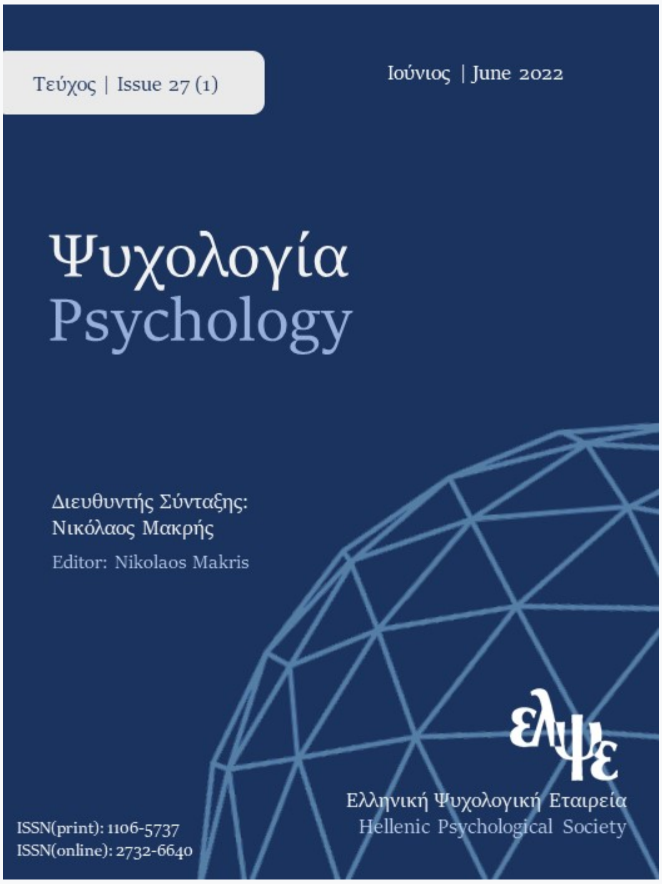
Psychology: the Journal of the Hellenic Psychological Society

Vol 27, No 1 (2022)

Special Section: Learning Counter-intuitive Explanations from a Conceptual Change Perspective



Multiplication always makes bigger? A case of learning with conceptual change in mathematics

Konstantinos P. Christou

doi: [10.12681/psyhps.30685](https://doi.org/10.12681/psyhps.30685)

To cite this article:

Christou, K. P. (2022). Multiplication always makes bigger? A case of learning with conceptual change in mathematics. *Psychology: The Journal of the Hellenic Psychological Society*, *27*(1), 32–47. https://doi.org/10.12681/psyhps.30685

ΨΥΧΟΛΟΓΙΑ | PSYCHOLOGY, 27 (1), 32-47

Ελληνική Ψυχολογική Εταιρεία
Hellenic Psychological Society

ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ | RESEARCH PAPER

Παρανοήσεις των μαθητών στις αριθμητικές πράξεις μέσα από την προσέγγιση της εννοιολογικής αλλαγής

Κωνσταντίνος Π. ΧΡΗΣΤΟΥ[1]

[1] Τμήμα Νηπιαγωγών, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Κοζάνη, Ελλάδα

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

Προκατάληψη του φυσικού αριθμού,
πράξεις,
αριθμός,
εννοιολογική αλλαγή,
πολλαπλασιασμός,
παρανόηση

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ

Κωνσταντίνος Π. Χρήστου
Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
3ο χλμ. Φλώρινας-Νίκης, 53100,
Φλώρινα, Ελλάδα
kchristou@uowm.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής στη μελέτη των λαθών των μαθητών με την έννοια του ρητού αριθμού και πιο συγκεκριμένα, στις παρανοήσεις που εμφανίζονται στις αριθμητικές πράξεις με δοσμένους αριθμούς και αριθμούς που λείπουν (π.χ., 14:_=5). Εξετάστηκε η υπόθεση ότι η *«προκατάληψη του φυσικού αριθμού»*- δηλαδή η τάση να χρησιμοποιείται η αρχική, διαισθητική αντίληψη για τον αριθμό που είναι οργανωμένη σε μία έννοια του αριθμού με ιδιότητες φυσικού αριθμού σε καταστάσεις που εμπλέκονται μη-φυσικοί αριθμοί- θα έχει διπλή επίδραση στις αριθμητικές πράξεις με αριθμούς που λείπουν: α) θα επηρεάζει τους μαθητές να θεωρούν ότι ο πολλαπλασιασμός πάντα μεγαλώνει, ενώ η διαίρεση πάντα μικραίνει τον διαιρετέο, και β) θα επηρεάζει την τάση τους να θεωρούν ότι οι αριθμοί που λείπουν θα μπορούσε να είναι μόνο φυσικοί αριθμοί. Το μοντέλο Εξισώσεων Γενικευμένης Εκτίμησης (GEE: Generalized estimated equations) εφαρμόστηκε στις απαντήσεις 300 μαθητών Ε’ και Στ’ Δημοτικού ενός ενοποιημένου δείγματος δύο προηγούμενων μελετών που εξέτασαν την ίδια υπόθεση. Στους συμμετέχοντες δόθηκαν έργα που ήταν συμβατά ή μη-συμβατά με τις διαισθητικές πεποιθήσεις τους για τις ιδιότητες των αριθμών στις πράξεις. Τα αποτελέσματα υποστήριξαν την υπόθεση της μελέτης. Στα έργα που ήταν συμβατά με τις διαισθητικές πεποιθήσεις για το μέγεθος των αποτελεσμάτων κάθε πράξης, αλλά και για το ότι οι αριθμοί που λείπουν πρέπει να είναι φυσικοί αριθμοί, σημειώθηκαν στατιστικώς υψηλότερες επιδόσεις σε σχέση με τα έργα που διέψευδαν αυτές τις πεποιθήσεις.

Εισαγωγή

Η κατανόηση των μαθηματικών αποτελεί έναν από τους σημαντικότερους παράγοντες που συσχετίζονται θετικά με το κοινωνικό-οικονομικό υπόβαθρο (Ritchie & Bates, 2013) και η κατανόηση της έννοιας του αριθμού αποτελεί ίσως τη σημαντικότερη συνιστώσα της μαθηματικής γνώσης. Η κατανόηση της έννοιας του αριθμού είναι επίσης πολύ σημαντική για την σχολική επίδοση μιας και χρησιμοποιείται σε ένα ευρύ φάσμα μαθηματικών και επιστημονικών πεδίων, όπως η άλγεβρα, η γεωμετρία, η φυσική, η χημεία, κτλ. Μια από τις βασικότερες δυσκολίες των μαθητών με την οικειοποίηση της έννοιας του αριθμού είναι η κατανόηση των ρητών αριθμών. Έστω κι αν οι ρητοί αριθμοί διδάσκονται συστηματικά ήδη από την Δ’ τάξη του δημοτικού, οι δυσκολίες συχνά δεν ξεπερνιούνται ούτε μετά το τέλος της υποχρεωτικής εκπαίδευσης (Bailey et al., 2012). Πολλά από τα λάθη και τις δυσκολίες που εμφανίζουν οι μαθητές με τους ρητούς αριθμούς μπορούν να ερμηνευτούν από την παρεμβολή της προϋπάρχουσας γνώσης τους για τους φυσικούς αριθμούς[1], λόγω των

[1] Το σύνολο των φυσικών αριθμών αποτελείται από τους θετικούς, ακέραιους αριθμούς: 1, 2, 3, …. Το σύνολο των ρητών αριθμών είναι το σύνολο των αριθμών που μπορούν να γραφούν σε μορφή κλάσματος με ακέραιους όρους και παρονομαστή διάφορο του μηδενός και αναπαρίστανται ως κλάσματα ή ως δεκαδικοί.

διαφορετικών χαρακτηριστικών ανάμεσα στα δύο αυτά είδη αριθμών. Το φαινόμενο της παρεμβολής της γνώσης των φυσικών αριθμών σε καταστάσεις που εμπλέκουν μη-φυσικούς αριθμούς είναι από καιρό γνωστό στους ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης αλλά και στους δασκάλους των μαθηματικών (Hart, 1981). Τα τελευταία χρόνια αυτό το φαινόμενο επανα-προσεγγίστηκε μέσα από θεωρίες γνωστικής ανάπτυξης, όπως η θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής, που εστιάζουν σε εκείνες ακριβώς τις περιπτώσεις μάθησης όπου η ύπαρξη προϋπάρχουσας γνώσης όχι μόνο δεν υποστηρίζει, αλλά μπορεί και να εμποδίσει την κατανόηση μιας νέας πληροφορίας, όταν τα χαρακτηριστικά της νέας πληροφορίας βρίσκονται σε σύγκρουση με θεμελιώδη χαρακτηριστικά της προϋπάρχουσας γνωστικής δομής (Vosniadou, et al., 2008). Η παρούσα εργασία χρησιμοποιεί το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής για να εξετάσει λάθη των μαθητών με τους ρητούς αριθμούς, εστιάζοντας σε συγκεκριμένες παρανοήσεις που εμφανίζουν με τις βασικές αριθμητικές πράξεις ανάμεσα σε ρητούς αριθμούς.

Το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής

Το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής, που ειδικά παλιότερα χρησιμοποιούνταν σχεδόν αποκλειστικά για τη μελέτη της μάθησης εννοιών των φυσικών επιστημών, τα τελευταία χρόνια χρησιμοποιείται όλο και περισσότερο και στη μελέτη φαινομένων της μάθησης και της διδασκαλίας μαθηματικών εννοιών (Verschaffel & Vosniadou, 2004· Vosniadou, 2007) (για μία πιο εκτενή επιχειρηματολογία για τη χρήση του θεωρητικού πλαισίου της εννοιολογικής αλλαγής στην μελέτη της ανάπτυξης των μαθηματικών εννοιών, βλ. Χρήστου, 2019). Τα ευρήματα αυτών των μελετών δείχνουν ότι, όπως τα παιδιά διαθέτουν εναλλακτικές αντιλήψεις για έννοιες των φυσικών επιστημών (π.χ., ότι η Γη είναι σταθερή και επίπεδη) (Vosniadou et al., 2008), έτσι φαίνεται να διαθέτουν και εναλλακτικές αντιλήψεις για τις μαθηματικές έννοιες - εναλλακτικές με την σημασία του διαφορετικού από το χαρακτηρισμένο ως το μαθηματικώς ορθό. Οι εναλλακτικές αυτές αντιλήψεις των μαθητών, που είναι είτε αποτέλεσμα διαισθητικών πεποιθήσεων (Fischbein, 1987) είτε του τρόπου εισαγωγής τους σε μια έννοια μέσα από την τυπική εκπαίδευση (Resnick, 1986), συχνά όχι μόνο δεν υποστηρίζουν αλλά στέκονται εμπόδιο στην μάθηση νέων και ανώτερων μαθηματικών εννοιών (Fischbein et al., 1985· Greeno, 1991). Τέτοια παραδείγματα ενναλακτικών αντιλήψεων για μαθηματικές έννοιες πέραν της έννοιας του αριθμού είναι η έννοια του απείρου (Tsamir & Tirosh, 2007), ή της εφαπτομένης καμπύλης (Biza & Zachariades, 2006).

