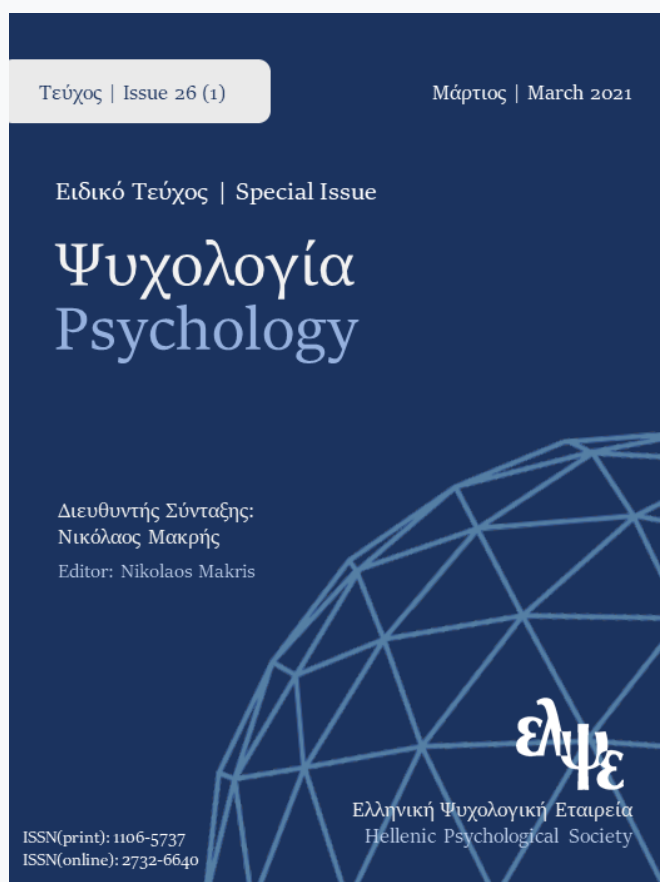


# Psychology: the Journal of the Hellenic Psychological Society

Vol 26, No 1 (2021)

Special Issue: Developmental Psychology. Research, applications and implications



## Effective instruction of cognitive schema for subtraction math problems to students with learning disabilities through the use of multiple knowledge representations

*Stergios Aggelopoulos, Ioannis Agaliotis*

doi: [10.12681/psy\\_hps.26235](https://doi.org/10.12681/psy_hps.26235)

Copyright © 2021, Στέργιος Αγγελόπουλος, Ιωάννης Αγαλιώτης



This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/).

### To cite this article:

Aggelopoulos, S., & Agaliotis, I. (2021). Effective instruction of cognitive schema for subtraction math problems to students with learning disabilities through the use of multiple knowledge representations. *Psychology: The Journal of the Hellenic Psychological Society*, 26(1), 160–168. [https://doi.org/10.12681/psy\\_hps.26235](https://doi.org/10.12681/psy_hps.26235)

## ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ | RESEARCH PAPER

# Αποτελεσματική διδασκαλία γνωστικού σχήματος προβλημάτων αφαίρεσης σε μαθητές με ειδικές μαθησιακές δυσκολίες με τη χρήση πολλαπλών τρόπων αναπαράστασης της γνώσης

Στέργιος ΑΓΓΕΛΟΠΟΥΛΟΣ<sup>1</sup>, Ιωάννης ΑΓΑΛΙΩΤΗΣ<sup>1</sup><sup>1</sup>Τμήμα Εκπαιδευτικής και Κοινωνικής Πολιτικής, Πανεπιστήμιο Μακεδονίας

## ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

Γνωστικό σχήμα των πράξεων  
Ειδικές μαθησιακές δυσκολίες  
Επίλυση προβλημάτων  
Μαθηματικά  
Διδακτικό πρόγραμμα

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα έρευνα πραγματεύεται τη δόμηση και ενεργοποίηση γνωστικού σχήματος προβλημάτων αφαίρεσης-σύγκρισης και αφαίρεσης-εξομίωσης από μαθητές με Ειδικές Μαθησιακές Δυσκολίες (ΕΜΔ). Η διδασκαλία για την ανάπτυξη του γνωστικού σχήματος έγινε διαμέσου πολλαπλών τρόπων αναπαράστασης της γνώσης (χειραπτικών υλικών, εικόνων και αριθμητικών συμβόλων) στο πλαίσιο παρέμβασης που στηρίχτηκε στις αρχές της αποτελεσματικής διδασκαλίας (effective instruction). Για τον έλεγχο της αποτελεσματικότητας της παρέμβασης και της διατήρησης της γνώσης όπως και για την εξαγωγή των αντίστοιχων συμπερασμάτων διενεργήθηκαν αξιολογήσεις πριν από την παρέμβαση, ακριβώς μετά από αυτή, αλλά και τρεις εβδομάδες μετά την ολοκλήρωσή της. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η αντίληψη του γνωστικού σχήματος βελτιώθηκε στατιστικώς σημαντικά, γεγονός που αποτυπώθηκε στην υψηλότερη επίδοση των συμμετεχόντων στην επίλυση προβλημάτων μετά την παρέμβαση και στη διατήρηση της γνώσης που κατέκτησαν τρεις εβδομάδες μετά την ολοκλήρωση του προγράμματος.

## ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ

Στέργιος Αγγελόπουλος  
Ελικώνος 8, Θεσσαλονίκη  
54639, Ελλάδα  
Email: [mea16005@uom.edu.gr](mailto:mea16005@uom.edu.gr)

Η ενεργοποίηση κατάλληλων γνωστικών σχημάτων κατά τη διαδικασία επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων επιτρέπει στους λύτες να διακρίνουν την ειδική δυναμική σχέση μεταξύ δεδομένων και ζητούμενων που χαρακτηρίζει τα προβλήματα κάθε κατηγορίας και να κάνουν τις ορθές επιλογές αριθμητικών πράξεων για την εύρεση του αποτελέσματος, παρά τις επιφανειακές ομοιότητες ή διαφορές που μπορεί να έχουν οι καταστάσεις που περιγράφονται στα προβλήματα. Η ενεργοποίηση των γνωστικών σχημάτων λαμβάνει χώρα μετά την αρχική κατανόηση των δομικών στοιχείων του προβλήματος και την αντίληψη των δυναμικών σχέσεων που υπάρχουν μεταξύ τους (Αγαλιώτης, 2011. Mayer et al., 1992).

