsamir et al., 2008). Αυτά τα λάθη των μαθητών με ΕΜΔ πιθανώς μπορούν να αποδοθούν σε διάφορες αντιληπτικές ελλείψεις, όπως δυσκολίες στην οπτική ολοκλήρωση, δυσκολίες στον προσδιορισμό ομοιοτήτων και διαφορών, καθώς και αδυναμίες στην κατανόηση γεωμετρικών και χωρικών μορφών και εννοιών, οι οποίες έχουν κατά καιρούς αναφερθεί από διάφορους ερευνητές (π.χ. Butterworth, 2010. Montague, 2008. Zhang et al., 2012). Ως προς τους μαθητές με ΔΕΠ-Υ, θα μπορούσε να υποτεθεί ότι οι δυσκολίες τους οφείλονται σε προβλήματα με το εύρος ή τη διάρκεια συγκέντρωσης της προσοχής αλλά και σε αδυναμίες οπτικοχωρικής μνήμης και οργάνωσης των πληροφοριών (Hart et al., 2010).

Ένα ακόμη ενδιαφέρον εύρημα της παρούσας έρευνας είναι τα συστηματικά λάθη που εμφάνισαν οι δύο ομάδες στη χρήση γεωμετρικής ορολογίας κατά την επιχειρηματολογία που παρουσίασαν για τη διάκριση των σχημάτων. Το εύρημα αυτό συμφωνεί με σχετική έρευνα σε μαθητές με γεωμετρικές δυσκολίες, οι οποίοι επίσης αδυνατούσαν να αξιοποιήσουν κατάλληλο λεξιλόγιο προκειμένου να εξηγήσουν ιδιότητες των γεωμετρικών στοιχείων (Zhang et al., 2014). Οι δυσκολίες αυτές μπορούν ίσως να αποδοθούν στις γνωστές και διαπιστωμένες αδυναμίες εκφραστικού λόγου και οργάνωσης της σκέψης τόσο των μαθητών με ΕΜΔ (π.χ. Αγαλιώτης, 2013) όσο και των μαθητών με ΔΕΠ-Υ (π.χ. Edmond et al., 2008).

Πάντως, από όλα τα παραπάνω προκύπτει ότι και οι δύο ομάδες παραμένουν στο πρώτο επίπεδο Van Hiele για τα επίπεδα σχήματα (πρώτο ερευνητικό ερώτημα) παρά το ότι βρίσκονται στις δυο τελευταίες τάξεις του δημοτικού σχολείου. Αυτό σημαίνει ότι αντιμετωπίζουν σχολικές απαιτήσεις που δεν μπορούν να διαχειριστούν, αφού τα σχετικά Αναλυτικά Προγράμματα περιλαμβάνουν δραστηριότητες που προσιδιάζουν στον τρόπο σκέψης του τρίτου επιπέδου. Το εύρημα αυτό συμφωνεί με ανάλογα ευρήματα των Wu και Ma (2006). Σημειώνεται ότι τα επιχειρήματα ορισμένων μαθητών με ΔΕΠ-Υ προσεγγίζουν το δεύτερο επίπεδο σκέψης κατά Van Hiele, κυρίως στις απτικές αναπαραστάσεις, αλλά πρόκειται μάλλον για αποσπασματική συμπεριφορά που δεν επιτρέπει την αναφορά σε πλήρη λειτουργία σκέψης σε αυτό το επίπεδο. Είναι εξάλλου γνωστό ότι λόγος για πλήρη δόμηση, ολοκληρωμένη κατανόηση και λειτουργική χρήση μιας γνώσης μπορεί να γίνει όταν η πραξιακή, εικονιστική και

συμβολική αναπαράστασή της αποτελούν συμπαγή δομή και όχι όταν παρατηρείται αποσπασματική επιτυχία σε μέρος σχετικών δοκιμασιών (Αγαλιώτης, 2013).

