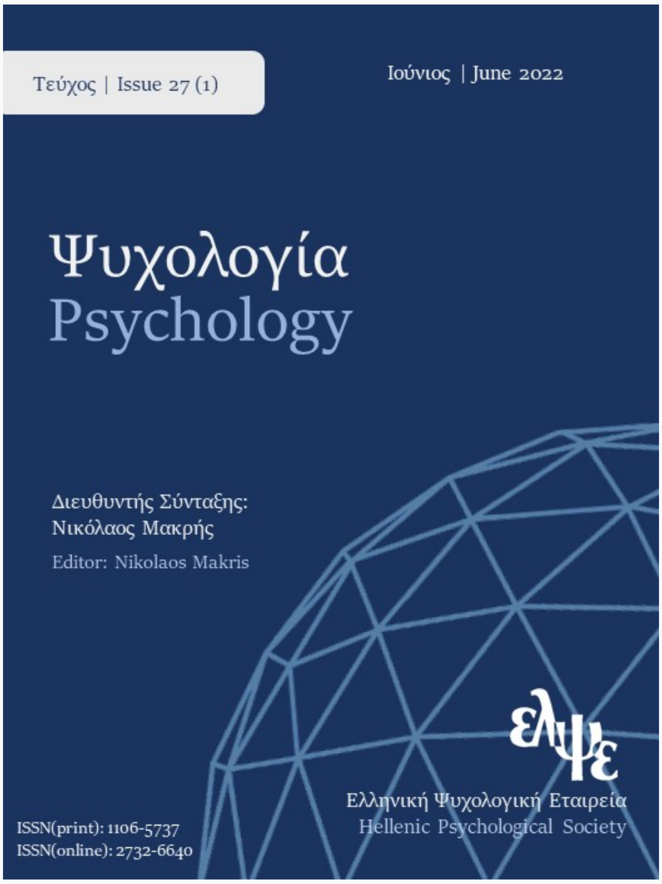
ePublishing

ΕΘΝΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ ΤΕΚΜΗΡΙΩΣΗΣ
NATIONAL DOCUMENTATION CENTRE

Psychology: the Journal of the Hellenic Psychological Society

Vol 27, No 1 (2022)

Special Section: Learning Counter-intuitive Explanations from a Conceptual Change Perspective



How 10th graders understand the dense ordering of rational numbers: a teaching experiment

Dimitris Fokas, Xenia Vamvakoussi

doi: [10.12681/psyhps.30686](https://doi.org/10.12681/psyhps.30686)

Copyright © 2022, Δημήτρης Φωκάς, Ξένια Βαμβακούση

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/).

To cite this article:

Fokas, D., & Vamvakoussi, X. (2022). How 10th graders understand the dense ordering of rational numbers: a teaching experiment . *Psychology: The Journal of the Hellenic Psychological Society*, *27*(1), 48–65. https://doi.org/10.12681/psyhps.30686

https://epublishing.ekt.gr | **e-Publisher:** EKT | **Downloaded at:** 19/11/2024 12:28:31

ΨΥΧΟΛΟΓΙΑ | PSYCHOLOGY, 27 (1), 48-65

Ελληνική Ψυχολογική Εταιρεία
Hellenic Psychological Society

ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ | RESEARCH PAPER

Η κατανόηση της πυκνής διάταξης των ρητών από μαθητές Β΄ Λυκείου: ένα διδακτικό πείραμα

Δημήτρης ΦΩΚΑΣ[1], Ξένια ΒΑΜΒΑΚΟΥΣΗ[2]

[1] Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Φλώρινα, Ελλάδα
[2] Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Ιωάννινα, Ελλάδα

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

Ρητοί αριθμοί,
πυκνή διάταξη,
εννοιολογική αλλαγή,
συνθετικά μοντέλα

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ

Ξένια Βαμβακούση,
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Παιδαγωγικό Τμήμα
Νηπιαγωγών,
Μεταβατικό Κτήριο,
45110,
Πανεπιστημιούπολη Ιωάννινα
xvamvak@uoi.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η μετάβαση από τους φυσικούς στους ρητούς αριθμούς παρουσιάζει δυσκολίες για τους μαθητές, μέρος των οποίων οφείλεται στην καταχρηστική μεταφορά γνώσης για τους φυσικούς στους ρητούς. Μια ιδιότητα των φυσικών αριθμών που μεταφέρεται καταχρηστικά στους ρητούς είναι η διακριτότητα: Αντίθετα με το σύνολο των ρητών αριθμών, το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι διακριτά διατεταγμένο, δηλαδή, για κάθε φυσικό αριθμό ορίζεται ο επόμενός του. Οι ρητοί αριθμοί είναι πυκνά διατεταγμένοι, δηλαδή, δεν ορίζεται ο επόμενος για κανέναν αριθμό στο σύνολο αυτό. Η προσέγγιση της θεωρίας πλαισίου στην εννοιολογική αλλαγή προβλέπει ότι οι θεμελιώδεις παραδοχές των μαθητών για τον αριθμό ως φυσικό δεν αίρονται δια μιάς, με την ιδέα της διακριτότητας να είναι ιδιαίτερα ανθεκτική. Στην εργασία παρουσιάζεται ένα διδακτικό πείραμα με 15 μαθητές Λυκείου. Εξετάσαμε την υπόθεση ότι διαφορετικές πτυχές της πυκνότητας των ρητών αριθμών (συγκεκριμένα, η απειρία των ρητών σε οποιοδήποτε διάστημα και η μη ύπαρξη του επόμενου), παρότι μαθηματικά ισοδύναμες, παρουσιάζουν διαφορετικές δυσκολίες για τους μαθητές. Η αρχική κατανόηση των μαθητών για την πυκνότητα ελέγχθηκε ατομικά. Κάθε μαθητής ξεχωριστά συμμετείχε σε μικρής διάρκειας παρέμβαση, στην οποία εισήχθη η ιδέα του αριθμητικού μέσου ενός διαστήματος ως εργαλείο που δυνητικά μπορεί να οδηγήσει στην κατανόηση και των δύο πτυχών της πυκνής διάταξης. Τέλος, κάθε μαθητής επανεξέτασε τις απαντήσεις του στα έργα του προελέγχου και παρακινήθηκε να αξιοποιήσει την ιδέα του αριθμητικού μέσου. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι μαθητές συνέχισαν να θεωρούν ότι υπάρχει ο επόμενος στους ρητούς, ακόμα και όταν συμπέραναν την απειρία των ενδιάμεσων. Υπό το πρίσμα της θεωρίας που υιοθετήσαμε, η αντίληψη αυτή είναι *συνθετική*, καθώς οι μαθητές αλλάζουν μερικώς την αντίληψή τους για τη διάταξη των ρητών, χωρίς να αίρεται η αρχή του επόμενου αριθμού.