Εστιάζοντας στην μελέτη της ανάπτυξης της έννοιας του αριθμού, η θεωρία πλαισίου στην εννοιολογική αλλαγή περιέγραψε τον τρόπο με τον οποίο είναι οργανωμένη η αρχική γνώση για τον αριθμό και ανέδειξε τις επιπτώσεις της παρεμβολής αυτής της γνώσης στη μάθηση των ρητών (Vosniadou et al., 2008). Η συγκεκριμένη προσέγγιση υποστήριξε ότι τα παιδιά, πολύ πριν εκτεθούν σε συστηματική διδασκαλία στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού σχολείου, μέσα από καθημερινές εμπειρίες με τον αριθμό όπως η εμπειρία της καταμέτρησης και της απαγγελίας της σειράς των αριθμολέξεων, οργανώνουν μια αρχική αντίληψη για τον αριθμό που έχει τη μορφή θεωρίας για το τι είναι αριθμός και πώς πρέπει να συμπεριφέρεται (Gelman, 1994· Smith et al., 2005· Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Κάποια βασικά χαρακτηριστικά αυτής της αρχικής αντίληψης είναι ότι οι αριθμοί είναι διακριτοί, δηλαδή κάθε αριθμός έχει ένα μοναδικό επόμενο και προηγούμενο αριθμό, μπορούν να διαταχθούν χρησιμοποιώντας τη σειρά των αριθμολέξεων, μεγαλύτερος είναι ο αριθμός με τα περισσότερα ψηφία, η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνουν τους αρχικούς όρους των πράξεων ενώ η διαίρεση και η αφαίρεση μικραίνουν τον διαιρετέο και τον μειωτέο αντίστοιχα (Smith et al., 2005· Vosniadou & Verschaffel, 2004). Γίνεται έτσι εμφανές ότι η αρχική αυτή αντίληψη για τον αριθμό ως αριθμός της καταμέτρησης (counting number) (Gelman, 2000), δίνει στην έννοια του αριθμού ιδιότητες που την καθιστούν κοντινή στην μαθηματική έννοια του φυσικού αριθμού (Smith et al., 2005· Vamvakoussi & Vosniadou, 2010).

Η αρχική αντίληψη των παιδιών ότι ο αριθμός έχει τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά που αναφέρονται παραπάνω, πέραν ότι επιβεβαιώνεται από τη καθημερινή τους εμπειρία με τους φυσικούς αριθμούς, ενισχύεται περαιτέρω μέσα από τη σχολική εκπαίδευση, που στις πρώτες τάξεις του σχολείου εστιάζει αποκλειστικά στη διδασκαλία του τυπικού συμβολισμού και των ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών. Με τον τρόπο αυτό εδραιώνεται περαιτέρω, καταλήγοντας να αποτελεί μια κυρίαρχη αντίληψη για τον αριθμό και τις ιδιότητές του που οι μαθητές χρησιμοποιούν όταν βρίσκονται αντιμέτωποι με καταστάσεις που απαιτούν συλλογισμούς με αριθμούς.

Η τάση των μαθητών να χρησιμοποιούν την αρχική τους αντίληψη για τον αριθμό ακόμα και σε περιπτώσεις που εμπλέκονται μη-φυσικοί αριθμοί, όπως οι ρητοί και οι αρνητικοί αριθμοί, έχει χαρακτηριστεί ως *Προκατάληψη του Φυσικού Αριθμού* (ΠΦΑ από εδώ και στο εξής) (Van Dooren et al., 2015), από τον όρο *προκατάληψη του ολόκληρου (ακέραιου) αριθμού* (whole number bias) όπως είχε αρχικά προταθεί από τις Ni και Zhou (2005). Ως αποτέλεσμα αυτής της τάσης, λάθη και δυσκολίες κατανόησης εμφανίζονται γιατί, όπως θα φανεί ακόμα πιο καθαρά παρακάτω, οι φυσικοί αριθμοί βασίζονται σε διαφορετικές αρχές και έχουν διαφορετικές ιδιότητες από τους ρητούς αριθμούς (Carpenter et al., 1993· Gelman, 2000· Smith et al., 2005· Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Γίνεται, λοιπόν, εμφανές από τα παραπάνω ότι το φαινόμενο της ΠΦΑ, που παρουσιάζεται διεξοδικά στην παρούσα εργασία, αναδεικνύει την αρνητική επίδραση της προϋπάρχουσας γνωστικής δομής για τον αριθμό στην κατανόηση της νέας πληροφορίας για τον ρητό αριθμό. Για το λόγο αυτό, το πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής κρίνεται ότι μπορεί να συνεισφέρει στη μελέτη αυτού του φαινομένου.

Η προκατάληψη του φυσικού αριθμού στις αριθμητικές πράξεις

Τα τελευταία χρόνια, ένα εκτεταμένο σώμα εμπειρικών μελετών έχει καταφέρει να εξηγήσει συγκεκριμένες δυσκολίες των μαθητών και λάθη σε διαφορετικούς τομείς της μαθηματικής γνώσης, όπως στη διάταξη, το μέγεθος και τα αποτελέσματα των πράξεων μεταξύ των ρητών αριθμών, ως αποτέλεσμα της ΠΦΑ. Πιο συγκεκριμένα, στην περίπτωση των δεκαδικών αριθμών, οι μαθητές συχνά εμφανίζονται να θεωρούν, λανθασμένα, ότι όσο πιο πολλά ψηφία έχει ένας δεκαδικός αριθμός τόσο μεγαλύτερη είναι η αξία του, π.χ. ότι ο 0,476 είναι μεγαλύτερες από τον 0,9 (Nesher & Peled, 1986· Roell et al., 2019). Στην ίδια κατεύθυνση, έχει καταγραφεί η τάση να θεωρείται ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμητής και ο παρονομαστής ενός κλάσματος, τόσο μεγαλύτερη είναι η αξία του (Hartnett & Gelman, 1998· Moss, 2005· Stafylidou & Vosniadou, 2004), κάτι που οδηγεί σε λάθη στην διάταξη κλασμάτων.

Ένα άλλο προνομιακό πεδίο εμφάνισης αυτής της τάσης είναι η δομή του συνόλου των ρητών αριθμών, επειδή αυτή διαφοροποιείται θεμελιωδώς από τη δομή των φυσικών αριθμών. Το σύνολο των φυσικών αριθμών χαρακτηρίζεται από διακριτότητα (δηλαδή, μεταξύ δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών δεν υπάρχει άλλος φυσικός αριθμός). Αντίθετα, το σύνολο των ρητών αριθμών είναι πυκνό, πράγμα που σημαίνει ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί μεταξύ δύο οποιονδήποτε ρητών αριθμών. Η τάση των μαθητών να θεωρούν ότι μεταξύ δύο ψευτο-διαδοχικών αριθμών (π.χ. 0,5 και 0,6), δεν υπάρχει άλλος αριθμός, θα μπορούσε εύλογα να ερμηνευτεί ως αποτέλεσμα της ΠΦΑ (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010).

Η έρευνα που εστιάζει στη μελέτη του φαινομένου της ΠΦΑ σχετικά πρόσφατα εστίασε και στη μελέτη των πεποιθήσεων των μαθητών για τα αποτελέσματα των απλών αριθμητικών πράξεων, επισημαίνοντας την έντονη τάση των μαθητών όλων των βαθμίδων να θεωρούν ότι η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός ανάμεσα σε δύο αριθμούς έχεις ως αποτέλεσμα αριθμό μεγαλύτερο των αρχικών όρων, ενώ η αφαίρεση και η διαίρεση έχει ως αποτέλεσμα αριθμό μικρότερο των διαιρετέων και των μειωτέων αντίστοιχα (Vamvakoussi et al., 2012, 2013· Van Hoof et al., 2015).

Ο πολλαπλασιασμός πάντα μεγαλώνει;

Η τάση των μαθητών να θεωρούν ότι *ο πολλαπλασιασμός πάντα μεγαλώνει τους αριθμούς ενώ η διαίρεση τους μικραίνει*, είναι ένα γνωστό φαινόμενο ήδη από το 1920 που καταγράφηκε από τον Thorndike (1922 όπως αναφέρεται από τον Kruger, 1986). Από τότε, αυτή η παρανόηση εξετάστηκε σε διάφορες εμπειρικές μελέτες μόνο για να αναδειχθεί πόσο συστηματικά εμφανίζεται τόσο σε λεκτικά προβλήματα, όπου οι αριθμοί αναπαριστούν συγκεκριμένες ποσότητες (Bell et al., 1981), όσο και σε καθαρά αριθμητικά πλαίσια (Dixon et al., 2001· Greer, 1989). Για παράδειγμα, οι μαθητές έτειναν να επιλέγουν, εσφαλμένα, εκείνη την πράξη που θεωρούσαν ότι θα έλυνε το συγκεκριμένο λεκτικό πρόβλημα, βασιζόμενοι στις διαισθητικές πεποιθήσεις τους ότι ο πολλαπλασιασμός παράγει πάντα έναν μεγαλύτερο αριθμό και ότι η διαίρεση παράγει πάντα έναν μικρότερο αριθμό (Fischbein et al., 1985). Επιπροσθέτως, σε ένα πιο αμιγώς αριθμητικό πλαίσιο, όπου τα σύμβολα των αριθμών δεν αναφέρονταν ρητά σε ποσότητες, η πλειοψηφία των μαθητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης απαντούσαν λανθασμένα στο ερώτημα *αν το αποτέλεσμα της πράξης 4,6:0,6 είναι αριθμός μεγαλύτερος ή μικρότερος από 4,6* (Greer, 1987). Οι αντίστοιχες παρανοήσεις, ότι η πρόσθεση πάντα μεγαλώνει ενώ η αφαίρεση πάντα μικραίνει τους αριθμούς, εμφανίστηκαν επίσης τόσο σε πλαίσιο λεκτικών προβλημάτων (De Corte et al., 1990), όσο και σε αμιγώς αριθμητικό πλαίσιο (Dixon κ.α., 2001).

Ο Fischbein και οι συνεργάτες του απέδωσαν τις πεποιθήσεις αυτές για τα αποτελέσματα των πράξεων στην ύπαρξη άδηλων, διαισθητικών μοντέλων, που οι μαθητές διαθέτουν για κάθε αριθμητική πράξη (Fischbein et al., 1985), όπως το μοντέλο της συσσώρευσης για την πρόσθεση και του διαχωρισμού (απομάκρυνσης) για την αφαίρεση, το μοντέλο της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης για τον πολλαπλασιασμό και του μερισμού για τη διαίρεση, όπου ένας αριθμός μοιράζεται σε έναν δοσμένο αριθμό από ίσα μέρη. Μέσα από την προσέγγιση της ΠΦΑ υποστηρίχθηκε ότι αυτά τα άδηλα μοντέλα είναι συμβατά και υποστηρίζονται από την αρχική γνώση των μαθητών για τους φυσικούς αριθμούς και την εμπειρία τους με πράξεις αποκλειστικά με τέτοιους αριθμούς τα πρώτα χρόνια της σχολικής εκπαίδευσης (Vamvakoussi et al., 2012). Η επίδραση της ΠΦΑ στις αριθμητικές πράξεις με τον τρόπο που περιγράφηκε είναι εύλογη αν σκεφτεί κανείς ότι τα αποτελέσματα της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού ανάμεσα σε φυσικούς αριθμούς είναι πράγματι αριθμοί μεγαλύτεροι των αρχικών όρων (εκτός βέβαια αν στους αρχικούς όρους εμπλέκονται το 0 και 1 αντίστοιχα), κι επίσης τα αποτελέσματα της αφαίρεσης και της διαίρεσης με φυσικούς αριθμούς είναι πάντοτε αριθμοί μικρότεροι από τον μειωτέο και τον διαιρετέο, αντίστοιχα. Αυτά όμως δεν ισχύουν για ένα μεγάλο εύρος μη-φυσικών αριθμών για τους οποίους το μέγεθος του αποτελέσματος εξαρτάται από τους αρχικούς όρους της πράξης. Πιο συγκεκριμένα, τα αποτελέσματα των πράξεων με ρητούς αριθμούς μικρότερους της μονάδας και αρνητικούς αριθμούς διαψεύδουν τις διαισθήσεις των μαθητών για το μέγεθος του αποτελέσματος του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης στην πρώτη περίπτωση, και της πρόσθεσης και της αφαίρεσης στη δεύτερη. Για παράδειγμα, η πράξη 9:0,3 δίνει αποτέλεσμα (30) μεγαλύτερο από 9, ενώ η πράξη 4×0,2 δίνει αποτέλεσμα (0,8) μικρότερο από 4· η πρόσθεση 8+(- 5)=3 δίνει αποτέλεσμα μικρότερο από 8, ενώ η αφαίρεση 7-(-5)=12, δίνει αποτέλεσμα μεγαλύτερο από το 7 και από το -5.