Η ανάπτυξη λειτουργικών γνωστικών σχημάτων των τεσσάρων πράξεων και η χρήση τους σε πλαίσια επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων συγκαταλέγονται μεταξύ των σημαντικότερων δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με Ειδικές Μαθησιακές Δυσκολίες (ΕΜΔ) (και γενικότερα με ήπιες εκπαιδευτικές ανάγκες) στην προσπάθειά τους να ανταποκριθούν στις σχολικές απαιτήσεις (π.χ. Agrawal & Morin, 2016. Bouck et al., 2017). Κάποιες από τις βασικότερες αιτίες αυτών των δυσκολιών είναι οι αδυναμίες των μαθητών με ΕΜΔ να διακρίνουν (α) τις πραγματολογικές και εννοιολογικές ομοιότητες που μπορεί να έχουν καταστάσεις που διαφέρουν στην επιφανειακή δομή και παρουσίασή τους και (β) τις κρίσιμες και κεντρικές από τις περιφερειακές ή δευτερεύουσες πληροφορίες των καταστάσεων που πραγματεύονται (Geary et al., 2012). Για παράδειγμα, σε περιπτώσεις προβλημάτων που αναφέρονται σε μείωση, απώλεια, ελάττωση, δανεισμό ή καταστροφή αντικειμένων οι μαθητές με ΕΜΔ ίσως επηρεάζονται από τις συνθήκες που περιγράφονται στα προβλήματα και

δεν αντιλαμβάνονται ότι σε όλες τις περιπτώσεις υπάρχει κάποια αρχική ποσότητα η οποία μικραίνει μετά από κάποια ενέργεια και συνεπώς η πράξη που απαιτείται για τη λύση είναι η αφαίρεση.

Διδακτικές παρεμβάσεις που έχουν αναπτυχθεί για την υποστήριξη αυτών των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων έχουν αξιοποιήσει χειραπτικούς (χρήση τρισδιάστατων υλικών) και εικονιστικούς (εικόνες και σχεδιαγράμματα) τρόπους αναπαράστασης της γνώσης και έχουν αποδώσει ενθαρρυντικά αποτελέσματα (π.χ. Flores et al., 2016. Fuchs et al., 2004. Jitendra et al., 2013). Αυτά τα αποτελέσματα ασφαλώς ενισχύουν τις θέσεις για τη σημαντικότητα των πολλαπλών τρόπων αναπαράστασης (ΠΤΑ) της γνώσης κατά τη διδασκαλία διαφόρων μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων (π.χ. Hinton et al., 2014. Miller et al., 2011). Ωστόσο, θα πρέπει να αναφερθεί ότι υπάρχουν και αναφορές που επισημαίνουν διάφορες δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με ΕΜΔ στην προσπάθειά τους να αξιοποιήσουν διάφορες επιλογές πολλαπλών αναπαραστάσεων της γνώσης και ιδιαίτερα τα διαγράμματα (π.χ. van Gardener et al., 2014). Επιπλέον, στις περισσότερες από τις σχετικές αναφορές οι ερευνητές περιορίζονται σε περιγραφή των διαφόρων αναπαραστάσεων που χρησιμοποίησαν χωρίς να παρουσιάζουν λεπτομερώς τα υπόλοιπα στοιχεία της διδακτικής παρέμβασης. Παραμένει, λοιπόν, ασαφές αν οι πολλαπλές αναπαραστάσεις από τις οποίες προκύπτουν τα θετικά αποτελέσματα που παρουσιάζονται στις έρευνες αποτελούν μεμονωμένη προσθήκη στην παραδοσιακή διδασκαλία ή συνιστούν μέρος μιας ευρύτερης αλλαγής στη διδακτική μεθοδολογία. Αυτή η ασάφεια ασφαλώς περιορίζει τις δυνατότητες γενίκευσης της χρήσης των ευρημάτων σε πλαίσιο καθημερινής διδακτικής πράξης.

Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα προαναφερθέντα και σε μια προσπάθεια διαμόρφωσης μιας τεκμηριωμένης διδακτικής πρότασης για την ανάπτυξη λειτουργικών γνωστικών σχημάτων πράξεων σε μαθητές με ΕΜΔ, συγκροτήσαμε μια διδακτική σύνθεση η οποία περιελάμβανε τη χρήση ΠΤΑ της γνώσης σε πλαίσιο εφαρμογής Αποτελεσματικής Διδασκαλίας (ΑΔ). Δομικά στοιχεία της ΑΔ είναι τα εξής: ο προκαταβολικός οργανωτής (σύνδεση προϋπάρχουσας και νέας γνώσης και, επίσης, προσανατολισμός των νοητικών διεργασιών του μαθητή προς το έργο), η παρουσίαση του γνωστικού αντικειμένου, η καθοδηγούμενη εξάσκηση, η ανακεφαλαίωση, η αυτόνομη εξάσκηση και η τελική αξιολόγηση (Αγαλιώτης, 2012). Το διδακτικό πρόγραμμα εστίασε στην επίλυση προβλημάτων αφαίρεσης, τύπου σύγκρισης και τύπου εξομοίωσης, με το σκεπτικό ότι αποτελούν σημαντική κατηγορία μαθηματικών προβλημάτων για τα οποία δεν γίνεται συνήθως επαρκής και εξειδικευμένη διδασκαλία στο σχολείο. Παράδειγμα προβλήματος σύγκρισης είναι το εξής: «Η Έλενα έχει 16 συνδετήρες, οι οποίοι είναι 9 περισσότεροι από τους συνδετήρες του Γιώργου. Πόσους συνδετήρες έχει ο Γιώργος;». Παράδειγμα προβλήματος εξομοίωσης είναι το εξής: «Ο Θεοδόσης έχει 12 μολύβια και η φίλη του η Αλεξάνδρα έχει 7 μολύβια. Πόσα λιγότερα μολύβια έπρεπε να έχει ο Θεοδόσης για να έχει τόσα όσα και η Αλεξάνδρα;».