Εισαγωγή

Η χρονική στιγμή στην οποία εισάγονται οι ρητοί αριθμοί στο σχολείο είναι ένα ορόσημο για τη μελλοντική πορεία των παιδιών στα σχολικά μαθηματικά. Οι ρητοί αποτελούν μέρος ενός εκτεταμένου και πολύπλοκου δικτύου μαθηματικών εννοιών και σχέσεων που περιλαμβάνει τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση, το λόγο και την αναλογία, τις γραμμικές συναρτήσεις, τη διαστατική ανάλυση και δεν εξαντλείται σε αυτά (Vergnaud, 1996). Ως εκ τούτου, η κατανόηση των ρητών με τις διάφορες αναπαραστάσεις τους, καθώς και των καταστάσεων στις οποίες βρίσκουν εφαρμογές αφορά ένα μεγάλο μέρος του περιεχομένου των σχολικών μαθηματικών σε διάφορες περιοχές, όπως για παράδειγμα τα στοχαστικά μαθηματικά, τη γεωμετρία και την άλγεβρα. Δεν αποτελεί έκπληξη, επομένως, το γεγονός ότι η επίδοση στους ρητούς προβλέπει τη γενικότερη επίδοση στα μαθηματικά (Bailey et al., 2012· Booth & Newton, 2012· Torbeyns et al., 2015).

© 2022, Δημήτρης Φωκάς, Ξένια Βαμβακούση
Άδεια CC-BY-SA 4.0

Παράλληλα, οι ρητοί αριθμοί προκαλούν τεράστιες δυσκολίες στους μαθητές, σε όλες τις εκπαιδευτικές βαθμίδες. Συστηματικά λάθη των μαθητών έχουν τεκμηριωθεί όσον αφορά τη σύγκριση, τη διάταξη, τις πράξεις και την ερμηνεία των αναπαραστάσεων των ρητών αριθμών, καθώς και την επίλυση προβλημάτων σε καταστάσεις όπου εμπλέκονται ρητοί. Ένα μεγάλο μέρος αυτών των δυσκολιών αποδίδεται στην καταχρηστική μεταφορά της προϋπάρχουσας γνώσης για τους φυσικούς αριθμούς στο πλαίσιο των ρητών αριθμών (Moss, 2005). Πράγματι, μια μεγάλη ποικιλία συστηματικών λαθών παρατηρείται στα σημεία εκείνα στα οποία οι διαφορές μεταξύ των φυσικών και των ρητών καθιστούν την εφαρμογή της προϋπάρχουσας γνώσης για τους φυσικούς προβληματική. Το φαινόμενο αυτό είναι τόσο εκτεταμένο, ώστε του έχει αποδοθεί ο όρος προκατάληψη του ακεραίου (Ni & Zhou, 2005) ή του φυσικού αριθμού (Vamvakoussi et al., 2012).

Στο άρθρο αυτό εστιάζουμε στην κατανόηση της πυκνής διάταξης των ρητών αριθμών, μιας ιδιότητας που αντανακλά μια θεμελιώδη διαφορά μεταξύ των φυσικών και των ρητών αριθμών. Υιοθετώντας την οπτική της προσέγγισης της «θεωρίας πλαισίου» στην εννοιολογική αλλαγή (Vosniadou et al., 2008· Vosniadou, 2013), πραγματοποιήσαμε ένα διδακτικό πείραμα για να εξετάσουμε τον τρόπο με τον οποίο μαθητές της Β΄ Λυκείου αντιλαμβάνονται τη διάταξη των ρητών αριθμών, πριν και αφού εκτεθούν στην ιδέα του αριθμητικού μέσου σε ένα διάστημα με άκρα ρητούς αριθμούς καθώς και στη διαδικασία υπολογισμού του.

Θεωρητικό υπόβαθρο

Η προσέγγιση της θεωρίας πλαισίου στην εννοιολογική αλλαγή

Η βασική υπόθεση της προσέγγισης της θεωρίας πλαισίου στην εννοιολογική αλλαγή είναι ότι τα μικρά παιδιά ερμηνεύουν και οργανώνουν τις εμπειρίες τους στο πλαίσιο του φυσικού και κοινωνικο-πολιτισμικού τους περιβάλλοντος σε λίγα, σχετικά συνεκτικά, επεξηγηματικά πλαίσια, τις λεγόμενες «θεωρίες πλαισίου». Μια τέτοια θεωρία πλαισίου αφορά τις πρώιμες εμπειρίες ποσοτικοποίησης των παιδιών οι οποίες, κατά κανόνα, αφορούν το διακριτό μέγεθος του πλήθους και άρα συνδέονται από νωρίς με τις διακριτές ποσότητες και τους φυσικούς αριθμούς (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010· Vosniadou et al., 2008· Βαμβακούση, 2019). Πράγματι, πριν ακόμα ξεκινήσουν τη σχολική τους εκπαίδευση, τα παιδιά έχουν ήδη εκτεθεί σε συμβολικά (λεκτικά ή μη) εργαλεία (π.χ., αριθμολέξεις, αριθμητικά σύμβολα), δραστηριότητες (π.χ., σύγκριση και καταμέτρηση διακριτών συλλογών αντικειμένων) και πρακτικές (π.χ., χρήση των δακτύλων στην καταμέτρηση) που αφορούν τους φυσικούς αριθμούς και αναδεικνύουν τη διακριτή τους φύση. Οι αρχικές αυτές εμπειρίες για τον αριθμό εμπλουτίζονται και συστηματικοποιούνται περαιτέρω στα πρώτα χρόνια της σχολικής εκπαίδευσης, που δίνει μεγάλη έμφαση στους φυσικούς αριθμούς, τις ιδιότητές τους, τις σχέσεις τους (π.χ., σχέσεις διάταξης και κυρίως προσθετικές σχέσεις) και τις αριθμητικές πράξεις που τους αφορούν. Έτσι, πριν την εισαγωγή των μη φυσικών αριθμών στη διδασκαλία, συνήθως με τη μορφή κλασμάτων, έχουν ήδη εγκαθιδρυθεί αρχικές θεωρίες για τον αριθμό, στο πλαίσιο των οποίων ο αριθμός λειτουργεί ως φυσικός αριθμός. Θεμελιώδες χαρακτηριστικό των αριθμών στο πλαίσιο αυτό είναι η διακριτότητα. Το χαρακτηριστικό αυτό συνάδει με όλες τις εμπειρίες των παιδιών σχετικά με την πληθικότητα διακριτών συλλογών αντικειμένων και, κυρίως, με τα συμβολικά εργαλεία που αφορούν τους αριθμούς, όπως η ακολουθία των αριθμολέξεων (ένα, δύο, τρία,...) και η αριθμητική ακολουθία (1, 2, 3,...). Η ιδέα της διακριτότητας των αριθμών θεωρείται ως θεμελιώδης παραδοχή των αρχικών θεωριών των παιδιών για τον αριθμό (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010).