Αξιοσημείωτο είναι επίσης το εύρημα της σημαντικής διαφοράς μεταξύ των επιδόσεων των μαθητών με ΕΜΔ στη δοκιμασία στην οποία αξιοποιήθηκαν απτά σχήματα και στην αντίστοιχη δοκιμασία στην οποία τα σχήματα παρουσιάστηκαν εικονιστικά υπέρ των απτών σχημάτων (δεύτερο ερευνητικό ερώτημα). Το εύρημα αυτό επιβεβαιώνει ποικίλες έρευνες που δείχνουν την προτίμηση των περισσότερων μαθητών με ΕΜΔ στη χρήση κιναισθητικών δράσεων και χειραπτικών μέσων κατά τη μάθηση της Γεωμετρίας, σε σύγκριση με τις συνήθειες εικονιστικές (και πολύ περισσότερο τις λεκτικές) αναπαραστάσεις και παρουσιάσεις της καθημερινής διδασκαλίας (Cass et al., 2003. Dobbins et al., 2013. Siew et al., 2013). Το γεγονός ότι τέτοια διαφορά στην αξιοποίηση απτικών και εικονιστικών αναπαραστάσεων δεν βρέθηκε στην περίπτωση των μαθητών με ΔΕΠ-Υ επιβεβαιώνει τις διαφορές επεξεργασίας πληροφοριών των δύο ομάδων (Boada et al., 2012). Επιπλέον, το εύρημα αυτό επιτρέπει τη διατύπωση προτάσεων για διαφοροποιημένη διδακτική στήριξη μαθητών που ανήκουν σε καθεμιά μια από τις δύο ομάδες ειδικών αναγκών. Πιο συγκεκριμένα, επιβεβαιώνεται το ότι το είδος της αναπαράστασης της γνώσης έχει πιθανώς σημαντική επίδραση στην επίδοση των μαθητών με ΕΜΔ και γι' αυτό συστήνεται κατά τη διδασκαλία τους να χρησιμοποιούνται πρωτίστως απτικές και κιναισθητικές αναπαραστάσεις. Απεναντίας, στην περίπτωση των μαθητών με ΔΕΠ-Υ φαίνεται ότι το θέμα της συγκέντρωσης της προσοχής παίζει κεντρικότερο ρόλο από ό,τι το είδος της αναπαράστασης, άρα οι διδακτικές ενέργειες θα πρέπει να είναι πρωτίστως επικεντρωμένες σε θέματα εμπλοκής του μαθητή στη διαδικασία και συστηματικής επεξεργασίας των πληροφοριών (Geary, 2004. Germanò et al., 2010. Miller et al., 2013).