Τα κύρια ερευνητικά ερωτήματα της μελέτης αφορούσαν τον βαθμό στον οποίο ο συνδυασμός ΑΔ και ΠΤΑ της γνώσης για την ανάπτυξη γνωστικού σχήματος αφαίρεσης συμβάλλει στη βελτίωση της ικανότητας των μαθητών με ΕΜΔ να λύνουν προβλήματα που εμπίπτουν στις κατηγορίες (α) της «σύγκρισης» και (β) της «εξομοίωσης» καθώς και στη διατήρηση της αποκτηθείσας γνώσης μετά την παρέλευση τριών εβδομάδων από την ολοκλήρωση της παρέμβασης (η διάρκεια καθορίστηκε από τη διαθεσιμότητα των μαθητών με βάση τη λειτουργία του σχολείου). Διατυπώθηκαν οι μηδενικές υποθέσεις ότι (α) η επίδοση των μαθητών μετά την παρέμβαση δεν θα διαφέρει στατιστικώς σημαντικά από την επίδοση πριν από αυτή και (β) η επίδοση των μαθητών μετά την παρέλευση τριών εβδομάδων από τη λήξη της παρέμβασης δεν θα διαφέρει στατιστικώς σημαντικά από την επίδοση που εμφανίστηκε στη λήξη της. Επίσης διατυπώθηκαν οι εναλλακτικές υποθέσεις ότι και στις δύο περιπτώσεις θα υπάρχει στατιστικώς σημαντική διαφορά ανάμεσα στις επιδόσεις.

## Μεθοδολογία

### Συμμετέχοντες

Στην έρευνα συμμετείχαν 23 μαθητές (16 αγόρια και 7 κορίτσια) που φοιτούσαν στη Β' (15 συμμετέχοντες) και στην Γ' (8 συμμετέχοντες) τάξη τεσσάρων δημοτικών σχολείων της Αττικής. Όλοι οι μαθητές είχαν γνωμάτευση

από επίσημο διαγνωστικό κρατικό φορέα η οποία πιστοποιούσε ότι παρουσιάζουν ΕΜΔ, χωρίς ιδιαίτερη αναφορά σε υποκατηγορία των ΕΜΔ. Όλοι οι μαθητές είχαν σημαντικές δυσκολίες στην επίλυση αριθμητικών προβλημάτων και παρά τη φοίτηση στα Τμήματα Ένταξης των σχολείων τους δεν παρουσίαζαν πρόοδο. Η διδασκαλία που σχεδιάστηκε υλοποιήθηκε από τέσσερις εκπαιδευτικούς ειδικής αγωγής οι οποίοι υπηρετούσαν στα Τμήματα Ένταξης των σχολείων. Οι εκπαιδευτικοί δέχτηκαν τετράωρη εκπαίδευση από τους ερευνητές και εφοδιάστηκαν με συστηματικές γραπτές οδηγίες για την εφαρμογή των διαφόρων φάσεων του προγράμματος.

### **Διαδικασίες**

Η διδασκαλία περιλάμβανε τέσσερα στάδια: την αρχική αξιολόγηση, την εφαρμογή του διδακτικού προγράμματος (παρέμβαση), την τελική αξιολόγηση και τον έλεγχο της διατήρησης της γνώσης τρεις εβδομάδες μετά το τέλος της διδασκαλίας.

Η αρχική αξιολόγηση έγινε με εργαλείο που δημιουργήθηκε από τους ερευνητές και περιελάμβανε 10 προβλήματα αφαίρεσης (5 σύγκρισης και 5 εξομοίωσης) με παραδοσιακή μορφή παρουσίασης (λέξεις και αριθμητικά σύμβολα). Η αξιολόγηση απέβλεπε στη διαπίστωση του βαθμού στον οποίο οι μαθητές μπορούσαν να περιγράψουν την ενέργεια που πρέπει να γίνει, δηλαδή τη δράση που πρέπει να πραγματοποιηθεί για να λυθεί το πρόβλημα σε πραγματικές συνθήκες (πρέπει να βγάλω – αφαιρέσω – αποσπάσω – απομακρύνω αυτή την ποσότητα από εκείνη την ποσότητα), και στη συνέχεια να προσδιορίσουν και να γράψουν την αριθμητική πράξη (αφαίρεση). Δεν ζητούνταν η εύρεση του αριθμητικού αποτελέσματος της πράξης, καθώς αυτό είναι αλγοριθμική διαδικασία και δεν σχετίζεται με τη λειτουργία του γνωστικού σχήματος.

Το στάδιο της εφαρμογής του διδακτικού προγράμματος διήρκεσε συνολικά τέσσερις εβδομάδες με τρεις διδασκαλίες διάρκειας μίας διδακτικής ώρας η καθεμιά κάθε εβδομάδα, σε αντιστοιχία με την πρόταση των Jitendra et al. (2007). Οι συμμετέχοντες χωρίστηκαν σε δύο ομάδες. Η μία ομάδα (12 μαθητές, 8 αγόρια και 4 κορίτσια) δέχτηκε αρχικά διδασκαλία επί των προβλημάτων σύγκρισης και κατόπιν επί των προβλημάτων εξομοίωσης, ενώ το αντίθετο συνέβη για τη δεύτερη ομάδα (11 μαθητές, 8 αγόρια και 3 κορίτσια), ώστε να διασφαλιστεί ότι η σειρά παρουσίασης των προβλημάτων δεν επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα.

Η διδασκαλία ακολούθησε τα στάδια της πλήρους ΑΔ. Η παρουσίαση των προβλημάτων κατά τη διδασκαλία έγινε με χρήση ΠΤΑ της γνώσης και συγκεκριμένα με την ακολουθία πραξιακή (τρισιδιάστατα υλικά) – εικονιστική – συμβολική αναπαράσταση. Στους μαθητές παρουσιαζόταν αρχικά η κατάσταση του προβλήματος με τη χρήση αντικειμένων, έπειτα με εικόνες και, τέλος, με σύμβολα, καθώς και με συνδυασμό (σύνδεση) των παραπάνω τρόπων αναπαράστασης. Στη φάση της καθοδηγούμενης και της αυτόνομης εξάσκησης οι μαθητές καλούνταν να αναπαραστήσουν οι ίδιοι το πρόβλημα χρησιμοποιώντας τους ΠΤΑ. Η αξιολόγηση των απαντήσεων γινόταν αποκλειστικά σε συμβολικό επίπεδο, ώστε να γίνει δυνατή η σύγκριση της ικανότητας των μαθητών να ενεργοποιούν το γνωστικό σχήμα πριν και μετά την παρέμβαση.