Η προσέγγιση της θεωρίας πλαισίου στην εννοιολογική αλλαγή υποθέτει ότι οι μαθητές βασίζονται στις αρχικές τους θεωρίες για τον αριθμό προκειμένου να ερμηνεύσουν τις νέες πληροφορίες για τους ρητούς, στις οποίες εκτίθενται κατά τη διδασκαλία. Πολλές από τις πληροφορίες αυτές δεν είναι συμβατές με την αρχική τους θεωρία για τον αριθμό. Παρόμοια με άλλες προσεγγίσεις στην εννοιολογική αλλαγή, η προσέγγιση της θεωρίας πλαισίου προβλέπει συστηματικά λάθη στις περιπτώσεις αυτές. Επιπλέον, η προσέγγιση της θεωρίας πλαισίου επιχειρεί να περιγράψει τη διαδικασία της εξέλιξης των αρχικών θεωριών πλαισίου των παιδιών για τον αριθμό, υπό την επίδραση της διδασκαλίας (Βαμβακούση, 2019). Πιο συγκεκριμένα, υποθέτει ότι οι μαθητές εμπλουτίζουν τις αρχικές τους θεωρίες πλαισίου για τον αριθμό με νέες πληροφορίες για τους μη-φυσικούς, χρησιμοποιώντας συνήθως προσθετικούς μηχανισμούς μάθησης, όπως η αφομοίωση. Όταν, ωστόσο, οι νέες πληροφορίες είναι ασύμβατες με την προϋπάρχουσα δομή, η αφομοίωσή τους διασπά τη συνοχή της δομής και προκαλεί εσωτερική ασυνέπεια και παρανοήσεις. Κατά τη διάρκεια αυτής της αργής και σταδιακής διαδικασίας, εμφανίζεται ένας ιδιαίτερος τύπος παρανοήσεων, οι *συνθετικές αντιλήψεις* ή *συνθετικά μοντέλα*. Αυτού του είδους οι παρανοήσεις αντανακλούν την αφομοίωση της νέας πληροφορίας, χωρίς την άρση των αρχών και των παραδοχών της αρχικής θεωρίας πλαισίου. Η υπόθεση αυτή έχει οδηγήσει στη διατύπωση νέων προβλέψεων για την ανάπτυξη της κατανόησης για τους ρητούς και, ειδικότερα, για τη διάταξή τους (Βαμβακούση, 2019).

Η πυκνή διάταξη των ρητών

Η διάταξη των φυσικών και, γενικότερα, των ακεραίων, αριθμών είναι διακριτή. Ανάμεσα σε δύο διαφορετικούς φυσικούς αριθμούς υπάρχει πεπερασμένο πλήθος φυσικών αριθμών. Διαφορετικά, για κάθε φυσικό αριθμό ορίζεται ο (μοναδικός) επόμενός του, ο οποίος είναι κατά μία μονάδα μεγαλύτερος από το δεδομένο φυσικό. Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή και ως «αρχή του επόμενου». Η αρχή του επόμενου γίνεται αντιληπτή από νωρίς. Ακόμα και παιδιά της πρωτοσχολικής ηλικίας είναι σε θέση να την αξιοποιήσουν για να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι δεν υπάρχει «ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός» (Hartnett & Gelman, 1998).

Αντίθετα με το σύνολο των φυσικών, το σύνολο των ρητών αριθμών είναι πυκνά διατεταγμένο. Ανάμεσα σε οποιουσδήποτε δύο διαφορετικούς ρητούς αριθμούς υπάρχει πάντα ένας, άρα τελικά άπειροι αριθμοί. Ισοδύναμα, στο σύνολο των ρητών αριθμών παύει να ισχύει η αρχή του επόμενου. Η πυκνότητα είναι, θεωρητικά, προσπελάσιμη με μαθηματικές γνώσεις και εργαλεία που είναι διαθέσιμα στους μαθητές ήδη από την πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Για παράδειγμα, μπορεί κανείς να συμπεράνει ότι ανάμεσα σε δύο δεκαδικούς (π.χ., 0,5 και 0,6) υπάρχουν κι άλλοι αριθμοί, προσθέτοντας ένα μηδενικό στο δεκαδικό τους μέρος (π.χ., 0,50 και 0,60). Παρόμοια, μπορεί κανείς να συμπεράνει ότι ανάμεσα σε δύο κλάσματα (π.χ., 2/5 και 3/5) υπάρχουν κι άλλοι αριθμοί, μετατρέποντάς τα σε ισοδύναμα κλάσματα με μεγαλύτερους όρους (π.χ., 4/10 και 6/10). Η διαδικασία αυτή μπορεί να επαναληφθεί για οποιουσδήποτε από τους ενδιάμεσους αριθμούς που προκύπτουν και να συνεχιστεί επ’ άπειρο, παράγοντας άπειρους ενδιάμεσους στους αρχικούς αριθμούς.

Στην πραγματικότητα, ωστόσο, η κατανόηση της πυκνής διάταξης των ρητών είναι ιδιαίτερα απαιτητική. Πλήθος ερευνών τεκμηριώνουν ότι η διακριτότητα --θεμελιώδης ιδιότητα των φυσικών αριθμών-- αποδίδεται καταχρηστικά στους ρητούς (και τους πραγματικούς) αριθμούς από μαθητές στην πρωτοβάθμια και τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Malara, 2001· McMullen et al., 2015· Merenluoto & Lehtinen, 2002· Neumann, 1998· Hannula et al., 2006· Smith, 1995· Smith et al., 2005), από φοιτητές (Vamvakoussi et al., 2012), ακόμα και από φοιτητές σε τμήματα Μαθηματικών (Giannakoulias et al., 2007), καθώς και από μελλοντικούς εκπαιδευτικούς (Depaepe et al., 2015· Tirosh et al., 1999).