Ως προς τις επιδόσεις των συμμετεχόντων στην κατηγοριοποίηση στερεών γεωμετρικών σωμάτων, αυτές βρέθηκε να είναι χαμηλές, ενώ παράλληλα δεν παρατηρήθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ τρόπων παρουσίασης ή μεταξύ των δύο ομάδων. Οι συμμετέχοντες έδειξαν ότι είναι δέσμιοι της κατ' αίσθηση αντίληψης. Στοιχεία όπως οι ακμές και οι κορυφές των σωμάτων συχνά κυριαρχούν και «επισκιάζουν» διαφορές που έχουν τα σώματα, ανεξάρτητα από τον τρόπο παρουσίασης. Χαρακτηριστική είναι η επιλογή ορισμένων μαθητών με ΔΕΠ-Υ να παρουσιάσουν κατηγοριοποιήσεις με βάση το χρώμα, αγνοώντας τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά. Ως προς τους μαθητές με ΕΜΔ, τα ευρήματα της παρούσας έρευνας επιβεβαιώνουν τα ευρήματα της έρευνας των Αγαλιώτη et al. (2011), οι οποίοι επίσης διαπίστωσαν αδυναμίες σε επίπεδο αναγνώρισης σωμάτων και σε σχετικές λεκτικές περιγραφές. Δεδομένου του εξαιρετικά περιορισμένου όγκου ερευνών επί του συγκεκριμένου θέματος, δεν βρέθηκαν άλλες έρευνες με τις οποίες θα μπορούσαν να συγκριθούν τα ευρήματα της παρούσας μελέτης, ιδιαίτερα ως προς τη ΔΕΠ-Υ. Πάντως, οι γνωστές και διαπιστωμένες αντιληπτικές και γνωστικές δυσλειτουργίες των μαθητών που ανήκουν στις δύο κατηγορίες ειδικών αναγκών της έρευνας μπορούν να προσφέρουν ορισμένες εξηγήσεις για τη χαμηλή επίδοση των συμμετεχόντων. Για παράδειγμα, οι ελλείψεις στην οργανωτική σκέψη, οι ανεπάρκειες στην οπτική αντίληψη, οι αδυναμίες επιλογής κατάλληλων κριτηρίων αξιολόγησης και ομαδοποίησης, καθώς και η ελλιπής ανάπτυξη γνωστικών σχημάτων πιθανόν εξηγούν τις αποτυχίες των συμμετεχόντων στην κατηγοριοποίηση των σωμάτων (π.χ. Butterworth, 2010. Edmond et al., 2008). Ως προς τις αδυναμίες ανάπτυξης κατάλληλης επιχειρηματολογίας και ορθής χρήσης γεωμετρικής ορολογίας, αυτές ίσως συνδέονται με γνωστά προβλήματα στον εκφραστικό λόγο των μαθητών και των δύο κατηγοριών (π.χ. Sowerby et al., 2011). Η έλλειψη διαφορών μεταξύ τρόπων αναπαράστασης (χειραπτικός – εικονιστικός) και μεταξύ των δύο ομάδων (ΕΜΔ – ΔΕΠ-Υ), που δείχνει να απαντά στο τρίτο ερευνητικό ερώτημα της παρούσας έρευνας, ίσως είναι αθροιστικό αποτέλεσμα των ελλείψεων των δύο ομάδων στην επεξεργασία σχημάτων αλλά και των δυσκολιών επεξεργασίας πληροφοριών κατά την ενασχόληση με τα γεωμετρικά σώματα. Με άλλα λόγια, ίσως οι επιδόσεις ήταν συνολικά χαμηλές και δεν μπόρεσε να φανεί κάποια διαφορά, με δεδομένο επίσης τον μικρό αριθμό των συμμετεχόντων. Ως προς το μοντέλο Van Hiele, εύκολα αντιλαμβανόμαστε ότι οι συμμετέχοντες των δύο ομάδων τοποθετούνται στο πρώτο επίπεδο. Η υποχρέωσή τους να «αναμετρηθούν» με απαιτήσεις του προγράμματος σπουδών που βρίσκονται σε υψηλότερο επίπεδο αποτελεί ασφαλώς παράγοντα πρόσθετης σχολικής αποτυχίας.

Τέλος, αξίζει να σχολιάσουμε, απαντώντας στο τέταρτο ερευνητικό ερώτημα της παρούσας έρευνας, τη στατιστικά σημαντική υπεροχή των μαθητών της ΣΤ΄ τάξης έναντι των μαθητών της Ε΄, η οποία πιθανώς μπορεί να συνδεθεί με αναπτυξιακούς παράγοντες. Μάλιστα, ειδικά για τους μαθητές με ΔΕΠ-Υ έχει αναφερθεί ότι, δεδομένου ότι η φύση του συνδρόμου τους έχει αναπτυξιακή χροιά, δεν είναι σπάνιο το να παρατηρούνται βελτιώσεις με την ηλικία, οι οποίες βέβαια ποικίλλουν ανάλογα με τον ειδικότερο τύπο του συνδρόμου αλλά και ανάλογα με τις συνθήκες εργασίας και το κατά πόσο αυτές ευνοούν τη συγκέντρωση της προσοχής (Barkley, 2014. Skounti et al., 2010). Για τους μαθητές με ΕΜΔ, η υπεροχή των μαθητών της ΣΤ΄ έναντι των μαθητών της Ε΄ πιθανώς αντανακλά το όφελος από τα περισσότερα έτη διδασκαλίας που έχουν δεχτεί αλλά ίσως και τις αυξημένες ικανότητές τους λόγω αναπτυξιακής ωρίμανσης.