Μετά το πέρας της διδασκαλίας ακολούθησε αξιολόγηση σε προβλήματα που παρουσιάστηκαν (α) αποκλειστικά με παραδοσιακό τρόπο, δηλαδή αναπαράσταση διαμέσου λέξεων και συμβόλων (ΑΛΣ) χωρίς τη χρήση κάποιου χειραπτικού υλικού ή εικόνας κατά την επίλυση, και (β) με τη χρήση ΠΤΑ κατά την επίλυση. Τρεις εβδομάδες μετά την τελική αξιολόγηση έγινε η αξιολόγηση για τον έλεγχο διατήρησης της γνώσης. Όλες οι αξιολογήσεις αποτελούνταν από 10 προβλήματα (5 σύγκρισης και 5 εξομοίωσης), όπως και η αρχική, και όλες είχαν τα ίδια χαρακτηριστικά ώστε να είναι συγκρίσιμα τα αποτελέσματα.

### **Ανάλυση των αποτελεσμάτων**

Τα αποτελέσματα της έρευνας αναλύθηκαν ποσοτικά και ποιοτικά. Ως προς την ποσοτική διάσταση, χρησιμοποιήθηκαν κατανομές συχνότητας (απόλυτες και σχετικές) και πραγματοποιήθηκαν έλεγχοι κανονικότητας κατανομής τιμών (Levene's test, Shapiro-Wilk test), οι οποίοι οδήγησαν στη χρήση μη παραμετρικών ελέγχων (Wilcoxon test) για τη διαπίστωση της σημαντικότητας των διαφορών στις επιδόσεις των

συμμετεχόντων κατά τις τρεις αξιολογήσεις. Ως προς την ποιοτική ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών, έγινε προσπάθεια κατηγοριοποίησης των λαθών που εμφανίστηκαν πριν και μετά την παρέμβαση.

## Αποτελέσματα

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας, κανένας μαθητής δεν μπόρεσε να αναφέρει απαιτούμενη ενέργεια και αριθμητική πράξη για περισσότερα από 5 προβλήματα κατά την αρχική αξιολόγηση. Ωστόσο, στις τελικές αξιολογήσεις που πραγματοποιήθηκαν αμέσως μετά την παρέμβαση βρέθηκε ότι (α) στην περίπτωση αξιολόγησης μέσω ΠΤΑ των προβλημάτων όλοι οι μαθητές μπόρεσαν να αναφέρουν απαιτούμενη ενέργεια και αριθμητική πράξη για 9 ή 10 προβλήματα, ενώ (β) στην περίπτωση αξιολόγησης μέσω παραδοσιακής παρουσίασης (λέξεις και σύμβολα) οι περισσότεροι μαθητές (91,3%) μπόρεσαν να αναφέρουν απαιτούμενη ενέργεια και αριθμητική πράξη για 9 ή 10 προβλήματα, οι δε υπόλοιποι μπόρεσαν να αναφέρουν απαιτούμενη ενέργεια και αριθμητική πράξη για 7 ή 8 προβλήματα.

Στις αξιολογήσεις για τον έλεγχο της διατήρησης της γνώσης, δηλαδή τρεις εβδομάδες μετά την ολοκλήρωση του προγράμματος, κατά την επεξεργασία προβλημάτων με χρήση ΠΤΑ όλοι ανεξαιρέτως οι μαθητές μπόρεσαν να αναφέρουν απαιτούμενη ενέργεια και αριθμητική πράξη για 9 ή 10 προβλήματα. Αντίθετα, κατά την επεξεργασία προβλημάτων με παραδοσιακό τρόπο οι περισσότεροι μαθητές (87%) μπόρεσαν να αναφέρουν απαιτούμενη ενέργεια και αριθμητική πράξη για 9 ή 10 προβλήματα, ενώ οι υπόλοιποι μπόρεσαν να αναφέρουν απαιτούμενη ενέργεια και αριθμητική πράξη για 7 ή 8 προβλήματα.

Είναι αξιοσημείωτο ότι 15 από τους 23 συνολικά μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα είχαν απόλυτη επιτυχία στις αξιολογήσεις που ακολούθησαν τη διδασκαλία ανεξαρτήτως της επίδοσης που είχαν πριν από αυτή. Μάλιστα, οι 11 από αυτούς τους 15 μαθητές είχαν ιδιαίτερα χαμηλή επίδοση στην αρχική αξιολόγηση (έλυσαν το πολύ 3 προβλήματα). Από τους υπόλοιπους οκτώ (23-15), μόνο τρεις μαθητές είχαν από δύο έως τρία λάθη και κανένας περισσότερα από τρία λάθη.

Η σύγκριση των επιδόσεων των μαθητών ως προς την επίλυση προβλημάτων αφαίρεσης-εξομοίωσης και προβλημάτων αφαίρεσης-σύγκρισης έδειξε ότι το ποσοστό των μαθητών που δεν ήταν σε θέση να λύσουν ούτε ένα πρόβλημα σύγκρισης πριν από την παρέμβαση ήταν περίπου δυόμισι φορές μεγαλύτερο από το αντίστοιχο ποσοστό των μαθητών που αδυνατούσαν να λύσουν προβλήματα εξομοίωσης (21,7% για τα προβλήματα σύγκρισης, 8,7% για τα προβλήματα εξομοίωσης).