Υιοθετώντας την προσέγγιση της θεωρίας πλαισίου στην εννοιολογική αλλαγή, οι Vamvakoussi και Vosniadou (2004, 2007, 2010) υπέθεσαν ότι η ιδέα της διακριτότητας δεν αίρεται δια μιας και προέβλεψαν την ύπαρξη ενδιάμεσων επιπέδων κατανόησης της πυκνής διάταξης των ρητών, τα οποία και τεκμηρίωσαν δείχνοντας ότι η κατανόηση της απειρίας των ενδιάμεσων σε ένα διάστημα με άκρα ρητούς αριθμούς εξαρτάται από το είδος των άκρων. Πράγματι, φαίνεται ότι οι μαθητές της δευτεροβάθμιας αντιλαμβάνονται την απειρία των ενδιάμεσων πρώτα ανάμεσα σε δύο φυσικούς αριθμούς, στη συνέχεια ανάμεσα σε δύο δεκαδικούς, και τέλος ανάμεσα σε δύο κλάσματα. Επιπλέον, οι μαθητές δυσκολεύονται να αποδεχτούν ότι ανάμεσα σε δύο δεκαδικούς μπορούν να βρίσκονται κλάσματα και ότι ανάμεσα σε δύο κλάσματα μπορούν να βρεθούν δεκαδικοί, ακόμα και όταν απαντούν ότι υπάρχουν άπειροι ενδιάμεσοι. Τέλος υπάρχουν και μαθητές οι οποίοι συστηματικά διαφοροποιούν τα κλάσματα και τους δεκαδικούς ως προς τη διάταξη, θεωρώντας ότι οι δεκαδικοί είναι πυκνά διατεταγμένοι, ενώ η διάταξη των κλασμάτων είναι διακριτή, ή αντίστροφα. Οι Vamvakoussi και Vosniadou θεώρησαν ότι τα ευρήματα αυτά δείχνουν ότι οι μαθητές έχουν διαμορφώσει ένα συνθετικό μοντέλο για το σύνολο των ρητών. Στο συνθετικό αυτό μοντέλο, το σύνολο των ρητών αναπαρίσταται ως μια συλλογή ξένων μεταξύ τους συνόλων (φυσικοί, δεκαδικοί, κλάσματα) που προκύπτει καθώς οι μαθητές αφομοιώνουν πληροφορίες για τους μη φυσικούς αριθμούς στην προϋπάρχουσα θεωρία πλαισίου για τον αριθμό, χωρίς να αντιλαμβάνονται ότι οι (ρητοί) δεκαδικοί και τα κλάσματα είναι διαφορετικές συμβολικές αναπαραστάσεις των ίδιων μαθηματικών αντικειμένων (και όχι διαφορετικά είδη αριθμών) και χωρίς να ανα-κατηγοριοποιούν τους φυσικούς ως ειδική περίπτωση κλασμάτων ή δεκαδικών.

Οι Vamvakoussi και Vosniadou (2012) υπέθεσαν ότι υπάρχει και μια διαφορετική συνθετική αντίληψη των μαθητών για την πυκνή διάταξη. Συγκεκριμένα, υπέθεσαν ότι, παρά το γεγονός ότι η «απειρία των ενδιάμεσων» και η «μη ύπαρξη του επόμενου» είναι ισοδύναμες όψεις της πυκνότητας από μαθηματική άποψη, δε συμβαίνει το ίδιο και από την πλευρά των μαθητών. Παρατήρησαν ότι στη σχετική βιβλιογραφία, όταν οι μαθητές είχαν εξεταστεί και για την «απειρία των ενδιάμεσων» και για τη «μη ύπαρξη του επόμενου», η επίδοσή τους ήταν συστηματικά καλύτερη στην πρώτη περίπτωση. Οι Vamvakoussi και Vosniadou έδωσαν μια πιθανή ερμηνεία αυτού του φαινομένου επικαλούμενες τη διάκριση ανάμεσα στο *δυνάμει άπειρο* και το *ενεργεία άπειρο*. Η πιο προσιτή μορφή του απείρου είναι το δυνάμει άπειρο, με τη μορφή μιας ατέρμονης διαδικασίας (βλ. και Hartnett & Gelman, 1998· Núñez & Lakoff, 2005· Singer & Voica, 2008). Για παράδειγμα, η συνειδητοποίηση ότι για κάθε φυσικό είναι δυνατόν να βρεθεί ο επόμενός του προσθέτοντας μια μονάδα, κι επόμενος του επόμενου με τον ίδιο τρόπο, και ούτω καθεξής, μπορεί να οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι οι φυσικοί αριθμοί δεν τελειώνουν ποτέ, άρα είναι άπειροι στο πλήθος. Σε παρόμοιες επαναλήψιμες διαδικασίες, με διακριτά βήματα, σε κάθε ένα από τα οποία παράγεται ένα πεπερασμένο πλήθος αριθμών, μπορούν να εξελιχθούν οι μετασχηματισμοί δύο δεδομένων δεκαδικών (προσθέτοντας μηδενικά στο τέλος του δεκαδικού τους μέρους) ή κλασμάτων (μετατρέποντας σε ισοδύναμα με μεγαλύτερους όρους) που περιγράφτηκαν παραπάνω. Από τη στιγμή που θα γίνει αντιληπτό ότι η διαδικασία αυτή μπορεί να επαναλαμβάνεται επ' άπειρο, είναι εφικτό το συμπέρασμα ότι οι ενδιάμεσοι αριθμοί είναι άπειροι. Ωστόσο, αυτό δε συνεπάγεται απαραίτητα ότι γίνεται παράλληλα κατανοητό ότι είναι πυκνοί, με την έννοια ότι για κανέναν δεν ορίζεται επόμενος αριθμός. Οι Vamvakoussi και Vosniadou (2012), στο πρώτο πείραμα που παρουσιάζεται στο άρθρο, έδωσαν έργα κλειστού τύπου για την απειρία των ενδιάμεσων και έργα για τη μη ύπαρξη του επόμενου με τη μορφή δηλώσεων ενταγμένων σε ένα σενάριο με τις οποίες μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου έπρεπε να διαφωνήσουν ή να συμφωνήσουν και να εξηγήσουν τις απαντήσεις τους. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι τα έργα για τον επόμενο ήταν πιο απαιτητικά από τα έργα για την απειρία των ενδιάμεσων και ότι ακόμα και μαθητές που απαντούσαν συστηματικά ότι το πλήθος των ενδιάμεσων είναι άπειρο, δεν απέρριπταν το ενδεχόμενο να υπάρχει ο επόμενος.