Ασφαλώς, είναι αναγκαίο να αναφερθεί ότι τα ευρήματα της παρούσας έρευνας υπόκεινται σε περιορισμούς που προκύπτουν, μεταξύ άλλων, από το μέγεθος του δείγματος αλλά και από τη διαδικασία προσδιορισμού των συμμετεχόντων. Ωστόσο, τα αποτελέσματα θεωρούμε ότι παρουσιάζουν εκπαιδευτικό ενδιαφέρον, ιδιαίτερα ως προς τις ομοιότητες και τις διαφορές που εμφανίζουν οι μαθητές των δύο ομάδων ειδικών αναγκών σχετικά με τα λάθη. Αυτές οι ομοιότητες και οι διαφορές μπορούν να τροφοδοτήσουν την υλοποίηση διαφοροποιημένων διδακτικών προγραμμάτων, η αποτελεσματικότητα των οποίων θα πρέπει ασφαλώς να μελετηθεί με κατάλληλες παρεμβατικές έρευνες. Τέλος, μελλοντική έρευνα θα ήταν επιθυμητό να συμπεριλάβει και μαθητές τυπικής ανάπτυξης προκειμένου να διαπιστωθεί η ανταπόκρισή τους στις δοκιμασίες της παρούσας έρευνας και να υπάρξει ακριβέστερη ερμηνεία των αντίστοιχων επιδόσεων των μαθητών με ΕΜΔ ή με ΔΕΠ-Υ.

## Επίλογος

Η παρούσα έρευνα κατέδειξε τη σημαντική δυσκολία αναγνώρισης γεωμετρικών σχημάτων και στερεών σωμάτων που παρουσιάζουν μαθητές με ΕΜΔ και μαθητές με ΔΕΠ-Υ, καθώς και τις σημαντικές ελλείψεις και ανεπάρκειες που έχουν οι μαθητές αυτοί σε θέματα προσδιορισμού των γεωμετρικών χαρακτηριστικών και ιδιοτήτων των σχημάτων και σωμάτων όπως και στη χρήση γεωμετρικού λεξιλογίου. Επίσης, σημαντικό εύρημα της έρευνας είναι το ότι ο τρόπος παρουσίασης των γεωμετρικών σχημάτων ίσως επηρεάζει την επίδοση των μαθητών με ΕΜΔ αλλά όχι των μαθητών με ΔΕΠ-Υ, αφού οι μαθητές με ΕΜΔ έδειξαν να ωφελούνται περισσότερο από απτικές παρουσιάσεις και αναπαραστάσεις παρά από εικονιστικές. Τέλος, αναδείχτηκε ότι αναπτυξιακοί παράγοντες όπως η τάξη φοίτησης διαφοροποιούν την ετοιμότητα επίλυσης σχετικών γεωμετρικών έργων τόσο των μαθητών με ΕΜΔ όσο και αυτών με ΔΕΠ-Υ. Ασφαλώς, η σχετική έρευνα θα πρέπει να συνεχιστεί με μελέτες που θα εμπλέκουν μεγαλύτερα πλήθη συμμετεχόντων, ενώ πολύ σημαντικό είναι να επιδιωχτεί να μελετηθεί και η διδασκαλία που παρέχεται στους μαθητές αυτούς, δεδομένης της σημασίας της στη διαμόρφωση αποτελεσματικών εκπαιδευτικών προγραμμάτων.

## Βιβλιογραφικές αναφορές

- Αγαλιώτης, Ι. (2012). *Εκπαιδευτική αξιολόγηση μαθητών με δυσκολίες μάθησης και προσαρμογής: Το αξιολογικό σύστημα μαθησιακών αναγκών*. Γρηγόρης.
- Αγαλιώτης, Ι. (2013). *Διδασκαλία μαθηματικών στην ειδική αγωγή και εκπαίδευση: Φύση και εκπαιδευτική διαχείριση μαθηματικών δυσκολιών*. Γρηγόρης.
- Αγαλιώτης, Ι., Κόιου, Ε., & Χρυσικού, Β. (2011). Διδάσκοντας Γεωμετρία σε μαθητές με ήπιες εκπαιδευτικές ανάγκες: Γνωστική ανάλυση και διδακτική διαχείριση συστηματικών λαθών. Στο Δ. Γουδήρας (Επιμ.), *ΙΔ΄ Διεθνές Συνέδριο Παιδαγωγικής Εταιρείας Ελλάδος «Εκπαίδευση ατόμων με ειδικές ανάγκες: Μια πρόκληση για το σχολείο και την κοινωνία»* (σελ. 504–520). Πανεπιστήμιο Μακεδονίας.
- Aguilar, A., Eubig, P. A., & Schantz, S. L. (2010). Attention deficit/hyperactivity disorder: A focused overview for children's environmental health researchers. *Environmental Health Perspectives*, 118(12), 1646–1653. <https://doi.org/10.1289/ehp.1002326>