Στις τελικές αξιολογήσεις, οι οποίες πραγματοποιήθηκαν αμέσως μετά την παρέμβαση, στα προβλήματα εξομοίωσης που αξιολογήθηκαν με χρήση ΠΤΑ όλοι οι μαθητές απάντησαν σωστά, ενώ στα προβλήματα σύγκρισης το ποσοστό επιτυχίας ανήλθε στο 95,7%. Η διαφορά είναι προφανώς αμελητέα. Αντίθετα, με τον παραδοσιακό τρόπο αναπαράστασης (ΑΛΣ), η διαφορά στην επίδοση μεταξύ προβλημάτων εξομοίωσης και προβλημάτων σύγκρισης στο επίπεδο της απόλυτης επιτυχίας ήταν της τάξης του 18% περίπου υπέρ των προβλημάτων εξομοίωσης. Συνολικά, επομένως, οι συμμετέχοντες έδειξαν να αντιμετωπίζουν μεγαλύτερες δυσκολίες με τα προβλήματα σύγκρισης παρά με τα προβλήματα εξομοίωσης ανεξάρτητα από τον τρόπο αναπαράστασης. Ωστόσο, βελτίωση υπήρξε και στα δύο είδη προβλημάτων αφαίρεσης.

Τα αποτελέσματα των αξιολογήσεων για τον έλεγχο της διατήρησης της γνώσης έδειξαν ότι στα προβλήματα εξομοίωσης που παρουσιάστηκαν με χρήση ΠΤΑ όλοι οι μαθητές διατήρησαν την επίδοση που είχαν πετύχει στην αντίστοιχη αξιολόγηση που έλαβε χώρα στο τέλος της παρέμβασης. Όμως στα προβλήματα σύγκρισης που παρουσιάστηκαν με χρήση ΠΤΑ το ποσοστό των μαθητών που παρουσίασαν απόλυτη επιτυχία κατά τον έλεγχο διατήρησης της γνώσης ήταν ελαφρώς χαμηλότερο από το αντίστοιχο ποσοστό της αξιολόγησης που έγινε ακριβώς με το τέλος της παρέμβασης, χωρίς αυτό να σηματοδοτεί κάποια σημαντική διαφορά.

Από τα αποτελέσματα των επαγωγικών ελέγχων Wilcoxon (βλ. Pallant, 2010) προέκυψε ότι οι διαφορές επίδοσης μεταξύ της αρχικής και της τελικής αξιολόγησης είναι σημαντικές και μεγάλης ισχύος ( $z = -4,226, p = 0,000, r = 0,88$ ). Επίσης, κατά την τελική αξιολόγηση μεταξύ της επίλυσης προβλημάτων με χρήση ΑΛΣ ή, εναλλακτικά, με χρήση ΠΤΑ βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μέτριας ισχύος ( $z = -2,124, p = 0,034, r$

= 0,44) υπέρ της χρήσης ΠΤΑ. Διαφορά υπέρ της χρήσης ΠΤΑ, που οριακά δεν ήταν σημαντική ( $z = -1,841, p = 0,066, r = 0,38$ ), βρέθηκε στη σύγκριση επίλυσης προβλημάτων με χρήση ΑΛΣ ή, εναλλακτικά, με χρήση ΠΤΑ κατά τον έλεγχο διατήρησης της γνώσης. Τέλος, σε σύγκριση της επίδοσης που επιτεύχθηκε ακριβώς με το τέλος της παρέμβασης και της επίδοσης κατά τον έλεγχο της διατήρησης τρεις εβδομάδες μετά, σε προβλήματα στα οποία χρησιμοποιήθηκε ΑΛΣ η διαφορά βρέθηκε στατιστικά μη σημαντική ( $z = -0,447, p = 0,655, r = 0,09$ ). Ανάλογο ήταν το εύρημα σύγκρισης μεταξύ της επίδοσης του τέλους της παρέμβασης και της επίδοσης κατά τον έλεγχο διατήρησης της γνώσης στην περίπτωση προβλημάτων που προσεγγίστηκαν με χρήση ΠΤΑ ( $z = -0,577, p = 0,564, r = 0,12$ ). Η έλλειψη σημαντικών διαφορών δείχνει βέβαια τη διατήρηση των αποτελεσμάτων της παρέμβασης έστω για το μικρό διάστημα των τριών εβδομάδων.

Οι ποιοτικές αναλύσεις των δεδομένων έδειξαν ότι κατά την αρχική αξιολόγηση περισσότεροι από τους μισούς μαθητές φάνηκε να κάνουν χρήση λέξεων-κλειδιών στην επίλυση των προβλημάτων. Πιο συγκεκριμένα, λέξεις ή φράσεις όπως «οι καραμέλες του Γιάννη είναι 20 περισσότερες από της Σοφίας» τους παραπλανούσαν και δήλωναν ότι πρόκειται για μια προσθετική κατάσταση, αφού εμπεριέχεται η λέξη «περισσότερες», ενώ στην πραγματικότητα στο πρόβλημα περιγραφόταν μια αφαιρετική κατάσταση. Το γεγονός αυτό, εκτός από την εσφαλμένη περιγραφή της κατάστασης του προβλήματος, τους οδηγούσε και σε λάθος επιλογή πράξης (πρόσθεση αντί αφαίρεσης). Μετά τη διδακτική παρέμβαση οι μαθητές φάνηκε να μη χρησιμοποιούν πλέον λέξεις-κλειδιά αλλά να δίνουν έμφαση στη σημασιολογική δομή των προβλημάτων.

Στην αρχική αξιολόγηση, στην οποία χρησιμοποιήθηκε μόνο ο παραδοσιακός τρόπος παρουσίασης των προβλημάτων, περίπου τα 4/6 των μαθητών κατά την περιγραφή των ενεργειών επικεντρώνονταν αποκλειστικά στα αριθμητικά στοιχεία του προβλήματος. Ανέφεραν, για παράδειγμα, ότι «θα προσθέσουμε τους δύο αριθμούς» χωρίς να μπορούν να περιγράψουν την αφαιρετική κατάσταση του προβλήματος. Στις τελικές αξιολογήσεις με χρήση ΠΤΑ αλλά και στις αντίστοιχες για τον έλεγχο διατήρησης της γνώσης οι μαθητές φάνηκε να κάνουν αμεσότερη και ορθότερη περιγραφή της κατάστασης του προβλήματος. Οι περισσότεροι ανέφεραν άμεσα και χωρίς δισταγμό τις ενέργειες που απαιτούνται για την επίλυσή του. Στις τελικές αξιολογήσεις και σε αυτές για τον έλεγχο διατήρησης της γνώσης με χρήση ΑΛΣ παρατηρήθηκε ότι περίπου το 1/6 των μαθητών δυσκολεύτηκε ή καθυστέρησε στην περιγραφή των ενεργειών για την επίλυση του προβλήματος. Ορισμένοι από αυτούς τους μαθητές οδηγήθηκαν τελικά σε λανθασμένη περιγραφή της αφαιρετικής κατάστασης του προβλήματος και συνεπώς σε λάθος επιλογή πράξης.