Ωστόσο, η έρευνα των Vamvakoussi και Vosniadou (2012) ήταν ποσοτική, με πρόσβαση μόνο στις γραπτές εξηγήσεις των μαθητών, γεγονός που αφήνει ερωτήματα σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο σκέφτονται οι μαθητές για τους δύο διαφορετικούς τύπους έργων και, συνακόλουθα, για τις δύο όψεις της πυκνής διάταξης των ρητών. Ειδικότερα, όπως επισημαίνουν οι ερευνήτριες δεν είναι ξεκάθαρο πώς ερμηνεύουν οι μαθητές τον όρο «άπειρο» (Vamvakoussi & Vosniadou, 2012). Είναι πιθανόν κάποιοι μαθητές, όταν απαντούν «άπειροι αριθμοί» να εννοούν ένα πολύ μεγάλο, αλλά πεπερασμένο, πλήθος αριθμών (μπορεί κανείς να σκεφτεί, για παράδειγμα, το πλήθος των κόκκων της άμμου σε μια έρημο). Από την άλλη μεριά, από τις απαντήσεις των μαθητών σε έργα για τον επόμενο δεν είναι σαφές αν πιστεύουν ότι ο επόμενος υπάρχει ή όχι. Για παράδειγμα, οι Vamvakoussi και Vosniadou (2012) αναφέρουν μαθητές που διαφώνησαν με τη δήλωση ότι το 2,002 είναι ο επόμενος του 2,001, επικαλούμενοι αντιπαραδείγματα, όπως το παρακάτω:

Δεν είναι απαραίτητο το 2,002 να έρχεται αμέσως μετά το 2,001. Ας πούμε, υπάρχει και το 2,0015 και το 2,0012 (σελ. 277).

Το ίδιο πρόβλημα υπάρχει και με απαντήσεις του τύπου «δεν μπορώ να προσδιορίσω τον επόμενο» ή «δεν μπορεί να βρεθεί ο επόμενος», στις οποίες δε διευκρινίζεται αν ο επόμενος αριθμός υπάρχει ή όχι. Θα πρέπει να σημειωθεί, επίσης, ότι τα δεδομένα που συλλέγονται μέσω ερωτηματολογίων αποτυπώνουν ένα στιγμιότυπο της κατανόησης του κάθε μαθητή και δεν δίνουν πληροφορίες για τις διαδικασίες της αλλαγής της στο διάστημα κατά το οποίο συμβαίνει.

Η παρούσα έρευνα

Στην παρούσα έρευνα εξετάσαμε την κατανόηση μαθητών της Β΄ Λυκείου σε έργα για την απειρία των ενδιάμεσων σε ένα διάστημα με άκρα ρητούς αριθμούς και σε έργα για τη μη ύπαρξη του επόμενου. Στόχος μας ήταν να ελέγξουμε την υπόθεση ότι οι δύο όψεις της πυκνότητας, στις οποίες αντιστοιχούν τα έργα αυτά, δεν είναι ισοδύναμες από την πλευρά των μαθηματικών, με τη δεύτερη να είναι πιο απαιτητική. Η μέθοδος που επιλέξαμε δανείζεται στοιχεία από το διδακτικό πείραμα (Steffe & Thompson, 2000) και τη μικρογενετική προσέγγιση στην ανάλυση της μάθησης (Siegler, 2006). Πιο συγκεκριμένα, αφού ελέγχθηκαν οι αρχικές τους απαντήσεις στα έργα, οι μαθητές εκτέθηκαν σε μια μικρής διάρκειας παρέμβαση για τον αριθμητικό μέσο δύο αριθμών και τον τρόπο υπολογισμού του στο πλαίσιο μια επαναλήψιμης διαδικασίας. Στη συνέχεια εξετάσαμε αν αξιοποίησαν αυθόρμητα ή μετά από βοηθητική νύξη το εργαλείο αυτό και τις αλλαγές που αυτό πυροδότησε τόσο όσον αφορά τις απαντήσεις των μαθητών, όσο και τις εξηγήσεις τους.

Η συγκεκριμένη μέθοδος επιτρέπει να γίνουν ερωτήσεις στους μαθητές, ώστε να διευκρινιστεί τόσο η ερμηνεία που δίνουν στον όρο «άπειροι ενδιάμεσοι», όσο και το αν πιστεύουν ότι ο επόμενος υπάρχει ή όχι, κάτι που αποτελεί πρόβλημα σε έρευνες με ερωτηματολόγια (Vamvakoussi & Vosniadou, 2012). Επιπλέον, η παρέμβαση με την παροχή ενός εργαλείου, το οποίο δίνει μια νέα δυνατότητα στους μαθητές να αντιμετωπίσουν τα έργα για την πυκνότητα, αναμένεται να πυροδοτήσει μεταβολές στον τρόπο που αντιλαμβάνονται την πυκνή διάταξη των ρητών και να επιτρέψει την εξέτασή τους. Αξίζει να διευκρινιστεί ότι στο συγκεκριμένο σχεδιασμό δεν εξετάζεται η αποτελεσματικότητα της παρέμβασης (π.χ., σε σχέση με μια άλλη, βλ. Siegler, 2006). Ειδικότερα, στόχος είναι η μελέτη παραμέτρων της μεταβολής στον τρόπο σκέψης των μαθητών για το δεδομένο ζήτημα. Η οπτική αυτή είναι συμβατή με τις αρχές του διδακτικού πειράματος, κεντρικός στόχος του οποίου είναι η διερεύνηση υποθέσεων για τον τρόπο που σκέφτονται οι μαθητές (Steffe & Thompson, 2000).

Η πρόβλεψή μας, συνεπής με την υπόθεσή μας, ήταν ότι οι μαθητές θα βελτιώνονταν στα έργα για την απειρία των ενδιάμεσων, αλλά δε θα έφταναν να αμφισβητήσουν την ύπαρξη του επόμενου αριθμού.

Μέθοδος

Συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες ήταν 15 μαθητές της Β΄ τάξης του Λυκείου, αγόρια, από διάφορα σχολεία της κεντρικής και δυτικής Θεσσαλονίκης. Όλοι οι συμμετέχοντες είχαν επιλέξει τη Θετική Κατεύθυνση, ήταν μαθητές διαφορετικού επιπέδου στα μαθηματικά και παρακολουθούσαν φροντιστηριακά μαθήματα σε τάξη στην οποία δίδασκε ο πρώτος συγγραφέας.

Ερευνητικά εργαλεία

Για τις ανάγκες του προελέγχου και του μεταελέγχου χρησιμοποιήθηκαν δύο τύποι έργων σχετικά με την πυκνή διάταξη: έργα για το πλήθος των ενδιάμεσων αριθμών σε ένα διάστημα και έργα για τη (μη) ύπαρξη του επόμενου αριθμού στους ρητούς. Συγκεκριμένα, στον προέλεγχο δόθηκε στους μαθητές ερωτηματολόγιο με δύο τύπων έργα. Στο πρώτο, με συνολικά 7 δοκιμασίες, οι μαθητές ρωτήθηκαν πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα σε δύο ρητούς αριθμούς. Σε περίπτωση που η απάντησή τους ήταν «άπειροι», τους ζητήθηκε να την εξηγήσουν. Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται τα ζευγάρια των αριθμών που χρησιμοποιήθηκαν ως άκρα του διαστήματος, η σειρά με την οποία δόθηκαν στους μαθητές και οι κωδικοί με τους οποίους θα αναφέρονται στη συνέχεια.