- Barkley, R. A. (Ed.). (2014). *Attention-deficit hyperactivity disorder: A handbook for diagnosis and treatment*. Guilford Press.
- Battista, M. (2011). Conceptualizations and issues related to learning progressions, learning trajectories, and levels of sophistication. *The Mathematics Enthusiast*, 8(3), 507–569.
- Bergstrom, C., & Zhang, D. (2016). Geometry interventions for K-12 students with and without disabilities: A research synthesis. *International Journal of Educational Research*, 80, 134–154. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2016.04.004>
- Boada, R., Willcutt, E. G., & Pennington, B. F. (2012). Understanding the comorbidity between dyslexia and attention-deficit/hyperactivity disorder. *Topics in Language Disorders*, 32(3), 264–284. <https://doi.org/10.1097/TLD.obo13e31826203ac>
- Butterworth, B. (2010). Foundational numerical capacities and the origins of dyscalculia. *Trends in Cognitive Sciences*, 14(12), 534–541. <https://doi.org/10.1016/j.tics.2010.09.007>
- Cass, M., Cates, D., Smith, M., & Jackson, C. (2003). Effects of manipulative instruction on solving area and perimeter problems by students with learning disabilities. *Learning Disabilities Research and Practice*, 18(2), 112–120. <https://doi.org/10.1111/1540-5826.00067>
- Cawley, J. F., Foley, T. E., & Hayes, A. M. (2009). Geometry and measurement: A discussion of status and content options for elementary school students with learning disabilities. *Learning Disabilities: A Contemporary Journal*, 7(1), 21–42.
- Clements, D. H. (2003). Teaching and learning geometry. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 151–178). National Council of Teachers of Mathematics.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2011). Early childhood teacher education: The case of geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14(2), 133–148. <https://doi.org/10.1007/s10857-11-9173-0>
- Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z., & Sarama, J. (1999). Young children's concept of shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 192–212. <https://doi.org/10.2307/749610>
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2008). *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας* (Χ. Μητσοπούλου & Μ. Φιλοπούλου, Μτφρ.). Έκφραση. (Έτος έκδοσης πρωτοτύπου 1997).
- Dobbins, A., Gagnon, J. C., & Ulrich, T. (2013). Teaching geometry to students with math difficulties using graduated and peer-mediated instruction in a response-to-intervention model. *Preventing School Failure: Alternative Education for Children and Youth*, 58(1), 17–25. <https://doi.org/10.1080/1045988X.2012.743454>
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: An ICMI study* (pp. 37–52). Kluwer.
- Edmond, V., Joyal, C. & Poissant, H. (2008). Structural and functional neuroanatomy of attention-deficit hyperactivity disorder (ADHD). *L'Encephale*, 35, 107–114. <https://doi.org/10.1016/j.encep.2008.01.005>
- Fuys, D. (1985). Van Hiele levels of thinking in geometry. *Education and Urban Society*, 17(4), 447–462. <https://doi.org/10.1177/0013124585017004008>
- Gal, H., & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: Analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Studies in Mathematics*, 74(2), 163–183. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9232-y>
- Galletta, A. (2013). *Mastering the semi-structured interview and beyond: From research design to analysis and publication*. New York University Press.
- Geary, D. C. (2004). Mathematics and learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 37(1), 4–15. <https://doi.org/10.1177/00222194040370010201>
- Geary, D. C., & Hoard, M. K. (2005). Learning disabilities in arithmetic and mathematics. In J. I. D. Campbell (Ed.), *The handbook of mathematical cognition* (pp. 253–267). Psychology Press.
- Germanò, E., Gagliano, A., & Curatolo, P. (2010). Comorbidity of ADHD and dyslexia. *Developmental Neuropsychology*, 35(5), 475–493. <https://doi.org/10.1080/87565641.2010.494748>
- Grobecke, B., & De Lisi, R. (2000). An investigation of spatial-geometrical understanding in students with learning disabilities. *Learning Disability Quarterly*, 23(1), 7–22. <https://doi.org/10.2307/1511096>
- Hart, S. A., Petrill, S. A., Willcutt, E., Thompson, L. A., Schatschneider, C., Deater-Deckard, K., & Cutting, L. E. (2010). Exploring how symptoms of attention-deficit/hyperactivity disorder are related to reading and mathematics performance: General genes, general environments. *Psychology Science*, 21(11), 1708–1715. <https://doi.org/10.1177/0956797610386617>