Τέλος, ζητήθηκε από τους μαθητές και ο προσδιορισμός του είδους της πληροφορίας που θα προέκυπτε από την πράξη που είχαν επιλέξει. Παρατηρήθηκε ότι κατά τις αξιολογήσεις μετά την παρέμβαση, όσοι μαθητές είχαν επιλέξει τη σωστή πράξη για τα προβλήματα εξομοίωσης προσδιόρισαν με απόλυτη επιτυχία το είδος της πληροφορίας που θα απέδιδε η εκτέλεση της πράξης. Αντίθετα, στα προβλήματα σύγκρισης παρατηρήθηκε ότι περίπου το 1/6 των μαθητών δυσκολεύτηκε να περιγράψει με ακρίβεια το αναμενόμενο αποτέλεσμα. Για παράδειγμα, μια συχνή απάντηση ήταν «θα βρούμε τα λιγότερα ξυλάκια του Νίκου» (που ήταν δεδομένο του προβλήματος) αντί «θα βρούμε τα ξυλάκια που έχει τώρα ο Νίκος» (που ήταν το ζητούμενο).

## Συζήτηση-Συμπεράσματα

Στόχος της παρούσας έρευνας ήταν η εφαρμογή και αξιολόγηση ενός παρεμβατικού προγράμματος για την ανάπτυξη του γνωστικού σχήματος αφαίρεσης σε μαθητές με ΕΜΔ. Ειδικά χαρακτηριστικά του προγράμματος ήταν η χρήση ΠΤΑ της γνώσης (χρήση της ακολουθίας πραξιακή – εικονιστική – συμβολική αναπαράσταση) σε πλαίσιο υλοποίησης πλήρους ΑΔ (δομημένη διδασκαλία έξι σταδίων). Τα αποτελέσματα της έρευνας ήταν πολύ ενθαρρυντικά, καθώς διαπιστώθηκε στατιστικά σημαντική βελτίωση της δυνατότητας των μαθητών να προσδιορίζουν τόσο τις αναγκαίες δράσεις για την επίλυση των προβλημάτων σε πραγματικές συνθήκες όσο και την αναγκαία αριθμητική πράξη για την εύρεση της απάντησης του προβλήματος. Μάλιστα, τα μαθησιακά κέρδη διατηρήθηκαν για διάστημα τριών εβδομάδων μετά την ολοκλήρωση του προγράμματος. Με βάση τα

αποτελέσματα, η πρώτη από τις μηδενικές υποθέσεις της έρευνας πρέπει να απορριφθεί υπέρ της εναλλακτικής, ενώ η δεύτερη μηδενική υπόθεση δεν μπορεί να απορριφθεί.

Ως προς την ερμηνεία των αποτελεσμάτων, μπορεί να διατυπωθεί η θέση ότι τα θετικά αποτελέσματα που προέκυψαν πιθανότατα συνδέονται με το γεγονός ότι μέσω του συνδυασμού των χειραπτικών και εικονιστικών αναπαραστάσεων με τις συμβολικές εκφράσεις των πληροφοριών οι μαθητές είχαν την ευκαιρία της άμεσης εποπτείας και της σαφούς αντίληψης των ποσοτήτων και των σχέσεών τους. Με άλλα λόγια, μπορούσαν να σκεφτούν πάνω σε οντότητες που είχαν συνεχώς στη διάθεσή τους για αισθητηριακή επεξεργασία και όχι πάνω σε υλικό που έπρεπε να κρατούν στη μνήμη εργασίας ως εννοιολογική πληροφορία σε συμβολική μορφή. Με τον τρόπο αυτόν ίσως αμβλύνθηκαν οι περιορισμοί που είναι γνωστό ότι αντιμετωπίζουν οι μαθητές με ΕΜΔ όταν καλούνται να επεξεργαστούν αυστηρά συμβολικό υλικό (Αγαλιώτης, 2011). Ανάλογες πρακτικές εφαρμογές, βελτιώσεις επιδόσεων και εξηγήσεις αποτελεσμάτων διατρέχουν και άλλες έρευνες στις οποίες χρησιμοποιήθηκαν ΠΤΑ προβλημάτων (π.χ. Flores et al., 2014. Jitendra et al., 2013. Miller et al., 2011). Σημειώνεται βέβαια ότι οι λεπτομέρειες των διαδικασιών αναπαραστάσης δεν είναι ίδιες σε όλες τις σχετικές έρευνες. Για παράδειγμα, οι αναπαραστάσεις σε αρκετές από αυτές έγιναν κυρίως με τη χρήση σχεδιαγραμμάτων και όχι με τη χρήση χειραπτικών υλικών και εικόνων που χαρακτηρίζουν την παρούσα έρευνα. Ωστόσο, κοινό στοιχείο όλων των ερευνών είναι η προσπάθεια διευκόλυνσης των συμμετεχόντων ως προς τη «μετάφραση» των πληροφοριών που παραδοσιακά παρουσιάζονται με λεκτικό-συμβολικό τρόπο σε άλλα είδη πληροφοριών, σε άλλους «κώδικες», που κατά τεκμήριο τους είναι περισσότερο οικείοι και «προσβάσιμοι». Αυτή η «μετάφραση» διευκολύνει σημαντικά την αντίληψη των καταστάσεων που περιγράφονται στα προβλήματα. Η καλύτερη κατανόηση των καταστάσεων προφανώς διευκολύνει την επισήμανση λεπτομερειών, ομοιοτήτων και διαφορών και συμβάλλει στην διαμόρφωση δομών δράσεων από τις οποίες προκύπτουν τα γνωστικά σχήματα (Marshall, 1995). Η δόμηση γνωστικών σχημάτων συμβάλλει, με τη σειρά της, αποφασιστικά στη βελτίωση της ικανότητας περιγραφής ενεργειών επίλυσης και επιλογής της κατάλληλης αριθμητικής πράξης για την εύρεση απάντησης στα προβλήματα.