Μέσα από την προσέγγιση της ΠΦΑ, σε σειρά πρόσφατων μελετών μετρήθηκαν τόσο οι επιδόσεις όσο και οι χρόνοι αντίδρασης των συμμετεχόντων σε έργα με αριθμητικές πράξεις ανάμεσα σε δοσμένους αριθμούς και αριθμούς που έλειπαν και συμβολίζονταν με γράμματα (π.χ., 5+2x) (Vamvakoussi et al., 2012, 2013). Τα έργα που δόθηκαν ήταν έτσι σχεδιασμένα ώστε να είναι συμβατά ή μη-συμβατά με τις διαισθητικές πεποιθήσεις των μαθητών για τα αποτελέσματα των πράξεων. Τα αποτελέσματα των μελετών αυτών υποστήριξαν την υπόθεση της ΠΦΑ, καθώς έδειξαν ότι οι συμμετέχοντες είχαν υψηλότερες επιδόσεις και ταχύτερες αποκρίσεις στα έργα που ήταν συμβατά με τις διαισθητικές τους πεποιθήσεις, σε σχέση με τα έργα τα οποία ήταν μη-συμβατά με αυτές. Για παράδειγμα, απαντούσαν ότι δεν μπορεί το *z×7 να είναι μικρότερο από 7* (Vamvakoussi et al., 2013) ενώ το 2/y είναι πάντα μικρότερο από 2. Ωστόσο, οι ερευνητές αυτοί ερμήνευσαν τα συγκεκριμένα αποτελέσματα μόνο ως αποτέλεσμα της επίδρασης της ΠΦΑ στις πεποιθήσεις των συμμετεχόντων για το μέγεθος του αποτελέσματος των πράξεων. Με άλλα λόγια, θεώρησαν ότι οι μαθητές δίνουν λανθασμένες απαντήσεις στα συγκεκριμένα έργα, διότι εστιάζουν μόνο στο σύμβολο της πράξης. Για παράδειγμα, εστιάζουν στο σύμβολο του πολλαπλασιασμού στην πράξη z×7 και βγάζουν το συμπέρασμα ότι το αποτέλεσμα θα είναι μεγαλύτερο, καθώς θεωρούν ότι ο πολλαπλασιασμός πάντα μεγαλώνει τους αριθμούς. Παρόλα αυτά, οι μαθητές θα μπορούσαν να έχουν καταλήξει στις ίδιες, λανθασμένες απαντήσεις και έχοντας μπει στη διαδικασία να δοκιμάσουν, νοερά, συγκεκριμένους αριθμούς στη θέση των γραμμάτων. Μια τέτοια στρατηγική θα επηρεάζονταν επίσης από τη ΠΦΑ. Πιο συγκεκριμένα, επηρεασμένοι από την ΠΦΑ οι μαθητές που θα είχαν την τάση να δοκιμάζουν μόνο φυσικούς αριθμούς στους αριθμούς που λείπουν, θα κατέληγαν και πάλι σε λανθασμένες εκτιμήσεις για τα αποτελέσματα αυτών των πράξεων.

Αυτή η τελευταία ερμηνεία για τις συγκεκριμένες απαντήσεις των μαθητών υποστηρίζεται από μελέτες που, χρησιμοποιώντας το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής στη μελέτη του τρόπου με τον οποίο κατανοούν οι μαθητές τη χρήση των γραμμάτων στην άλγεβρα, έδειξαν την τάση τους να θεωρούν ότι τα γράμματα στις αλγεβρικές παραστάσεις αναπαριστούν, κατά προτεραιότητα, φυσικούς αριθμούς κι όχι οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό, όπως έχουν διδαχθεί (Christou & Vosniadou, 2012). Για παράδειγμα, οι μαθητές θεωρούσαν ότι το κ+3 αναπαριστά μόνο φυσικούς αριθμούς μεγαλύτερους από 3, ενώ το 4γ αναπαριστά μόνο φυσικούς αριθμούς πολλαπλάσιους του 4, και δεν δεχόντουσαν ότι θα μπορούσαν να αναπαραστήσουν και κλάσματα, δεκαδικούς ή αρνητικούς αριθμούς. Σε μελέτες, μάλιστα, με ατομικές συνεντεύξεις, στην πλειοψηφία τους οι μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης απάντησαν ότι το 5δ είναι πάντα μεγαλύτερο από το 4/δ *επειδή ο πολλαπλασιασμός κάνει τους αριθμούς μεγαλύτερους από ότι η διαίρεση*. Οι μαθητές αυτοί υποστηρίζαν την συγκεκριμένη άποψη αντικαθιστώντας αριθμούς στα γράμματα που στις περισσότερες περιπτώσεις ήταν φυσικοί αριθμοί, παρά τις υποδείξεις του/της ερευνητή/τριας να δοκιμάσουν και με άλλα είδη αριθμών (Christou & Vosniadou, 2012).

Ωστόσο, εξακολουθούσε να υπάρχει ανάγκη πρόσθετων ερευνητικών δεδομένων για την υποστήριξη μιας δυνητικά διπλής επίδρασης της ΠΦΑ στις αριθμητικές πράξεις με αριθμούς που λείπουν. Αν, δηλαδή, η ΠΦΑ επιδρά όχι μόνο στη διαμόρφωση γενικών πεποιθήσεων για το μέγεθος του αποτελέσματος κάθε πράξης, όπως είχαν δείξει οι προηγούμενες μελέτες (Vamvakoussi et al., 2012, 2013), αλλά επιδρά και στην τάση των μαθητών να εξετάζουν αυτά τα αποτελέσματα δοκιμάζοντας, όμως, μόνο με φυσικούς αριθμούς. Αυτό το κενό καλύφθηκε με μια σειρά μελετών, στην οποία ανήκει και η παρούσα εργασία (Christou, 2015a, 2015b).

Σε προηγούμενες μελέτες δόθηκαν στους μαθητές έργα που ήταν συμβατά και μη-συμβατά με τις πεποιθήσεις τους που αφορούν το μέγεθος των αποτελεσμάτων των αριθμητικών πράξεων (π.χ., ότι η διαίρεση μικραίνει). Στις συγκεκριμένες μελέτες, πέραν από μία κατηγορία με έργα μη-συμβατά με τις διαισθητικές πεποιθήσεις των μαθητών, τους δόθηκαν και δύο διαφορετικές κατηγορίες από έργα συμβατά με τις πεποιθήσεις τους: έργα στα οποία οι αριθμοί που έλειπαν ήταν φυσικοί αριθμοί (π.χ., 3+_=8) και έργα στα οποία οι αριθμοί που έλειπαν ήταν ρητοί αριθμοί μεγαλύτεροι της μονάδας, ώστε αφενός να φέρουν αποτέλεσμα συμβατό με τις διαισθητικές τους πεποιθήσεις για το μέγεθος του αποτελέσματος της πράξης (π.χ., 6×_=11), αλλά αφετέρου ο αριθμός που λείπει να μην είναι φυσικός αριθμός, αλλά ρητός (Christou, 2015a, 2015b). Διαφορές στις επιδόσεις στις παραπάνω κατηγορίες έργων θα έδειχναν αν οι μαθητές αποφασίζουν για την δυνατότητα να βρεθεί κάποιος αριθμός που θα κάνει τις ισότητες αληθείς βασιζόμενοι μόνο στις πεποιθήσεις τους για το μέγεθος των αποτελεσμάτων κάθε πράξης, ή εστιάζουν και στον ίδιο τον αριθμό που λείπει. Τα αποτελέσματα των μελετών αυτών υποστήριξαν τη διπλή επίδραση της ΠΦΑ στις πράξεις με αριθμούς που λείπουν. Στην παρούσα εργασία, τα αποτελέσματα των δύο προηγούμενων εμπειρικών μελετών επανεξετάζονται συνολικά, εφαρμόζοντας νέα ανάλυση στα δεδομένα από τις απαντήσεις των μαθητών. Η ανάλυση αυτή επιτρέπει μία σε μεγαλύτερο βάθος εξέταση του φαινομένου της διπλής επίδραση της ΠΦΑ, σε σχέση με τις προηγούμενες μελέτες.

Η παρούσα εργασία

Συνοψίζοντας, πρόσφατες μελέτες σε παιδιά Ε’ και ΣΤ’ Δημοτικού (Christou, 2015a, 2015b) υποστήριξαν την υπόθεση ότι στις αριθμητικές πράξεις με αριθμούς που λείπουν (π.χ., 5-_=8) η ΠΦΑ επιδρά με δύο τρόπους στις απαντήσεις των μαθητών: α) τους ωθεί να βασίζονται σε διαισθητικές πεποιθήσεις όσον αφορά τα αποτελέσματα των πράξεων, που παίρνουν τη μορφή γενικών κανόνων, όπως ότι *ο πολλαπλασιασμός πάντα μεγαλώνει τους αριθμούς, ενώ η διαίρεση τους μικραίνει*, και β) τους επηρεάζει να σκέφτονται κατά προτεραιότητα με φυσικούς αριθμούς για τους αριθμούς που λείπουν, κι έτσι να εξετάζουν τα αποτελέσματα των πράξεων δοκιμάζοντας μόνο με φυσικούς αριθμούς. Τα αποτελέσματα αυτά των προηγούμενων μελετών, προέκυψαν από στατιστικές αναλύσεις με συγκρίσεις μέσων όρων στις επιδόσεις των μαθητών στις διαφορετικές κατηγορίες των ειδικά σχεδιασμένων έργων που είχαν δοθεί για να εξεταστεί η παραπάνω υπόθεση.

Στόχος της συγκεκριμένης εργασίας είναι να επανεξετάσει την παραπάνω υπόθεση, χρησιμοποιώντας διαφορετική ανάλυση των δεδομένων. Η νέα ανάλυση που θα χρησιμοποιηθεί έχει τη δυνατότητα να εξετάσει την επίδραση των δύο παραγόντων της ΠΦΣ στα συγκεκριμένα έργα χειρίζοντάς τους ως δύο διακριτούς παράγοντες. Με τον τρόπο αυτό θα μπορέσει να αναδειχθούν τόσο ο ρόλος κάθε παράγοντα χωριστά, όσο και διαφορές στην ισχύ καθενός από αυτούς τους παράγοντες, όπως επίσης και της σχέσης τους με τις αριθμητικές πράξεις.