Ακολουθούσε ένα έργο με 2 δοκιμασίες για τη (μη) ύπαρξη του επόμενου ενός δεκαδικού (ΕπΔ) και ενός κλάσματος (ΕπΚ). Τα έργα αυτά παρουσιάστηκαν με τη μορφή δήλωσης ενός υποθετικού παιδιού, ως εξής: *Ο αμέσως επόμενος αριθμός του 0,15 είναι ο 0,16, γιατί αμέσως μετά το 15 είναι το 16* και *Το 3/7 είναι ο αμέσως επόμενος αριθμός του 2/7, γιατί το 3 έρχεται αμέσως μετά το 2*. Οι μαθητές ρωτήθηκαν αν συμφωνούν ή διαφωνούν με την κάθε δήλωση. Σε περίπτωση διαφωνίας τους ζητήθηκε να εξηγήσουν γιατί και να διατυπώσουν τη δική τους άποψη.

Στο μεταέλεγχο χρησιμοποιήθηκαν τα ίδια έργα, όπως στον προέλεγχο, και δύο επιπλέον έργα μεταφοράς (Μετ1, Μετ2) που εξέταζαν κατά πόσο οι μαθητές μπορούσαν να ανταποκριθούν σε ερωτήματα για την πυκνή διάταξη σε ένα γενικευμένο πλαίσιο που, αντί συγκεκριμένων αριθμών, περιλάμβανε μεταβλητές. Στο Μετ1 οι μαθητές ρωτήθηκαν αν μπορούν να προσδιορίσουν πόσοι αριθμοί βρίσκονται ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β. Στο Μετ2 ρωτήθηκαν αν μπορεί να προσδιοριστεί η πρώτη τιμή που θα πάρει η μεταβλητή x, αν το x κινείται στο ανοιχτό διάστημα(0,1).

Πίνακας 1
Έργα για την απειρία των ενδιάμεσων σε ένα διάστημα με άκρα ρητούς αριθμούς

Α/Α Έργου	**Άκρα διαστήματος**	**Κωδικός**
1	1,512 – 1,513	Δ1
2	2/5 – 3/5	Κ1
3	0,1 – 0,2	Δ2
4	9/5 – 9/4	Κ2
5	0 – 1	Φ
6	9/5 – 7/3	Κ3
7	0,5 – 5/6	Δ-Κ

Η εισαγωγή του αριθμητικού μέσου

Για τις ανάγκες της έρευνας αξιοποιήθηκε η ιδέα του αριθμητικού μέσου δύο αριθμών: Δεδομένων οποιωνδήποτε δύο διαφορετικών αριθμών α, β, με α <β, ο αριθμητικός τους μέσος είναι το μισό του αθροίσματός τους και αντιστοιχεί στον αριθμό που βρίσκεται στο μέσο του διαστήματος που ορίζουν τα α, β. Η γνώση του αριθμητικού μέσου μπορεί να οδηγήσει στην εύρεση ενός ενδιάμεσου ανάμεσα σε δύο ψευδο-διαδοχικούς αριθμούς, όπως το 0,1 και το 0,2, ή το 3/5 και το 4/5. Αν η διαδικασία αυτή επαναληφθεί στο διάστημα με ένα από τα αρχικά άκρα και το μέσο, μπορεί να βρεθεί και άλλος ενδιάμεσος. Αν γίνει αντιληπτή η επ'άπειρο επαναληψιμότητα αυτής της διαδικασίας και εφόσον γενικευτεί για οποιαδήποτε άκρα, τότε μπορεί να οδηγήσει στην απειρία των ενδιάμεσων, αλλά και στη μη ύπαρξη του επόμενου.

Η εισαγωγή του αριθμητικού μέσου έγινε ατομικά με κάθε μαθητή και διάρκεσε περίπου 40 λεπτά. Αρχικά, οι μαθητές ρωτήθηκαν αν θυμούνται τον ορισμό και τον τύπο του αριθμητικού μέσου. Όταν ήταν απαραίτητο, τους έγινε υπενθύμιση, τους δόθηκε ο σχετικός τύπος και η γεωμετρική αναπαράσταση του αριθμητικού μέσου ως το μέσο του διαστήματος μεταξύ δυο αριθμών στην αριθμογραμμή. Στη συνέχεια τους ζητήθηκε να βρουν τον αριθμητικό μέσο για τους αριθμούς 2 και 3, 0,1 και 0,2, 2/5 και 3/5. Για κάθε ζευγάρι, τους ζητήθηκε να βρουν τον αριθμητικό μέσο μεταξύ του πρώτου αριθμητικού μέσου και ενός από τους δύο αρχικούς αριθμούς, και η διαδικασία επαναλήφθηκε δύο φορές για τα νέα ζευγάρια αριθμών. Σε κάθε δοκιμασία επαναλαμβανόταν η ερώτηση «Μπορώ να συνεχίσω με τον ίδιο τρόπο;». Οι μαθητές είχαν στη διάθεσή τους κομπιουτεράκια, προκειμένου να μην επιβαρυνθούν με τις απαραίτητες πράξεις.

Στόχος μας ήταν να εξοικειωθούν οι μαθητές με την ιδέα μιας επαναλήψιμης διαδικασίας και να συμπεράνουν ότι ανάμεσα σε δύο αριθμούς μπορεί να βρεθεί πάντα ένας ενδιάμεσος, με τον τύπο του αριθμητικού μέσου. Ωστόσο, δεν έγινε καμία ρητή σύνδεση με τα έργα για την απειρία των ενδιάμεσων και του επόμενου αριθμούς, τα οποία προηγήθηκαν κατά τον προέλεγχο, έτσι ώστε να ελεγχθεί κατά πόσο οι μαθητές θα αξιοποιούσαν αυθόρμητα την ιδέα του αριθμητικού μέσου για να αντιμετωπίσουν τα έργα για την πυκνότητα.