Σημαντικό ρόλο στην επίτευξη των αποτελεσμάτων που αναφέρθηκαν στην παρούσα έρευνα έπαιξε ασφαλώς και η χρησιμοποίηση της πλήρους ΑΔ. Αυτό το διδακτικό σχήμα επιτρέπει τον συστηματικό έλεγχο βασικών διδακτικών μεταβλητών και καθιστά δυνατή τη βήμα προς βήμα καθοδήγηση του μαθητή στον διδακτικό στόχο με τον ελάχιστο δυνατό κίνδυνο αγνόησης κάποιας σημαντικής προϋποτιθέμενης γνώσης και δεξιότητας. Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας συνάδουν πλήρως με αποτελέσματα άλλων ερευνών που επίσης χρησιμοποίησαν την ΑΔ ως πλαίσιο διδασκαλίας μαθηματικών γνώσεων με αξιόλογη επιτυχία (π.χ. Agaliotis & Teli, 2016).

Σημειώνεται ότι η βελτίωση της επίδοσης των συμμετεχόντων δεν εξάλειψε τις πραγματολογικές και εννοιολογικές διαφορές των δύο κατηγοριών προβλημάτων. Σχετικά με αυτό, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι στην περίπτωση των προβλημάτων εξομοίωσης οι μαθητές είχαν στη διάθεσή τους δύο άμεσα αντιληπτές ποσότητες επί των οποίων μπορούσαν να κάνουν σκέψεις (και δοκιμές) εξίσωσης, λειτουργώντας μάλιστα είτε προσθετικά είτε αφαιρετικά (εξομοιώνω είτε αυξάνοντας μια ποσότητα είτε μειώνοντας μια άλλη). Από την άλλη πλευρά, στα προβλήματα σύγκρισης οι μαθητές είχαν μπροστά τους μια ποσότητα, γνώριζαν πόσο διαφέρει από μια άλλη ποσότητα η οποία ήταν το ζητούμενο, αλλά δεν είχαν άμεση αναπαραστάση δύο χωριστών ποσοτήτων. Αυτή η μεγαλύτερη δυσκολία στην αναπαραστάση των προβλημάτων σύγκρισης μάλλον εξηγεί και τη σχετικά χαμηλότερη βελτίωση που σημείωσαν οι μαθητές σε σχέση με τα προβλήματα εξομοίωσης, εφόσον μάλιστα η μεγαλύτερη δυσκολία αυτού του τύπου των συγκρίσεων σε σχέση με την εξομοίωση είναι διαπιστωμένη και παραδεκτή (π.χ. Charin & Johnson, 2001).

Από τις ποιοτικές αναλύσεις προέκυψε ότι μετά την παρέμβαση οι μαθητές δεν επιδίωκαν να βρουν κάποια λέξη-κλειδί με βάση την οποία θα μπορούσαν να προσδιορίσουν την αναγκαία πράξη, αλλά προσπαθούσαν συστηματικά να αιτιολογήσουν τις ενέργειες που απαιτούνταν για την εύρεση της απάντησης. Μπορεί να υποτεθεί ότι η ανάπτυξη του γνωστικού σχήματος διαμέσου ΠΤΑ της γνώσης και ΑΔ βοηθά τους μαθητές με ΕΜΔ

να επικεντρωθούν στη σημασιολογική δομή των προβλημάτων και να μην αναλώνονται σε μηχανιστικές τακτικές όπως η αναζήτηση λέξεων-κλειδιών, γεγονός που αναφέρεται ως εύρημα και από τους Marsh και Cooke (1996). Είναι σημαντικό να επισημανθεί ότι η πρόοδος που σημείωσαν οι συμμετέχοντες ήταν εμφανής και σημαντική μετά την παρέμβαση, τόσο στην περίπτωση επεξεργασίας προβλημάτων με τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων όσο και στην περίπτωση διαχείρισης προβλημάτων με παραδοσιακό τρόπο.

Η παρούσα έρευνα έχει περιορισμούς που προκύπτουν κυρίως από το ότι (α) δεν περιελάμβανε ομάδα ελέγχου και (β) δεν παρουσίασε ένα πλήρες αρχικό μαθηματικό προφίλ των συμμετεχόντων. Ωστόσο, θεωρούμε πως το γεγονός ότι μαθητές από τέσσερα διαφορετικά Τμήματα Ένταξης (οι οποίοι είχαν αναγνωριστεί από ΚΕΣΥ ως μαθητές με ΕΜΔ) εμφάνισαν μια τόσο σημαντική βελτίωση στον προσδιορισμό ενεργειών και πράξης επίλυσης δύο σημαντικών κατηγοριών προβλημάτων αφαίρεσης συνιστά θετική συνεισφορά στη διαθέσιμη γνώση για την υλοποίηση αποτελεσματικών διδακτικών προγραμμάτων στην ελληνική εκπαιδευτική πραγματικότητα. Τα στοιχεία αυτά μπορούν ασφαλώς να συμπληρωθούν διαμέσου ερευνών που θα μελετούν την πιθανή επίδραση της ίδιας διδακτικής σύνθεσης στην ανάπτυξη γνωστικού σχήματος άλλων ειδών προβλημάτων, αξιοποιώντας μεγαλύτερους πληθυσμούς συμμετεχόντων και διαφορετική μεθοδολογία.