Υπόθεση, λοιπόν, της μελέτης που παρουσιάζεται στην παρούσα εργασία είναι η ύπαρξη διπλής επίδρασης της ΠΦΑ σε πράξεις με αριθμούς που λείπουν, όπως αυτή αναφέρεται παραπάνω. Από την υπόθεση αυτή προκύπτουν τα παρακάτω ερευνητικά ερωτήματα:

Ερώτημα 1 είναι αν η αρχική γνώση των μαθητών για τους φυσικούς αριθμούς θα επηρεάζει τις κρίσεις τους όσον αφορά τη δυνατότητα να βρεθούν τέτοιοι αριθμοί που θα έκαναν δυνατές τις δοσμένες ισότητες, δηλαδή που θα μπορούσαν να δώσουν τα συγκεκριμένα αποτελέσματα στις πράξεις που αναγράφονται. Προβλέπεται ότι οι μαθητές θα κάνουν περισσότερα λάθη στα μη-συμβατά έργα, όπου οι διαισθητικές τους πεποιθήσεις για το μέγεθος του αποτελέσματος των πράξεων, αλλά και για το είδος των αριθμών που λείπουν, θα τους οδηγούσαν σε λανθασμένες κρίσεις σε σχέση με τα έργα που είναι συμβατά με τις παραπάνω πεποιθήσεις (Πρόβλεψη 1).

Ερώτημα 2 της μελέτης είναι αν υπάρχουν διαφορές στις επιδόσεις των μαθητών στα συγκεκριμένα έργα του ερωτηματολογίου, που οφείλονται σε διαφορές στη σχολική βαθμίδα. Θα αναμένονταν καλύτερες επιδόσεις από τους μαθητές της Στ’ τάξης σε σχέση με τους μαθητής της Ε’ τάξης, γιατί έχουν εκτεθεί σε περισσότερη γνώση των ρητών αριθμών και των πράξεων ανάμεσά τους (Πρόβλεψη 2)· παρόλα αυτά αναμένεται ότι και η ΠΦΑ θα είναι έντονη και στους μαθητές της Στ’ τάξης, καθώς προηγούμενες μελέτες έχουν δείξει ότι η συγκεκριμένη προκατάληψη συνεχίζει να επηρεάζει τις επιδόσεις των μαθητών σε έργα που αφορούν ιδιότητες των ρητών αριθμών ακόμα και μέχρι το τέλος του σχολείου και την ενήλικη ζωή (Obersteiner, Van Hoof, Verschaffel, & Van Dooren, 2015· Tirosh & Graeber, 1989· Vamvakoussi et al., 2013).

Ερώτηση 3 είναι αν θα υπάρχουν διαφορές ανά πράξη στις επιδόσεις των μαθητών, που θα εμφανίζονται στις διάφορες κατηγορίες έργων. Θα αναμένονταν υψηλότερες επιδόσεις στην πρόσθεση σε σχέση με την αφαίρεση, γιατί προηγούμενες έρευνες έχουν δείξει ότι οι μαθητές δυσκολεύονται περισσότερο με νοητές πράξεις στην αφαίρεση σε σχέση με την πρόσθεση (Dixon et al., 2001). Επίσης, στη βιβλιογραφία υπάρχουν δεδομένα που υποστηρίζουν την πρόβλεψη ότι στα έργα που είναι συμβατά με τις πεποιθήσεις για το μέγεθος των αποτελεσμάτων των πράξεων θα υπάρχουν υψηλότερες επιδόσεις στα έργα πολλαπλασιασμού σε σχέση με τα έργα διαίρεσης, αλλά αυτό δε θα εμφανιστεί απαραίτητα και στα έργα που είναι μη-συμβατά με αυτές τις πεποιθήσεις (Πρόβλεψη 3). Αυτό διότι διαφορετικές έρευνες στη βιβλιογραφία έχουν δείξει αντικρουόμενα αποτελέσματα. Προηγούμενες έρευνες με τα έργα που χρησιμοποιήθηκαν και στην παρούσα μελέτη έδειξαν ότι οι μαθητές είναι περισσότερο διατεθειμένοι να δεχθούν ότι η διαίρεση μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα αριθμούς μεγαλύτερους από τους αρχικούς όρους, παρά να δεχθούν ότι ο πολλαπλασιασμός μπορεί να έχει αποτελέσματα μικρότερα σε σχέση με τους αρχικούς όρους (Christou, 2015a, 2015b). Παρόλα αυτά, άλλες μελέτες με λίγο διαφορετικά έργα, έδειξαν τα αντίθετα αποτελέσματα (Van Hoof et al., 2015).

Μέθοδος

Συμμετέχοντες

Στην μελέτη συμμετείχαν 300 μαθητές/τριες Ε’ και Στ’ Δημοτικού από διαφορετικά δημόσια Δημοτικά σχολεία της Ελλάδας, από την Αττική και από την περιφέρεια· από την Ε’ τάξη συμμετείχαν 106 και από την Στ’ τάξη 194 παιδιά. Στα Ελληνικά σχολεία, οι μαθητές ήδη από την Δ’ Δημοτικού διδάσκονται τις ιδιότητες των ρητών και πράξεις με ρητούς αριθμούς, σε δεκαδική ή κλασματική μορφή. Στα βιβλία και στα αναλυτικά προγράμματα του Δημοτικού Σχολείου, δεν υπάρχει άμεση αναφορά στις διαφορές στις πράξεις ανάμεσα σε φυσικούς και μη-φυσικούς αριθμού.

Υλικά

Στους συμμετέχοντες δόθηκε να συμπληρώσουν ένα έντυπο ερωτηματολόγιο που περιλάμβανε ερωτήσεις για πράξεις με ρητούς αριθμούς και άλλες ερωτήσεις κατανόησης των ρητών. Μόνο οι 28 πρώτες ερωτήσεις κάθε ερωτηματολογίου που ήταν κοινές σε όλο το δείγμα αναλύονται σε αυτή την εργασία. Οι 28 αυτές ερωτήσεις αφορούσαν ερωτήσεις/έργα-ισότητες με πράξεις ανάμεσα σε δοσμένους αριθμούς και αριθμούς που έλειπαν και συμβολίζονταν με κενά· το αποτέλεσμα της κάθε πράξης ήταν επίσης δοσμένο (π.χ., 2:_=5). Από τους μαθητές ζητήθηκε να αξιολογήσουν τις δοσμένες ισότητες ως προς το αν είναι δυνατόν να βρεθεί ένας τέτοιος αριθμός που θα τις έκανε αληθείς. Δηλαδή, αν γίνεται ή όχι να βρεθεί ένας τέτοιος αριθμός που θα έδινε στη συγκεκριμένη αναγραφόμενη πράξη το δοσμένο αποτέλεσμα. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε δοσμένη ισότητα, ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες να επιλέξουν ανάμεσα σε δύο δοσμένες εναλλακτικές απαντήσεις: *γίνεται* και *δεν γίνεται*, εκείνη που θεωρούν σωστή. Η ακριβής ερώτηση ήταν: «Για κάθε μία από τις παρακάτω ισότητες, μπορείς να πεις αν υπάρχει αριθμός που όταν τον συμπληρώσουμε στο κενό να μας δίνει το αποτέλεσμα μετά το ίσον; Αν ναι, επίλεξε την απάντηση: *Γίνεται*. Αν όχι, επίλεξε την απάντηση: *Δε γίνεται.*» Στις δοσμένες οδηγίες επισημάνθηκε ότι δεν χρειάζεται να βρουν τον αριθμό που λείπει, αλλά μόνο να σκεφτούν αν είναι δυνατόν να βρεθεί ένας τέτοιος αριθμός.

Για να εξεταστεί η βασική υπόθεση της έρευνας σχεδιάστηκαν έργα που είναι συμβατά και μη-συμβατά με τις πεποιθήσεις των μαθητών όσον αφορά το μέγεθος των αριθμών που εμφανίζονταν ως τελικό αποτελέσματα των πράξεων αλλά και όσον αφορά των είδος των αριθμών που λείπουν (φυσικοί/μη-φυσικοί).

Υπήρχαν τρεις βασικές κατηγορίες έργων, παραδείγματα των οποίων παρουσιάζονται στον Πίνακα 1: α) έργα στα οποία η αναγραφόμενη πράξη και το αποτέλεσμα ήταν συμβατό με τις διαισθητικές πεποιθήσεις των μαθητών για τα αποτελέσματα των πράξεων (δηλαδή η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός μεγάλωνε, ενώ η αφαίρεση και η διαίρεση μίκραινε) και όπου οι αριθμοί που έλειπαν ήταν φυσικοί αριθμοί (π.χ., 7×_=21) (κατηγορία: *Συμβατά με Αριθμό/ Συμβατά με Πράξη*) β) έργα με αποτελέσματα συμβατά με τις διαισθητικές πεποιθήσεις των μαθητών για τα αποτελέσματα των πράξεων, όπου οι αριθμοί που έλειπαν ήταν ρητοί (π.χ., 6×_=11) (κατηγορία: *μη-Συμβατά με Αριθμό/ Συμβατά με Πράξη*) γ) έργα στα οποία παραβιάζονταν οι διαισθητικές πεποιθήσεις των μαθητών για τα αποτελέσματα των αριθμητικών πράξεων (π.χ., 2:_=5) και ο αριθμός που έλειπε ήταν, φυσικά, ρητός (κατηγορία: *μη-Συμβατά με Αριθμό/ μη-Συμβατά με Πράξη*).

Εδώ θα πρέπει να γίνουν κάποιες βασικές επισημάνσεις όσον αφορά το σχεδιασμό των έργων. Δεν μπορεί να υπάρξει κατηγορία έργων *μη-Συμβατά με Πράξη/ Συμβατά με Αριθμό* γιατί, τα αποτελέσματα των πράξεων με φυσικούς αριθμούς δεν μπορεί παρά να είναι συμβατά με τις πεποιθήσεις των μαθητών για τα αποτελέσματα των πράξεων, όπως αναλύθηκε και στην εισαγωγή αυτής της εργασίας.

Επίσης, στα έργα πρόσθεσης και αφαίρεσης, όπου η πρόσθεση μικραίνει ενώ η αφαίρεση μεγαλώνει (π.χ., 8+_=3), η σωστή απάντηση για τους μαθητές αυτής της ηλικίας είναι *δεν γίνεται*. Αυτό συμβαίνει γιατί οι μαθητές αυτής της ηλικίας δεν έχουν ακόμη διδαχθεί τους αρνητικούς αριθμούς κι έτσι δεν έχει ακόμα παραβιαστεί η αρχική πεποίθησή τους ότι η πρόσθεση πάντα μεγαλώνει ενώ η αφαίρεση πάντα μικραίνει τους αριθμούς[2]. Για το λόγο αυτό οι ερωτήσεις αυτές δεν μπήκαν στην κατηγορία *μη-Συμβατά με Αριθμό/ μη-Συμβατά με Πράξη*, όπως οι αντίστοιχες των πράξεων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης, αλλά στην κατηγορία *Εξουδετερωτές*, επειδή λειτουργούν ως εξουδετερωτές της συνεχόμενης απάντησης *γίνεται* που είναι και η μόνη σωστή στα υπόλοιπα έργα.

Τέλος, στα έργα πρόσθεσης και αφαίρεσης που ήταν *μη-Συμβατά με Αριθμό/ Συμβατά με Πράξη*, τα αποτελέσματα των πράξεων ήταν ρητοί αριθμοί σε μορφή δεκαδικού (π.χ., _+ 3 = 4,7). Με τον τρόπο αυτόν γινόταν μία επιπλέον νύξη ότι όλοι οι γνωστοί αριθμοί θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν και άρα ότι οι μαθητές θα μπορούσαν να σκεφτούν και μη-φυσικούς αριθμούς.