- Hock, T. T., Tarmizi, R. A., Yunus, A. S. M., & Ayub, A. F. (2015). Understanding the primary school students' Van Hiele levels of geometry thinking in learning shapes and spaces: A Q-methodology. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 11(4), 793–802. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1439a>
- Kang, H. W., & Zentall, S. S. (2011). Computer-generated geometry instruction: A preliminary study. *Educational Technology Research and Development*, 59(6), 783–797. <http://doi.org/10.1007/s11423-011-9186-5>
- Maier, S., & Benz, C. (2013). Selecting shapes—how to children identify familiar shapes in two different educational settings. In B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th Congress of European Research in Mathematics Education (CERME8)* (pp. 1–10).
- Mammarella, I. C., Giofrè, D., & Caviola, S. (2017). Learning geometry: The development of geometrical concepts and the role of cognitive processes. In D. Geary, D. Berch, R. J. Ochsendorf, & K. Mann Koeple (Eds.), *Acquisition of complex arithmetic skills and higher-order mathematics concepts* (pp. 221–246). Elsevier. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-805086-6.00010-2>
- Miller, A. C., Keenan, J. M., Betjemann, R. S., Willcutt, E. G., Pennington, B. F., & Olson, R. K. (2013). Reading comprehension in children with ADHD: Cognitive underpinnings of the centrality deficit. *Journal of Abnormal Child Psychology*, 41(3), 473–483. <https://doi.org/10.1007/s10802-012-9686-8>
- Montague, M. (2008). Self-regulation strategies to improve mathematical problem solving for students with learning disabilities. *Learning Disability Quarterly*, 31(1), 37–44. <https://doi.org/10.2307/30035524>
- Ramlan, A. M. (2016). The effect of Van Hiele learning model toward geometric reasoning ability based on self-efficacy of senior high school students. *Journal of Mathematics Education*, 1(2), 62–71. <https://doi.org/10.31327/jomedu.v1i2%20July.54>
- Siew, N. M., & Abdullah, S. (2013). Learning geometry in a large-enrollment class: Do tangrams help in developing students' geometric thinking. *British Journal of Education, Society and Behavioural Science*, 2(3), 239–259. <https://doi.org/10.9734/BJESBS/2012/1612>
- Siew, N. M., Chang, C. L., & Abdullah, M. R. (2013). Facilitating students' geometric thinking through Van Hiele's phase-based learning using tangram. *Journal of Social Science*, 9(3), 101–111. <https://doi.org/10.3844/jssp.2013.101.111>
- Skounti, M., Giannoukas, S., Dimitriou, E., Nikolopoulou, S., Linardakis, E., & Philalithis, A. (2010). Prevalence of attention deficit hyperactivity disorder in schoolchildren in Athens, Greece. Association of ADHD subtypes with social and academic impairment. *ADHD Attention Deficit and Hyperactivity Disorders*, 2(3), 127–132. <https://doi.org/10.1007/s12402-010-0029-8>
- Sowerby, P., Seal, S., & Tripp, G. (2011). Working memory deficits in ADHD: The contribution of age, learning/language difficulties, and task parameters. *Journal of Attention Disorders*, 15(6), 461–472. <https://doi.org/10.1177/1087054710370674>
- Tsamir, P., Tirosh, D., & Levenson, E. (2008). Intuitive non-examples: The case of triangles. *Education Studies in Mathematics*, 69(2), 81–95. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9133-5>
- Van de Walle, A. J. (2005). *Μαθηματικά για το δημοτικό και το γυμνάσιο: Μια εξελικτική διδασκαλία* (T. A. Τριανταφυλλίδης, Επιμ., Α. Αλεξανδροπούλου & Β. Κομπορόζος, Μτφρ.). Τυπωθήτω-Δαρδανός. (Έτος έκδοσης πρωτοτύπου 1998).
- Wang, S., & Kinzel, M. (2014). How do they know it is a parallelogram?: Analysing geometric discourse at Van Hiele Level 3. *Research in Mathematics Education*, 16(3), 288–305. <https://doi.org/10.1080/14794802.2014.933711>
- Wheatley, J. (2011). An investigation of three-dimensional problem solving and levels of thinking among high school geometry students. [Master's thesis, Central Washington University]. <https://pdfs.semanticscholar.org/994a/d70f32bodd2b38342da230b6275e08f9032e.pdf>
- Wu, D. B., & Ma, H. L. (2006). The distributions of Van Hiele levels of geometric thinking among 1st through 6th graders. In J. Novotna, M. Kratka & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 409–416). PME.
- Yang, J. C., & Chen, S. Y. (2010). Effects of gender differences and spatial abilities within a digital pentominoes game. *Computers and Education*, 55(3), 1220–1233. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2010.05.019>