Διαδικασία

Η συλλογή των δεδομένων έγινε σε διάστημα 4 μηνών. Κάθε μαθητής συμμετείχε σε δύο ατομικές συνεντεύξεις, στο σπίτι του ή στο φροντιστήριο, οι οποίες μαγνητοφωνήθηκαν και απομαγνητοφωνήθηκαν για τις ανάγκες της έρευνας. Η κάθε συνάντηση είχε διάρκεια κατά μέσο όρο 30 - 40 λεπτά. Οι δύο συναντήσεις έγιναν με διαφορά δύο εβδομάδων περίπου η μία από την άλλη. Στην πρώτη συνάντηση δόθηκε σε κάθε μαθητή ατομικά το ερωτηματολόγιο του προέλεγχου. Ζητήθηκε προφορική απάντηση, εξήγηση της απάντησης και γραπτή καταγραφή της απάντησης. Στην περίπτωση που κάποιος μαθητής απαντούσε ότι υπάρχουν άπειροι ενδιάμεσοι, του γίνονταν διευκρινιστικές ερωτήσεις. Για παράδειγμα, «*Τι εννοείς όταν λες «άπειροι»;»*, «*Εννοείς 1.000; 1.000.000; Ή κάτι άλλο;», «Θα μπορούσε ένα υπολογιστής να τους βρει όλους;», «Μπορείς να δώσεις παραδείγματα τέτοιων αριθμών;»*. Στην περίπτωση που κάποιος μαθητής απαντούσε ότι δεν μπορεί να προσδιοριστεί ο επόμενος αριθμός, του γίνονταν διευκρινιστικές ερωτήσεις με στόχο να εκφράσει την άποψή του για τον αν υπάρχει ή όχι ο επόμενος. Για παράδειγμα, «*Θα μπορέσει* [το παιδί του σεναρίου] *να τον βρει; Γιατί;*» «*Θα μπορούσε ένας υπολογιστής να τον βρει;*», «*Υπάρχει* [ο επόμενος αριθμός], *αλλά δεν μπορείς να πεις ποιος είναι*;» Ακολούθησε η εισαγωγή του αριθμητικού μέσου.

Στην δεύτερη συνάντηση δόθηκε σε κάθε μαθητή το ερωτηματολόγιο που είχαν συμπληρώσει στην πρώτη. Του ζητήθηκε να διαβάσει τις απαντήσεις του στις ερωτήσεις για το πλήθος των ενδιάμεσων αριθμών και ρωτήθηκε αν θέλει να αλλάξει κάτι σε αυτές. Την πρώτη φορά που ο μαθητής διατηρούσε μια απάντηση του τύπου «υπάρχει πεπερασμένο πλήθος ενδιάμεσων αριθμών», γινόταν μια πρώτη βοηθητική νύξη με την ερώτηση αν ανάμεσα στους δεδομένους, ή σε δύο από τους ενδιάμεσους που πρότεινε ο μαθητής δεν υπάρχει κανένας άλλος αριθμός. Αν επέμενε στην αρχική απάντηση, του γινόταν και μία δεύτερη νύξη με το ερώτημα αν μπορεί να βρει τον αριθμητικό μέσο αυτών των δύο αριθμών. Ανεξάρτητα από την τελική απάντηση του μαθητή και αν άλλαζε ή όχι την αρχική του απάντηση, δεν γινόταν άλλη νύξη για τον αριθμητικό μέσο για τις υπόλοιπες ερωτήσεις. Η διαδικασία αυτή επαναλήφθηκε και για τις ερωτήσεις για τον επόμενο. Στην πρώτη ερώτηση που οι μαθητές αναφέρθηκαν στον επόμενο του δοσμένου αριθμό, ρωτήθηκαν αν ανάμεσα σε αυτούς του δύο αριθμούς υπάρχει άλλος αριθμός. Αν η απάντηση ήταν αρνητική, ακολουθούσε μία δεύτερη νύξη, με την οποία επαναδιατυπωνόταν το ερώτημα ως εξής: *«Αν αυτός είναι ο επόμενος του δεδομένου αριθμού, τότε ανάμεσα σε αυτούς τους δύο αριθμούς δεν υπάρχει άλλος, σωστά;»* Αν ο μαθητής συμφωνούσε, τότε ακολουθούσε το ερώτημα αν είναι δυνατόν να βρεθεί ο αριθμητικός μέσος αυτών των δύο αριθμών. Καμιά άλλη νύξη δεν έγινε στη συνέχεια. Οι ίδιες διευκρινιστικές ερωτήσεις που έγιναν στον προέλεγχο έγινα και στο μεταέλεγχο. Τέλος δόθηκαν τα έργα μεταφοράς (Μετ1, Μετ2). Στα έργα αυτά δεν έγινε καμία νύξη για τον αριθμητικό μέσο.

Αποτελέσματα

Έργο για την απειρία του πλήθους των ενδιάμεσων αριθμών

Κοινές δοκιμασίες προελέγχου-μεταελέγχου. Οι απαντήσεις των μαθητών στις δοκιμασίες για την απειρία κατηγοριοποιήθηκαν σε 4 κατηγορίες. Η πρώτη (ΚΕ) περιλαμβάνει τις απαντήσεις του τύπου «δεν υπάρχει κανένας ενδιάμεσος αριθμός». Η δεύτερη (ΠΠ-) περιλαμβάνει τις απαντήσεις του τύπου «υπάρχει πεπερασμένο πλήθος ενδιάμεσων», όπου αναφέρονται «λίγοι» ενδιάμεσοι αριθμοί, συνήθως δεκαδικοί με το πολύ τρία δεκαδικά ψηφία. Η τρίτη (ΠΠ+) περιλαμβάνει τις απαντήσεις του τύπου «υπάρχει πεπερασμένο πλήθος ενδιάμεσων», με το πλήθος των ενδιάμεσων να προσδιορίζεται με τη χρήση «μεγάλων» αριθμών (για παράδειγμα, «είναι δισεκατομμύρια»). Τέλος, η τέταρτη κατηγορία (ΑΠ) περιλαμβάνει τις απαντήσεις του τύπου «υπάρχουν άπειροι ενδιάμεσοι», στις οποίες συμπεριλαμβάνονται και περιγραφές όπως «είναι αμέτρητοι», «δεν τελειώνουν ποτέ». Στον Πίνακα 2 παρουσιάζεται η συχνότητα της κάθε κατηγορίας ανά έργο στον προέλεγχο (ΠροΕ) και στον μεταέλεγχο (ΜεταΕ).