Διαδικασία

Οι μαθητές συμπλήρωσαν τα ερωτηματολόγια ατομικά, στην τάξη τους, παρουσία του καθηγητή τους των μαθηματικών και μιας ερευνήτριας. Στις οδηγίες που δόθηκαν προφορικά, αλλά και γραπτά στην αρχή του ερωτηματολογίου, έγινε ξεκάθαρο ότι δεν απαιτείται από τους μαθητές να βρουν τους αριθμούς που λείπουν, αλλά να επιλέξουν από τις δύο εναλλακτικές εκείνη που, κατά τη γνώμη τους, αντιπροσωπεύει τη σωστή απάντηση. Συγκεκριμένα οι οδηγίες που δόθηκαν ήταν: «Υπάρχει μόνο μία σωστή απάντηση σε κάθε δοσμένη

[2] Οι αρνητικοί αριθμοί είναι εκείνοι που ανατρέπουν τις αρχικές πεποιθήσεις των μαθητών ότι η πρόσθεση πάντα μεγαλώνει ενώ η αφαίρεση πάντα μικραίνει τους αριθμούς, καθώς το αποτέλεσμα πρόσθεσης με αρνητικό αριθμό είναι αριθμός μικρότερος του αρχικού, π.χ., 7+(-2)=5. Αντίστοιχα, αφαίρεση με αρνητικό αριθμό έχει ως αποτέλεσμα αριθμό μεγαλύτερο του αρχικού, π.χ., 5-(-4)=5+4=9

ερώτηση. Επίλεξε μόνο τη μία από τις δύο απαντήσεις που θεωρείς σωστή. Μπορείς να σκεφτείς με οποιοδήποτε είδος αριθμού γνωρίζεις, δηλαδή κάθε αριθμό που έχεις συναντήσει στα μαθηματικά, όποια μορφή κι αν έχει αυτός. Δε χρειάζεται να βρίσκεις τον αριθμό που λείπει». Τους δόθηκε χρόνος 40΄ που ήταν επαρκής χρόνος για την πλήρη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου.

Πίνακας 1

Παραδείγματα έργων ανά κατηγορία και αριθμητική πράξη

Κατηγορίες έργων	Πρόσθεση	Αφαίρεση	Πολ/σμός	Διαίρεση
Συμβατά με Αριθμό/ Συμβατά με Πράξη	3+_=8	5-_ =1	7×_=21	8:_=2
μη-Συμβατά με Αριθμό/ Συμβατά με Πράξη	_+3=4,7	13-_=7,5	6×_=11	14:_=5
μη-Συμβατά με Αριθμό/ μη-Συμβατά με Πράξη			_×4=1	6:_=14
Εξουδετερωτές	_+5=2	3-_=8		

Ανάλυση των αποτελεσμάτων

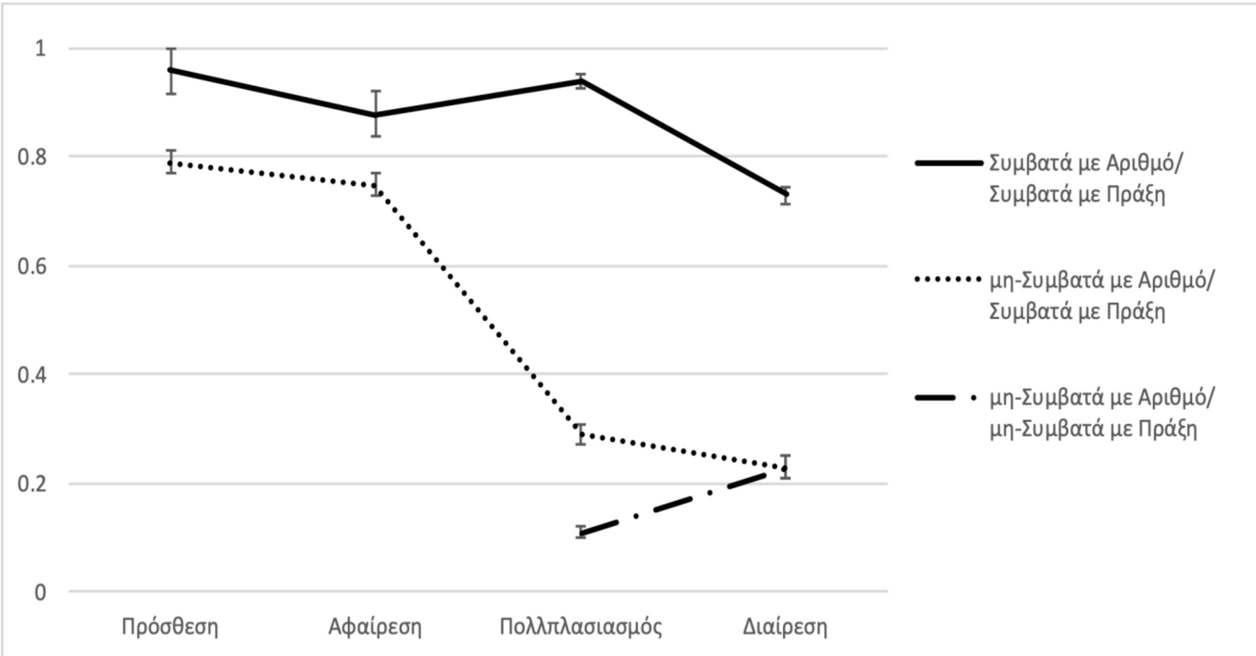
Η βασική υπόθεση της μελέτης (Υπόθεση 1), που αφορά τη διπλή επίδραση της ΠΦΑ σε πράξεις με αριθμούς που λείπουν, εξετάστηκε με μοντέλο Εξισώσεων Γενικευμένης Εκτίμησης (GEE: Generalized Estimated Equations) που εφαρμόστηκε στις επιδόσεις των μαθητών στα παραπάνω έργα, ορίζοντας ως ανεξάρτητους παράγοντες τα χαρακτηριστικά των έργων, δηλαδή α) την *Συμβατότητα με Αριθμό* (δηλ. έργα Συμβατά ή μη-Συμβατά με την πεποίθηση ότι ο αριθμός που λείπει είναι φυσικός αριθμός), β) τη *Συμβατότητα με Πράξη* (δηλ. έργα Συμβατά ή μη-Συμβατά με την πεποίθηση ότι το μέγεθος του αποτελέσματος κάθε πράξης είναι αυτό που θα ήταν αν οι εμπλεκόμενοι αριθμοί ήταν φυσικοί, δηλαδή ότι ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει ενώ η διαίρεση μικραίνει τους αριθμούς) και γ) το είδος *Πράξης* (δηλ. πρόσθεση, αφαίρεση, κτλ.). Ο συγκεκριμένος στατιστικός έλεγχος λαμβάνει υπόψιν τις πολλαπλές παρατηρήσεις από κάθε συμμετέχοντα, μία για την απάντηση στην κάθε ερώτηση του ερωτηματολογίου, κι έτσι ελέγχει την επίδραση κάθε παράγοντα στην συνολική επίδοση καθώς και αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στους παράγοντες. Συγκεκριμένα, το μοντέλο Εξισώσεων Γενικευμένης Εκτίμησης αποτελεί επέκταση του γενικευμένου γραμμικού μοντέλου (Generalized Linear Model) ώστε να επιτρέπει την ανάλυση επαναλαμβανόμενων μετρήσεων ή άλλων συσχετισμένων παρατηρήσεων, όπως τα ομαδοποιημένα δεδομένα. Λαμβάνοντας υπόψιν τις πολλαπλές παρατηρήσεις ανά άτομο, το μοντέλο Εξισώσεων Γενικευμένης Εκτίμησης παρέχει μέσες εκτιμήσεις των παραμέτρων του πληθυσμού κι έτσι μας επιτρέπει να βασίσουμε τις εκτιμήσεις στις αποκλίσεις που παρατηρούνται ανάμεσα στα άτομα. Προϋπόθεσή του είναι να χαρακτηριστούν τα έργα (δηλαδή οι ερωτήσεις) στη βάση των παραγόντων που ελέγχονται, π.χ., συμβατότητα/μη-συμβατότητα με αριθμό.

Για να εξεταστεί το ερευνητικό ερώτημα που αφορά τις διαφορές ανά σχολική βαθμίδα (Ερώτημα 2) εφαρμόστηκε Μόνοπαραγοντική Ανάλυση Διακύμανσης (Univariate Analysis of Variance), με τη συνολική επίδοση των μαθητών στα έργα ως εξαρτημένη μεταβλητή και τη σχολική βαθμίδα ως ανεξάρτητη μεταβλητή.

Αποτελέσματα

Οι λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών βαθμολογήθηκαν με 0 ενώ οι σωστές με 1. Στις αναλύσεις που ακολουθούν, μόνο οι απαντήσεις στις βασικές κατηγορίες έργων έχει ληφθεί υπόψιν και όχι οι απαντήσεις στα έργα που λειτουργούσαν ως *Εξουδετερωτές*. Ξεκινώντας από το Ερώτημα 2, οι μαθητές της Ε’ Δημοτικού εμφάνισαν χαμηλότερες επιδόσεις από τους μαθητές της Στ' τάξης (ΜΟ=0,48 - ΤΣ = 0,01 vs. ΜΟ =0,53 - ΤΣ=0,01) και η ανάλυση διασποράς έδειξε ότι η διαφορά αυτή ήταν στατιστικώς σημαντική [F(1,279)=6,509, p<0,001, $n_p{}^2$=0,023] (Πρόβλεψη 2). Αυτό δείχνει ότι οι δυσκολίες των μαθητών με τα αποτελέσματα των αριθμητικών πράξεων που οφείλονται στην επίδραση της ΠΦΑ έχουν μερικώς ξεπεραστεί από τους μεγαλύτερους μαθητές, αν και οι μαθητές της Στ΄ τάξης συνεχίζουν να επηρεάζονται από την ίδια προκατάληψη, εμφανίζοντας χαμηλές επιδόσεις στις συγκεκριμένες ερωτήσεις. Στις αναλύσεις που ακολουθούν για τον έλεγχο της βασικής υπόθεσης της μελέτης, η κάθε σχολική βαθμίδα εξετάστηκε ξεχωριστά λόγω της διαφοράς στις μέσες επιδόσεις που αναφέρθηκε παραπάνω. Παρόλα αυτά, επειδή τόσο οι κατανομές και τα στατιστικά μοντέλα που προέκυψαν, όσο και τα αποτελέσματα των στατιστικών ελέγχων, είχαν την ίδια εικόνα στις δύο σχολικές βαθμίδες, που ήταν επίσης ίδια με την εικόνα των αναλύσεων στο ενοποιημένο δείγμα, παρακάτω θα παρουσιαστούν τα μοντέλα και οι στατιστικές αναλύσεις που έγιναν στο ενοποιημένο δείγμα.

Στο Γράφημα 1 παρουσιάζονται οι μέσες επιδόσεις ανά βασική κατηγορία έργων και ανά πράξη. Όπως ήταν αναμενόμενο, οι επιδόσεις στα έργα που ήταν Συμβατά με Αριθμό/ Συμβατά με Πράξη σημειώθηκαν οι υψηλότερες επιδόσεις, ενώ αντίθετα, οι χαμηλότερες επιδόσεις σημειώθηκαν στα έργα που ήταν μη-Συμβατά με Αριθμό/μη-Συμβατά με Πράξη (Πρόβλεψη 1), στις περιπτώσεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης που υπάρχουν τέτοια έργα.