## Βιβλιογραφικές αναφορές

- Αγαλιώτης, Ι. (2011). *Διδασκαλία μαθηματικών στην ειδική αγωγή και εκπαίδευση: Φύση και εκπαιδευτική διαχείριση των μαθηματικών δυσκολιών*. Γρηγόρης.
- Αγαλιώτης, Ι. (2012). *Εκπαιδευτική αξιολόγηση μαθητών με δυσκολίες μάθησης και προσαρμογής: Το αξιολογικό σύστημα μαθησιακών αναγκών*. Γρηγόρης.
- Agaliotis, I., & Teli, A. (2016). Teaching arithmetic combinations of multiplication and division to students with learning disabilities or mild intellectual disability: The impact of alternative fact grouping and the role of cognitive and learning factors. *Journal of Education and Learning*, 5(4), 90–103. <https://doi.org/10.5539/jel.v5n4p90>
- Agrawal, J., & Morin, L. L. (2016). Evidence-based practices: Applications of concrete representational abstract framework across math concepts for students with disabilities. *Learning Disabilities Research and Practice*, 31, 34–44. <https://doi.org/10.1111/ldrp.12093>
- Bouck, E. C., Park, J., & Nickell, B. (2017). Using the concrete-representational-abstract approach to support students with intellectual disability to solve change-making problems. *Research in Developmental Disabilities*, 60, 24–36. <https://doi.org/10.1016/j.ridd.2016.11.006>
- Chapin, S., & Johnson, A. (2001). *Math matters: Understanding the math you teach*. Math Solutions PC. <http://dx.doi.org/10.14507/er.vo.804>
- Flores, M. M., Hinton, V. M., & Burton, M. E. (2016). Teaching problem solving to students receiving tiered interventions using the concrete-representational-abstract sequence and schema-based instruction. *Preventing School Failure*, 60(4), 345–355. <https://doi.org/10.1080/1045988x.2016.1164117>
- Flores, M. M., Hinton, V. M., Strozier, S. D., & Terry, S. L. (2014). Using the concrete-representational-abstract sequence and the Strategic Instruction Model to teach computation to students with autism spectrum disorders and developmental disabilities. *Education and Training in Autism and Developmental Disabilities*, 547–554. <https://doi.org/10.1111/ldrp.12032>
- Fuchs, L. S., Fuchs, D., Finelli, R., Courey, S. J., & Hamlett, C. L. (2004). Expanding schema-based transfer instruction to help third graders solve real-life mathematical problems. *American Educational Research Journal*, 41(2), 419–445. <https://doi.org/10.3102/00028312041002419>
- Geary, D. C., Hoard, M. K., Nugent, L., & Bailey, D. H. (2012). Mathematical cognition deficits in children with learning disabilities and persistent low achievement: A five-year prospective study. *Journal of Educational Psychology*, 104, 206–223. <https://doi.org/10.1037/a0025398>
- Hinton, V., Strozier, S. D., & Flores, M. M. (2014). Building mathematical fluency for students with disabilities or students at-risk for mathematics failure. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, 2(4), 257–265. <https://doi.org/10.18404/ijemst.69677>



- Jitendra, A. K., Dupuis, D. N., Rodriguez, M. C., Zaslofsky, A. F., Slater, S., Cozine-Corroy, K., & Church, C. (2013). A randomized controlled trial of the impact of schema-based instruction on mathematical outcomes for third-grade students with mathematics difficulties. *The Elementary School Journal*, *114*(2), 252–276. <https://doi.org/10.1086/673199>
- Jitendra, A. K., Griffin, C. C., Deatline-Buchman, A., & Sczesniak, E. (2007). Mathematical word problem solving in third-grade classrooms. *The Journal of Educational Research*, *100*(5), 283–302. <https://doi.org/10.3200/JOER.100.5.283-302>
- Marsh, L. G., & Cooke, N. L. (1996). The effects of using manipulatives in teaching math problem solving to students with learning disabilities. *Learning Disabilities Research and Practice*, *11*, 58–65.
- Marshall, S. P. (1995). *Schemas in problem solving*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511527890>
- Mayer, R. E., Lewis, A. B., & Hegarty, M. (1992). Mathematical misunderstandings: Qualitative reasoning about quantitative problems. In J. D. Campbell (Ed.), *The nature and origin of mathematical skills* (pp. 137–154). North Holland. [https://doi.org/10.1016/s0166-4115\(08\)60886-9](https://doi.org/10.1016/s0166-4115(08)60886-9)
- Miller, S. P., Stringfellow, J. L., Kaffar, B. J., Ferreira, D., & Mancl, D. B. (2011). Developing computation competence among students who struggle with mathematics. *Teaching Exceptional Children*, *44*(2), 38–46. <https://doi.org/10.1177/004005991104400204>
- Pallant, J. (2010). *SPSS survival manual*. McGraw-Hill. <https://doi.org/10.4324/9781003117407>
- van Garderen, D., Scheuermann, A., & Poch, A. (2014). Challenges students with learning disabilities experience when using diagrams as a visualization tool to solve mathematics word problems. *ZDM Mathematics Education*, *46*, 135–149. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0519-1>

## ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ | RESEARCH PAPER

# Effective instruction of cognitive schema for subtraction math problems to students with learning disabilities through the use of multiple knowledge representations

Stergios ANGELOPOULOS<sup>1</sup>, Ioannis AGALIoTIS<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Department of Educational and Social Policy, University of Macedonia

---

**KEYWORDS**

Cognitive scheme of operations  
Mathematics  
Instruction  
Problem solving  
Specific learning disabilities  
Teaching

---

**ABSTRACT**

The present research examines the construction and activation of cognitive schemata corresponding to subtraction-compare and subtraction-equalize math word problems by primary school students with specific learning disabilities. In order to facilitate the participants in developing their cognitive schemata, we utilized multiple ways of knowledge representation (manipulatives, pictures, and arithmetic symbols) in the context of an intervention based on the principles of effective instruction. In order to evaluate the results, assessments were conducted prior and immediately after the implementation of the intervention, as well as three weeks after its completion. It was found that participants performed significantly better in problem solving both after the intervention and at follow-up, proving that they benefited from the instruction they had received. Results are discussed in regard to organizing appropriate instruction for students with mathematical difficulties and disabilities.

---

**CORRESPONDENCE**

Stergios Angelopoulos  
Elikonos str. 6, Thessaloniki,  
GR-54639, Greece  
Email: [mea16005@uom.edu.gr](mailto:mea16005@uom.edu.gr)