- Zhang, D., Ding, Y., Stegall, J., & Mo, L. (2012). The effect of visual-chunking-representation accommodation on geometry testing for students with math disabilities. *Learning Disabilities Research and Practice*, 27(4), 167–177. <https://doi.org/10.1111/j.1540-5826.2012.00364.x>
- Zhang, D., Wang, Q., Ding, Y., & Liu, J. (2014). Testing accommodation or modification?: The effects of integrated object representation on enhancing geometry performance in children with and without geometry difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, 47(6), 569–583. <https://doi.org/10.1177/0022219413507602>

# An investigation of geometric knowledge in pupils with mild educational needs

Maria PAPADAM<sup>1</sup>, Ioannis AGALIIOTIS<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Department of Educational and Social Policy, University of Macedonia

---

## KEYWORDS

Geometric shapes  
Geometry  
Mild educational needs  
Pictorial and tactile material  
Solid bodies

---

## CORRESPONDENCE

Maria Papadam  
Str. Makrygianni str. 9  
Thessaloniki, GR-54635,  
Greece  
mea18058@uom.edu.gr,  
Email:  
[maria.papadam95@gmail.com](mailto:maria.papadam95@gmail.com)

---

## ABSTRACT

Geometry is a structural component of mathematics, with increased spatial and design requirements that cannot be easily met by students with mild disabilities. Systematic investigation of the difficulties encountered by students with mild disabilities in their effort to learn Geometry is a prerequisite for the implementation of effective intervention programs. However, research on this issue is relatively scarce. The aim of the present study was to assess the geometric knowledge of 54 students with mild disabilities (learning disabilities or ADHD) who attended the two last classes of elementary school. Participants were asked to recognize, describe and categorize geometric shapes and solid bodies that were presented in tactile mode and through pictorial representations. Semi-structured clinical interviews were used for gathering the data in the context of Curriculum Based Assessment and the Van Hiele's model of geometrical thinking. Participants of both categories of mild disabilities presented difficulties in distinguishing shapes and bodies, properly using the terminology, and formatting inductive geometrical reasoning. Participants with learning disabilities had higher achievement when dealing with haptic relative to pictorial representations of geometric shapes and bodies. Sixth graders performed better than fifth graders. Results are discussed in terms of the differences between the two categories of mild disabilities as well as with regard to the implementation of intervention programs.