Γράφημα 1. *Μέση επίδοση ανά κατηγορία έργου και αριθμητικής πράξης. Οι γραμμές σφαλμάτων παρουσιάζουν το 95% του ΔΕ.*

Όσον αφορά το Ερώτημα 1, το μοντέλο Εξισώσεων Γενικευμένης Εκτίμησης έδειξε στατιστικά σημαντική επίδραση του παράγοντα *Συμβατότητας με Αριθμό* χ^2(1, N=6846) = 362,411, p<0,001, όπως επίσης και του παράγοντα Συμβατότητας με Πράξη χ^2(1, N=6846) = 45,174, p<0,001, κάτι που υποστηρίζει την βασική υπόθεση της μελέτης. Πιο συγκεκριμένα, η ακρίβεια των απαντήσεων ήταν υψηλότερη στα έργα που ήταν Συμβατά με Αριθμό (91%) σε σχέση με τα έργα που ήταν μη-Συμβατά με Αριθμό (38%) επίσης, ήταν υψηλότερη στα έργα που ήταν Συμβατά με Πράξη (77%) σε σχέση με την επίδοση στα έργα που ήταν μη-Συμβατά με Πράξη (16%). Οι λόγοι πιθανοτήτων της επίδοσης στα έργα που ήταν Συμβατά με Πράξη *OR*= 17,57 - 95% *CI* [(8,65 - 35,72)] ήταν υψηλότεροι σε σχέση με τους λόγους πιθανοτήτων στα έργα που ήταν

Συμβατά με Αριθμό *OR*= 16,49 - 95% *CI*[(7,45 - 36,53)]), κι αυτό παρέχει μια ένδειξη ότι ο παράγοντας Συμβατότητας με Πράξη ήταν λίγο ισχυρότερος από τον παράγοντα Συμβατότητας με Αριθμό. Θα πρέπει όμως να επισημανθεί εδώ ότι δεν υπάρχουν έργα μη-Συμβατά με Πράξη στη πρόσθεση και την αφαίρεση, που θα μπορούσαν να επηρεάσουν τον συγκεκριμένο παράγοντα.

Επιπροσθέτως, σημειώθηκε στατιστικώς σημαντική σχέση ανάμεσα σε Συμβατότητα με Αριθμό και σε Πράξη $\chi^2(7, N=6846) = 2681{,}009$, $p<0{,}001$. Συγκρίσεις ανά ζεύγη έδειξαν στατιστικώς σημαντικά υψηλότερες επιδόσεις στα έργα που ήταν Συμβατά με Αριθμό σε σχέση με τα έργα που ήταν μη-Συμβατά με Αριθμό και άρα στοιχεία που υποστηρίζουν επίδραση της ΠΦΑ στην πρόσθεση (96% αντί 79%), στην αφαίρεση (88% αντί 75%), στον πολλαπλασιασμό (94% αντί 19%) και στην διαίρεση (73% αντί 23%). Οι λόγοι πιθανοτήτων έδειξαν ότι ο παράγοντας αυτός ήταν ισχυρότερος στον πολλαπλασιασμό *OR*= 66.79 - 95% *CI* [(25,45 - 175,26)] σε σχέση με τη διαίρεση *OR*= 9,05 - 95% *CI*[(4,76 - 17,2)], την πρόσθεση *OR*=6,38 - 95% *CI*[(2,1 - 19,36)], και την αφαίρεση *OR*= 2,44 - 95% *CI*[(1,15 - 5,19)].

Επίσης, υπήρξε στατιστικώς σημαντική σχέση ανάμεσα σε Συμβατότητα με Πράξη και σε Πράξη $\chi^2(5, N=6846) = 2083{,}534$, $p<0{,}001$. Συγκρίσεις ανά ζεύγη έδειξαν στατιστικώς σημαντικά υψηλότερες επιδόσεις στα έργα που ήταν Συμβατά με Πράξη σε σχέση με τα έργα που ήταν μη-Συμβατά με Πράξη και άρα στοιχεία που υποστηρίζουν αυτόν τον παράγοντα της ΠΦΑ, στον πολλαπλασιασμό (72% vs. 11%) και την διαίρεση (48% vs. 23%). Οι λόγοι πιθανοτήτων έδειξαν ότι ο παράγοντας Συμβατότητας με Πράξη ήταν ισχυρότερος στον πολλαπλασιασμό *OR*= 20,81 - 95% *CI*[(9,7 - 44,64)], σε σχέση με τη διαίρεση *OR*= 3,09 - 95% *CI*[(1,68 - 5,68)].

Τέλος, όσον αφορά το Ερώτημα 3, στατιστικώς σημαντική επίδραση είχε και ο παράγοντας Πράξη στην ΠΦΑ σε πράξεις με αριθμούς που λείπουν $\chi^2(3, N=6846) = 208.633$ $p<0{,}001$. Οι μαθητές εμφάνισαν υψηλότερη μέση επίδοση στα έργα πρόσθεσης (ΜΟ = 0,91 - ΤΣ = 0,012) σε σχέση με τα έργα αφαίρεσης (ΜΟ = 0,83 - ΤΣ = 0,017), όπου όλα τα έργα είναι Συμβατά με Πράξη. Επίσης, εμφάνισαν υψηλότερη μέση επίδοση στα έργα πολλαπλασιασμού (ΜΟ = 0,49 - ΤΣ = 0,021) σε σχέση με τα έργα διαίρεσης (ΜΟ = 0,39 - ΤΣ = 0,016) όπου υπήρχαν και έργα μη-Συμβατά με Πράξη. Όπως φαίνεται και στο Γράφημα 1, στα έργα που ήταν μη-Συμβατά με Πράξη οι μαθητές είχαν καλύτερες επιδόσεις στη διαίρεση (ΜΟ = 0,23 - ΤΣ = 0,017) σε σχέση με τον πολλαπλασιασμό (ΜΟ = 0,11 - ΤΣ = 0,012) και η διαφορά αυτή ήταν στατιστικώς σημαντική ($p<0{,}001$) (Πρόβλεψη 3).

Συζήτηση

Στην παρούσα εργασία το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής χρησιμοποιήθηκε για να εξεταστούν δυσκολίες και λάθη των μαθητών με την έννοια του ρητού αριθμού, που εμφανίζονται στις αριθμητικές πράξεις με αριθμούς που λείπουν. Με βάση το θεωρητικό πλαίσιο, εκφράστηκε η υπόθεση ότι η τάση των μαθητών να χρησιμοποιούν την αρχική τους αντίληψη για τον αριθμό, που είναι οργανωμένη γύρω από την έννοια του φυσικού αριθμού, έχει διπλή επίδραση στις αριθμητικές πράξεις με αριθμούς που λείπουν: α) υποστηρίζει και πιθανώς επίσης διαμορφώνει την τάση των μαθητών να συνδέουν διαισθητικά κάθε πράξη με συγκεκριμένα αποτελέσματα, δηλαδή να θεωρούν ότι *ο πολλαπλασιασμός πάντα μεγαλώνει τους αριθμούς* ενώ *η διαίρεση τους μικραίνει*, και β) τους επηρεάζει να σκέφτονται κατά προτεραιότητα με φυσικούς αριθμούς για τους αριθμούς που λείπουν, κι έτσι να εξετάζουν τα αποτελέσματα των πράξεων δοκιμάζοντας μόνο με φυσικούς αριθμούς. Η υπόθεση εξετάστηκε με εφαρμογή του μοντέλου Εξισώσεων Γενικευμένης Εκτίμησης σε εμπειρικά δεδομένα προηγούμενων μελετών (Christou, 2015a, 2015b) που έλεγξαν την παραπάνω υπόθεση σε δείγμα μαθητών Ε' και Στ' τάξης του Δημοτικού σχολείου. Τα αποτελέσματα αυτής της νέας ανάλυσης υποστήριξαν εκ νέου την παραπάνω υπόθεση, δείχνοντας ότι και οι δύο αυτοί παράγοντες είχαν στατιστικώς σημαντικές επιδράσεις στις επιδόσεις των μαθητών.

Πιο συγκεκριμένα, η στατιστικώς σημαντική επίδραση του παράγοντα Συμβατότητα με Πράξη ανέδειξε ότι οι μαθητές είχαν σημαντικά υψηλότερες επιδόσεις στα έργα που ήταν συμβατά με τις διαισθητικές πεποιθήσεις τους ότι ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει ενώ η διαίρεση μικραίνει τους αρχικούς όρους της πράξης, σε σχέση με τα έργα που διέψευδαν αυτές τις πεποιθήσεις. Αυτό το εύρημα υποστήριξε τον πρώτο παράγοντα της διπλής επίδρασης της ΠΦΑ, καθώς έδειξε ότι η συγκεκριμένη προκατάληψη επηρεάζει τους μαθητές να συνδέουν διαισθητικά κάθε πράξη με συγκεκριμένο μέγεθος αποτελέσματος, ανεξάρτητα από τους αριθμούς που συμμετέχουν σε αυτές, ενισχύοντας αποτελέσματα προηγούμενων μελετών στο πεδίο (Bell et al., 1981· Fischbein et al., 1985· Greer, 1989· Vamvakoussi et al., 2012).

Η δεύτερη επίδραση της ΠΦΑ υποστηρίχθηκε από τα αποτελέσματα της ανάλυσης που έδειξαν ότι και η επίδραση του παράγοντα *Συμβατότητα με Αριθμό* ήταν στατιστικώς σημαντική. Στα έργα στα οποία οι αριθμοί που έλειπαν ήταν ρητοί (π.χ., 6×_=11) σημειώθηκαν περισσότερες λανθασμένες απαντήσεις σε σχέση με τα έργα στα οποία οι αριθμοί που έλειπαν ήταν φυσικοί (π.χ., 7×_=21). Αυτό δείχνει ότι η ΠΦΑ επηρεάζει και τη στρατηγική των μαθητών να εξετάζουν τα αποτελέσματα των αριθμητικών πράξεων αποδίδοντας τυχαίες τιμές στη θέση των αριθμών που λείπουν, δοκιμάζοντας μόνο με φυσικούς αριθμούς. Το συγκεκριμένο εύρημα αποτελεί καινοτομία στη βιβλιογραφία στο συγκεκριμένο πεδίο, καθώς οι προηγούμενες μελέτες (Vamvakoussi et al., 2012, 2013) δεν εστίαζαν στις πιθανές στρατηγικές των μαθητών να ασχολούνται με τους αριθμούς που λείπουν, αλλά μόνο στις πεποιθήσεις των μαθητών για το μέγεθος του αποτελέσματος των πράξεων σε σχέση με τους δοσμένους αριθμούς. Ταυτόχρονα, είναι συμβατό με ευρήματα ερευνών που, χρησιμοποιώντας το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές ερμηνεύουν τη χρήση των γραμμάτων ως σύμβολα αριθμών στην άλγεβρα, έδειξαν την τάση τους να θεωρούν ότι τα γράμματα αναπαριστούν κατά προτεραιότητα φυσικούς αριθμούς (Christou & Vosniadou, 2012).

Η παρούσα εργασία έδειξε επίσης ότι, όπως ήταν αναμενόμενο με βάση τη βιβλιογραφία (Dixon κ.α., 2001), οι μαθητές τα πηγαίνουν καλύτερα στην πρόσθεση και στην αφαίρεση σε σχέση με τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση. Ένα ενδιαφέρον εύρημα, όσον αφορά τις διαφορές ανάμεσα στις πράξεις, ήταν ότι ο παράγοντας Συμβατότητα με Αριθμό ήταν πιο σημαντικός στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση, σε σχέση με την πρόσθεση και την αφαίρεση. Μια πιθανή αιτία είναι ότι τα μη-Συμβατά με Αριθμό έργα πολλαπλασιασμού (π.χ., 6×_=11) και διαίρεσης (π.χ., 14:_=5), διαφοροποιούνται από τους συνδυασμούς που εμφανίζονται στον *πίνακα του πολλαπλασιασμού* (π.χ., 6×_=6, 6×_=12, 6×_=18, κτλ.). Οι μαθητές έχουν εκτεθεί πολύ στον πίνακα του πολλαπλασιασμού, που συχνά κοσμεί ακόμη και τις αίθουσες των σχολικών αιθουσών και έχουν χρησιμοποιηθεί εκτεταμένα στη μάθηση της προπαίδειας. Με τον τρόπο αυτό, είναι πιθανό η εξοικείωσή τους με τους συγκεκριμένους συνδυασμούς να τους επηρεάζει να θεωρούν ότι οι συνδυασμοί που διαφοροποιούνται από αυτούς που εμφανίζονται στον πίνακα του πολλαπλασιασμού είναι πράξεις που *δεν γίνονται.* Κάποια πρώτα αποτελέσματα μελέτης που έλεγξε αυτήν ακριβώς την υπόθεση με τη χρήση έργων παρόμοιων με αυτά που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία έδειξαν ότι πράγματι η εξοικείωση με συνδυασμούς πράξεων που εμφανίζονται στον πίνακα πολλαπλασιασμού επηρεάζει τις κρίσεις των μαθητών (Christou, Pollack, Van Hoof, & Van Dooren, 2020). Παρόλα αυτά, έρευνα με τη χρήση ατομικών συνεντεύξεων θα μπορούσε να δώσει ακόμη περισσότερα πληροφορίες για το συγκεκριμένο φαινόμενο.

Στην παρούσα μελέτη εμφανίστηκε επίσης η τάση των μαθητών να τους είναι πιο εύκολο να δεχθούν ότι η διαίρεση μπορεί να μεγαλώσει τους αρχικούς όρους της πράξης, από το να δεχθούν ότι ο πολλαπλασιασμός μπορεί να τους μικρύνει. Αυτό φάνηκε από τις υψηλότερες επιδόσεις που εμφανίστηκαν στα μη-Συμβατά με Πράξη έργα στη διαίρεση, σε σχέση με τα αντίστοιχα έργα στον πολλαπλασιασμό. Η τάση αυτή είχε εμφανιστεί και στις προηγούμενες μελέτες (Christou, 2015a, 2015b), αν και σε άλλες μελέτες, με λίγο διαφορετικά έργα, είχε εμφανιστεί η ακριβώς αντίθετη τάση (Van Hoof et al., 2015). Δυστυχώς, η παρούσα εργασία δεν κατάφερε να ρίξει περισσότερο φως σε αυτό το φαινόμενο που μελλοντικές μελέτες με χρήση ατομικών συνεντεύξεων σε μαθητές θα μπορούσαν να το διερευνήσουν σε βάθος.

Η παρούσα εργασία προσέφερε αποτελέσματα μιας νέας ανάλυσης ποσοτικών δεδομένων από απαντήσεις ενός μεγάλου δείγματος συμμετεχόντων. Τα αποτελέσματα αυτά ενισχύουν περαιτέρω την θέση που εκφράζεται από τη θεωρητική προσέγγιση της εννοιολογικής αλλαγής στη μάθηση των ρητών αριθμών ότι η προϋπάρχουσα γνώση για τον αριθμό, που είναι οργανωμένη σε μια αντίληψη για τον αριθμό που έχει τις ιδιότητες του φυσικού αριθμού, μπορεί να εμποδίσει τον τρόπο με τον οποίο κατανοούν οι μαθητές τους ρητούς, προκαλώντας λάθη και παρανοήσεις, όπως αυτές που εμφανίστηκαν στις πράξεις με αριθμούς που λείπουν. Υποστηρίζεται έτσι η θέση ότι για να καταφέρουν οι μαθητές να αναπτύξουν μια πιο εκλεπτυσμένη αντίληψη για τον αριθμό, πέραν από τους φυσικούς αριθμούς, που να είναι πιο κοντινή στη μαθηματική έννοια του ρητού και του πραγματικού αριθμού απαιτείται ριζική αναδιοργάνωση της προϋπάρχουσας γνώσης του φυσικού αριθμού (Smith et al., 2005). Η διαδικασία αυτή αναμένεται να είναι χρονοβόρα και δύσκολη (Vosniadou et al., 2008). Σε συμφωνία με τη συγκεκριμένη πρόβλεψη, τα αποτελέσματα της τρέχουσας εργασίας έδειξαν ότι οι πιο μεγάλοι μαθητές της Στ΄ τάξης, αν και είχαν καλύτερες επιδόσεις από τους νεότερους μαθητές της Ε' τάξης, παρόλα αυτά δεν εμφανίστηκαν ανεπηρέαστοι από την ΠΦΑ. Δεν είναι τυχαίο, άλλωστε, ότι ακόμη και μορφωμένοι ενήλικες, φοιτητές (Christou, et al., 2020 · Greer, 1989· Vamvakoussi et al., 2013· Van Hoof et al., 2015) ή και δάσκαλοι (Tirosh & Graeber, 1989) εξακολουθούν να επηρεάζονται από την ΠΦΑ στα αποτελέσματα των πράξεων. Οι μόνοι που φαίνεται να έχουν απαλλαγεί από αυτή την προκατάληψη είναι οι Μαθηματικοί (απόφοιτοι Μαθηματικών Τμημάτων), που μπορεί να χαρακτηριστούν και *ειδικοί στα μαθηματικά* (Obersteiner et al., 2015).

Παρόλα αυτά, πρόσφατες μελέτες με έννοιες των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών δείχνουν ότι ακόμη κι όταν οι μαθητές έχουν περάσει μέσα από τη διαδικασία της εννοιολογικής αλλαγής, οι αρχικές, εναλλακτικές τους αντιλήψεις δεν παύουν να υπάρχουν και να παρεμβαίνουν σε συγκεκριμένες συνθήκες συλλογισμού (Shtulman & Valcarcel, 2012). Όσον αφορά, μάλιστα, στη μαθηματική γνώση γενικότερα αλλά και πιο συγκεκριμένα στο παράδειγμα της ανάπτυξης της έννοιας του αριθμού που εξετάζεται εδώ, η γνώση του φυσικού αριθμού ούτε είναι αναμενόμενο αλλά ούτε και επιθυμητό να διαγραφεί και να αντικατασταθεί από τη γνώση των ρητών και των πραγματικών αριθμών. Οι φυσικοί αριθμοί, δεν παύουν να έχουν πολλές χρήσεις σε διάφορα μαθηματικά και μη-αμιγώς μαθηματικά πλαίσια, και σε αυτά τα πλαίσια η χρήση των ιδιοτήτων των φυσικών είναι και επιθυμητή και απαραίτητη. Πρόβλημα αποτελούν εκείνες οι περιπτώσεις όπου η γνώση για τους φυσικούς αριθμούς παρεμβαίνει σε περιπτώσεις όπου πρέπει να εφαρμοστεί γνώση για τους ρητούς αριθμούς.

Εδώ είναι μια καλή ευκαιρία να επισημανθεί ότι μέσα από την εφαρμογή προσεγγίσεων όπως η θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής στη μελέτη της γνωστικής ανάπτυξης και της μάθησης μαθηματικών εννοιών, αναδείχθηκε το φαινόμενο λάθη και δυσκολίες των μαθητών να μην οφείλονται αποκλειστικά στην έλλειψη γνώσης ή στην ύπαρξη λανθασμένης γνώσης από τη μεριάς των μαθητών. Η περίπτωση της ΠΦΑ, για παράδειγμα, είναι το αποτέλεσμα μιας ορθής γνώσης για τον φυσικό αριθμό η οποία είναι τόσο καλά εδραιωμένη μέσα από την εμπειρία της χρήσης των φυσικών αριθμών στη καθημερινή ζωή εντός κι εκτός σχολείου που, ως κυρίαρχη αντίληψη για τους αριθμούς, επιβάλλεται στους άλλους, μη-φυσικούς αριθμούς, με αποτέλεσμα λάθη και παρανοήσεις σε διάφορους τομείς της μαθηματικής γνώσης όπου εμπλέκονται μη-φυσικοί αριθμοί.

Τα παραπάνω συγκλίνουν στην αναγκαιότητα να βρεθεί τρόπος να *αναστέλλεται* η παρεμβολή της διαρκώς παρούσας γνώσης του φυσικού αριθμού, σε μαθηματικές καταστάσεις που απαιτείται συλλογισμός με ρητούς αριθμούς. Συγκεκριμένα, υποστηρίζεται ότι για να μπορέσουν οι μαθητές να σκεφτούν με αριθμούς διαφορετικούς από τους φυσικούς αριθμούς και να ξεπεράσουν τις διαισθήσεις τους σχετικά με τα αποτελέσματα των αριθμητικών πράξεων (δηλαδή, να δεχτούν, για παράδειγμα, ότι υπό ορισμένες συνθήκες ο πολλαπλασιασμός μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα αριθμούς μικρότερους από τους αρχικούς όρους), θα πρέπει να βρουν τρόπους να *αναστείλουν* τη παρεμβολή της γνώσης τους για τους φυσικούς αριθμούς και τις αυτόματες απαντήσεις που προκύπτουν από αυτή (Roell et al., 2019).

Ο όρος αναστολή (inhibition) έχει χρησιμοποιηθεί με διάφορους τρόπους και σε πολλά διαφορετικά πλαίσια στη βιβλιογραφία που αφορά τη γνωστική ανάπτυξη και τη μάθηση (για εκτενέστερη ανάλυση βλέπε MacLeod et al., 2003· όπως επίσης το ειδικό τέυχος για τον ρόλο της αναστολής στο μαθηματικό συλλογισμό Van Dooren & Inglis, 2015). Η αναστολή είναι από τις βασικότερες εκτελεστικές λειτουργίες που έχει αναβαθμισμένο ρόλο ειδικά στις περιπτώσεις μάθησης με εννοιολογική αλλαγή (Vosniadou et al., 2018). Οι στρατηγικές αναστολής έχουν λάβει διάφορα ονόματα, όπως στρατηγικές *σταμάτα και σκέψου* (stop and think) (Vamvakoussi et al., 2013), ή *συσκευές συναγερμού* (alarm devices) (Fischbein, 1990). Μια τέτοια στρατηγική αναστολής, σε περιπτώσεις πράξεων με αριθμούς που λείπουν θα μπορούσε να είναι να δοκιμάζεται πάντα τουλάχιστον ένας μη-φυσικός αριθμός – όπως ένας αρνητικός ή ένας αριθμός μικρότερος από 1 - ή απλά να υπάρχει κατά νου ότι *ο πολλαπλασιασμός δεν μεγαλώνει πάντα* (Christou, 2015b). Τέτοιες στρατηγικές φαίνεται, άλλωστε να χρησιμοποιούν και οι ειδικοί στα Μαθηματικά για να ξεπερνούν την επίδραση της ΠΦΑ (Obersteiner et al., 2015).

Η ανάπτυξη και η εφαρμογή τέτοιων στρατηγικών αναστολής προϋποθέτει, φυσικά, ότι οι μαθητές έχουν επίγνωση των πεποιθήσεών τους τους σχετικά με τις ιδιότητες των αριθμών. Όμως, οι διαισθητικές πεποιθήσεις για τους αριθμούς και τις ιδιότητές τους, είναι συχνά άρρητες και δεν βρίσκονται κάτω από τον συνειδητό έλεγχο των μαθητών (Vosniadou, 2007· Vosniadou et al., 2008). Η χρήση παραδειγμάτων και αντι-παραδειγμάτων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να βοηθηθούν οι μαθητές να αποκτήσουν επίγνωση των παρανοήσεών τους, ως ένα πρώτο βήμα στην κατανόηση των ρητών αριθμών. Τα έργα που σχεδιάστηκαν για τη μελέτη που παρουσιάστηκε εδώ θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν προς αυτή την κατεύθυνση για να αναδείξουν στους μαθητές τις διαισθητικές πεποιθήσεις τους για τους αριθμούς και τις ιδιότητές τους που, ενώ λειτουργούν για τους φυσικούς αριθμούς, δεν λειτουργούν για τους ρητούς. Με τον τρόπο αυτό θα μπορέσουν οι μαθητές να βοηθηθούν ώστε να αποδεχθούν και αντί-διαισθητικές ιδιότητες του αριθμού, όπως ότι ο πολλαπλασιασμός μπορεί και να μικρύνει τους αριθμούς.

Βιβλιογραφία

Bailey, D. H., Hoard, M. K., Nugent, L., & Geary, D. C. (2012). Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology, 113*(3), 447–455. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2012.06.004

Bell, A., Swan, M., & Taylor, G. (1981). Choice of operation in verbal problems with decimal numbers. *Educational studies in mathematics, 12*, 399-420. https://doi.org/10.1007/BF00308139

Biza, I., & Zachariades, T. (2006). Conceptual change in advanced mathematical thinking: The case of tangent line. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education* Vol. 1 (pp. 168-170). Prague, Czech Republic: PME. Retrieved at https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED496931.pdf

Carpenter, T., Fennema, E., & Romberg, T. (1993). *Rational numbers: An integration of research*. Erlbaum.

Christou, K. P. (2015a). The dual aspect of Natural Number Bias in Arithmetic Operations. *Mediterranean Journal for research in Mathematics Education, 14*, 107-121.

Christou, K. P. (2015b). Natural number bias in operations with missing numbers. *ZDM Mathematics Education, 47*(5), 747-758. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0675-6

Christou, K. P., & Vosniadou, S. (2012). What kinds of numbers do students assign to literal symbols? Aspects of the transition from arithmetic to algebra. *Mathematical Thinking and Learning, 14*(1), 1-27. https://doi.org/10.1080/10986065.2012.625074

Christou, K. P., Pollack, C., Van Hoof, J., & Van Dooren, W. (2020). Natural number bias in arithmetic operations with missing numbers – A reaction time study. *Journal of Numerical Cognition*, *6*(1), 22–49. https://doi.org/10.5964/jnc.v6i1.228

De Corte, E., Verschaffel, L., & Pauwels, A. (1990). Influence of the semantic structure of word problems on second graders' eye movements. *Journal of Educational Psychology, 82*(2), 359–365. https://doi.org/10.1037/0022-0663.82.2.359

Dimitrakopoulou, S. A., & Christou, K. P. (2018). Τα γράμματα-μεταβλητές: Πώς τα κατανοούν οι μαθητές και πώς εμφανίζονται στα βιβλία μαθηματικών του Γυμνασίου. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών, 11*, 31–52. https://doi.org/10.12681/enedim.18938

Dixon, J. A., Deets, J. K., & Bangert, A. (2001). The representations of the arithmetic operations include functional relationships. *Memory & Cognition, 29*(3), 462-477. https://doi.org/10.3758/BF03196397

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach* (Vol. 5). Springer Science & Business Media. https://doi.org/10.1007/0-306-47237-6

Fischbein, E. (1990). Intuition and information processing in mathematical activity. *International Journal of Educational Research, 14*(1), 31–50. https://doi.org/10.1016/0883-0355(90)90015-Z

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M., & Marino, M. (1985). The role of implicit models in solving problems in multiplication and division. *Journal of Research in Mathematics Education, 16*, 3-17. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.16.1.0003

Gelman, R. (1994). Constructivism and supporting environments. In D. Tirosh (Ed.), *Implicit and explicit knowledge: An educational approach* (pp. 55-82). Ablex.

Gelman, R. (2000). The epigenesis of mathematical thinking. *Journal of Applied Developmental Psychology, 21*, 27-37. https://doi.org/10.1016/S0193-3973(99)00048-9

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*, 170-218. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.22.3.0170

Greer, B. (1987). Nonconservation of multiplication and division involving decimals. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(1), 37-45. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.18.1.0037

Greer, B. (1989). Conceptual obstacles to the development of the concepts of multiplication and division. In H. Mandl, E. De Corte, S. N. Bennet, & H. F. Friedrich (Eds.), *Learning and instruction: European research in an international context, Vol. 2* (pp. 461-476). Pergamon.

Hart, K. M. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. John Murray.

Hartnett, P., & Gelman, R. (1998). Early understandings of number: Paths or barriers to the construction of new understandings? *Learning and Instruction, 8*(4), 341-374. https://doi.org/10.1016/S0959-4752(97)00026-1

MacLeod, C. M., Dodd, M. D., Sheard, E. D., Wilson, D. E., & Bibi, U. (2003). In opposition to inhibition. In B. H. Ross (Ed.), *The psychology of learning and motivation: Advances in research and theory, Vol. 43*, (pp. 163–214). Elsevier Science.

Moss, J. (2005). Pipes, tubes, and beakers: New approaches to teaching the rational-number system. In S. Donovan & J. D. Bransford (Eds.), *How students learn: History, mathematics, and science in the classroom* (pp. 309-349). National Academy Press.

Nesher, P., & Peled, I. (1986). Shifts in reasoning. *Educational studies in mathematics, 17*(1), 67-79. https://doi.org/10.1007/BF00302379

Ni, Y. J., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist, 40*(1), 27-52. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4001_3

Obersteiner, A., Van Hoof, J., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2015). Who can escape the natural number bias in rational number tasks? A study involving students and experts. *British Journal of Psychology, 107*(3), 537-555. https://doi.org/10.1111/bjop.12161

Resnick, L. B. (1986). The development of mathematical intuition. In M. Perlmutter (Ed.), *Perspectives on intellectual development: Minnesota Symposia on Child Psychology, Vol. 19* (pp. 159-194). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Ritchie, S. J., & Bates, T. C. (2013). Enduring links from childhood mathematics and reading achievement to adult socioeconomic status. *Psychological Science, 24*, 1301-1308. https://doi.org/10.1177/0956797612466268

Roell, M., Viarouge, A., Houdé, O., & Borst, G. (2019). Inhibition of the whole number bias in decimal number comparison: A developmental negative priming study. *Journal of Experimental Child Psychology, 177*, 240-247. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2018.08.010

Shtulman, A., & Valcarcel, J. (2012). Scientific knowledge suppresses but does not supplant earlier intuitions. *Cognition,* 124(2), 209-215. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2012.04.005

Smith, C. L., Solomon, G. E. A., & Carey, S. (2005). Never getting to zero: Elementary school students'understanding of the infinite divisibility of number and matter. *Cognitive Psychology, 51*, 101-140. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2005.03.001

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). Students' understanding of the numerical value of fractions: A conceptual change approach. *Learning and Instruction, 14*, 503-518. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.015

Thorndike, E. L. (1922). *The psychology of arithmetic*. Macmillan.

Tirosh, D., & Graeber, A. O. (1989). Preservice elementary teachers' explicit beliefs about multiplication and division. *Educational studies in mathematics, 20*(1), 79-96. https://doi.org/10.1007/BF00356042

Tsamir, P., & Tirosh, D. (2007). Teaching for conceptual change: The case of infinite sets. In S. Vosniadou, A. Baltas, & X. Vamvakoussi (Eds.), *Reframing the conceptual change approach in learning and instruction* (pp. 299-317). Elsevier Press.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*, 344–355. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.02.001

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2013). Educated adults are still affected by intuitions about the effect of arithmetical operations: evidence from a reaction-time study. *Educational studies in mathematics, 82*(2), 323-330. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9432-8

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction, 28*(2), 181 - 209. https://doi.org/10.1080/07370001003676603

Van Dooren, W., & Inglis, M. (Eds.). (2015). Inhibitory control in mathematical thinking, learning and problem solving: a survey. *ZDM Mathematics Education, 47*(5), 713-721. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0715-2

Van Dooren, W., Lehtinen, E., & Verschaffel, L. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers. *Learning and Instruction, 37*, 1-4. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2015.01.001

Van Hoof, J., Vandewalle, J., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2015). In search for the natural number bias in secondary school students' interpretation of the effect of arithmetical operations. *Learning and Instruction, 30*, 30-38. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.03.004

Verschaffel, L., & Vosniadou, S. (Eds.). (2004). Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching, *[Special Issue] Learning and Instruction, 14*(5), 445-451. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.014.

Vosniadou, S. (2007). The conceptual change approach and its reframing. In S. Vosniadou, A. Baltas, & X. Vamvakoussi (Eds.), *Reframing the conceptual change approach in learning and instruction*. (pp. 1–15). Elsevier Science.

Vosniadou, S., Pnevmatikos, D., Makris, N., Lepenioti, D., Eikospentaki, K., Chountala, A., & Kyrianakis, G. (2018). The Recruitment of Shifting and Inhibition in On-line Science and Mathematics Tasks. *Cognitive Science, 42*(6), 1860-1886. https://doi.org/10.1111/cogs.12624

Vosniadou, S. Vamvakoussi, X., & Skopeliti, I. (2008). The Framework Theory Approach to the Problem of Conceptual Change. In S. Vosniadou (Ed.) *International Handbook of Research on Conceptual Change* (pp. 3-34), Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203874813

Vosniadou, S., & Verschaffel, L. (2004). Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching. *Learning and Instruction, 14*, 445-451. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.014

Χρήστου, Κ. Π. (2019). Εννοιολογική αλλαγή και το φαινόμενο της προκατάληψης του φυσικού αριθμού στην κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής. Στο Ν. Κυριακοπούλου & Ε. Σκοπελίτη (Επιμ.), *Νόηση και Μάθηση υπό το πρίσμα της Εννοιολογικής Αλλαγής: Σύγχρονες Έρευνες και Προβληματισμοί* (σελ.164-184). Εκδόσεις Gutenberg.

ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ | RESEARCH PAPER

Multiplication always makes bigger? A case of learning with conceptual change in mathematics

Konstantinos P. Christou[1]

[1] Department of Early Childhood Education, University of Western Macedonia, Kozani, Greece

KEYWORDS

Natural number bias,
number concept,
conceptual change,
multiplication makes bigger,
misconception

CORRESPONDENCE

Konstantinos P. Christou
University of Western Macedonia
3rd km. Florinas-Nikis, 53100,
Florina, Greece
kchristou@uowm.gr

ABSTRACT

In this paper, the conceptual change theoretical framework is used to test students' difficulties with rational numbers, and more specifically to test their misconceptions about the results of the operations between given and missing numbers (e.g., 14:_=5). The main hypothesis of the study was that the *natural number bias* - which is the tendency to apply the initial, intuitive conception for numbers which is organized in a number concept that share the same properties with natural numbers- in situations that involve reasoning with non-natural numbers, have a dual effect on operations between given and missing numbers: a) it affects students to connect each operation with certain size of results, regardless of the numbers involved in the operation (e.g., that multiplication always makes bigger, and division always makes numbers smaller), and b) it affects their tendency to think that the missing numbers could only be natural numbers. Generalized estimated equations model (GEE) applied to the answers of a unified sample of 300 5^{th} and 6^{th} grade students, from two previous studies which tested the same hypothesis. Participants were given tasks that were either inline or counter-line with their intuitive beliefs about the properties of numbers in operations. The results supported the hypothesis of the study. The students showed statistically significant higher accuracy rates in those tasks that were in-line with their intuitive beliefs about the size of the results of each operation, and also about the missing numbers being natural numbers, than in the tasks that falsified these beliefs.