Από τον Πίνακα 2 φαίνεται ότι στον προέλεγχο η επικρατούσα απάντηση των μαθητών ήταν ότι υπάρχει πεπερασμένο πλήθος, συμπεριλαμβανομένου και του μηδενός, ενδιάμεσων αριθμών. Πράγματι, στο σύνολο των απαντήσεων που δόθηκαν από τους 15 μαθητές στα 7 έργα (15x7=105), οι απαντήσεις (ΚΕ), (ΠΠ-) και (ΠΠ+) ήταν συνολικά 62 (59%). Αντίθετα, στο μεταέλεγχο, στο σύνολο των απαντήσεων σε όλα τα έργα (105), οι 28 (26,7%) ήταν του τύπου «πεπερασμένο πλήθος ενδιάμεσων», ενώ κανένας μαθητής δεν απάντησε ότι δεν υπάρχει κανένας ενδιάμεσος, σε κανένα έργο. Η επικρατούσα απάντηση στο μεταέλεγχο ήταν του τύπου «άπειροι ενδιάμεσοι αριθμοί» (N=77, 73,3%). Είναι σημαντικό να αναφερθεί, ωστόσο, ότι η απάντηση αυτού του τύπου δεν αντανακλά απαραίτητα την επαρκή κατανόηση για τη σημασία του όρου «άπειροι». Πράγματι, ορισμένοι μαθητές έδωσαν παραδείγματα ενδιάμεσων αριθμών, δείχνοντας ότι διέθεταν ένα μηχανισμό που παράγει άπειρους ενδιάμεσους. Για παράδειγμα, ο Μ11 έφερε ως παραδείγματα αριθμών ανάμεσα στους 2/5 και 3/5 τους 2,5/6, 2,56/6, ... Ο Μ13 επεξήγησε τη χρήση του όρου «άπειροι» λέγοντας ότι «πάντα μπορούν να βρεθούν παραπάνω ... δεν μπορεί να προσδιοριστεί». Αντίθετα, ο μαθητής Μ7 απάντησε σε κάποιες ερωτήσεις «είναι αμέτρητοι», αλλά σε άλλες προσδιόρισε τον όρο «αμέτρητοι» ως «δισεκατομμύρια». Παρόμοια, ο Μ2 απάντησε ότι υπάρχουν «άπειροι» σε όλες τις ερωτήσεις, αλλά όταν του ζητήθηκε να προσδιορίσει τι εννοούσε, περίγραψε το πλήθος ως «πολλοί, πάνω από 1.000», ή «αρκετοί τέλος πάντων, 2.000 και ...»

Πίνακας 2

Έργα για την απειρία των ενδιάμεσων αριθμών: Συχνότητες των κατηγοριών απάντησης ανά έργο, στον προέλεγχο και το μεταέλεγχο

Έργα	ΚΕ		ΠΠ-		ΠΠ+		ΑΠ	
	ΠροΕ	ΜεταΕ	ΠροΕ	ΜεταΕ	ΠροΕ	ΜεταΕ	ΠροΕ	ΜεταΕ
Φ	0	0	4	2	3	2	8	11
Δ1	5	0	5	2	0	1	5	12
Δ2	1	0	7	3	1	2	6	10
Κ1	2	0	7	3	1	1	5	11
Κ2	3	0	6	3	1	1	5	11
Κ3	1	0	7	2	0	2	7	11
Δ-Κ	0	0	7	4	1	0	7	11
Σύνολο	12	0	43	19	7	9	43	77

Για τον λόγο αυτόν, προκειμένου να γίνει μια πιο ακριβής καταγραφή της συνολικής εικόνας του κάθε μαθητή στον προέλεγχο και το μεταέλεγχο, εξετάστηκε πόσες φορές αναφέρθηκε κάθε μαθητής ρητά σε πεπερασμένο πλήθος ενδιάμεσων στο σύνολο των έργων. Στον Πίνακα 3 παρουσιάζονται συγκεντρωτικά τα σχετικά στοιχεία, έτσι ώστε να είναι ορατή η μετατόπιση του κάθε μαθητή από τον προέλεγχο στο μεταέλεγχο. Πιο συγκεκριμένα, στην πρώτη στήλη εμφανίζεται το πλήθος των ρητών αναφορών σε πεπερασμένο πλήθος ενδιάμεσων αριθμών (ΡΑΠΠ) που έδωσε κάθε μαθητής στον προέλεγχο (ΠροΕ), ενώ στην πρώτη γραμμή εμφανίζεται το αντίστοιχο πλήθος για το μεταέλεγχο (ΜεταΕ). Σε κάθε κελί αντιστοιχίζονται οι μαθητές ανάλογα με τις απαντήσεις που έδωσαν. Ένας μαθητής βρίσκεται στο κελί (κ, λ) αν έκανε κ ΡΑΠΠ στον προέλεγχο και λ ΡΑΠΠ στο μεταέλεγχο. Με έντονο χρώμα σημαίνονται οι μαθητές στους οποίους έγινε βοηθητική νύξη που παρέπεμπε στην παρέμβαση κατά το μεταέλεγχο (9 στους 15).

Από τον Πίνακα 3 φαίνεται ότι στο μεταέλεγχο 11 μαθητές δεν έκαναν καμία ρητή αναφορά σε πεπερασμένο πλήθος ενδιάμεσων. Οι 4 από αυτούς (Μ3 Μ5, Μ11, Μ13, σκιασμένοι με γκρι χρώμα, εφεξής Ομάδα 1) είχαν απαντήσει ότι υπάρχει άπειρο πλήθος ενδιάμεσων αριθμών σε όλα τα έργα, ήδη από τον προέλεγχο. Οι μαθητές αυτοί διατήρησαν τις απαντήσεις τους και στο μεταέλεγχο και δε χρειάστηκαν βοηθητική νύξη. Οι υπόλοιποι 7 μαθητές (Μ2, Μ4, Μ7, Μ10, Μ12, Μ14, Μ15, εφεξής, Ομάδα 2) είχαν απαντήσει ότι υπάρχει πεπερασμένο πλήθος ενδιάμεσων σε ένα έως επτά έργα του προελέγχου. Από αυτούς τους μαθητές, ο Μ4 ήταν ο μόνος που επικαλέστηκε αυθόρμητα τον αριθμητικό μέσο σε όλα τα έργα κατά το μεταέλεγχο, αναφέροντας ότι «με αιτιολογία τον αριθμητικό μέσο, σε όλες τις ερωτήσεις θα υπάρχουν άπειροι ενδιάμεσα». Ο Μ14 χρειάστηκε μόνο μία νύξη, ενώ σε όλους τους υπόλοιπους χρειάστηκε και η δεύτερη νύξη, δηλαδή η ρητή αναφορά από τον ερευνητή στον αριθμητικό μέσο, προκειμένου να αλλάξουν τις αρχικές τους απαντήσεις.

Οι υπόλοιποι 4 μαθητές (Μ1, Μ6, Μ8, Μ9, σκιασμένοι με μαύρο χρώμα, εφεξής Ομάδα 3) απάντησαν «πεπερασμένο πλήθος ενδιάμεσων αριθμών» σε τουλάχιστον έξι από τα έργα του προελέγχου και διατήρησαν αυτή την απάντηση σε τουλάχιστον 3 από τα 7 έργα του μεταελέγχου. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι ο μαθητής Μ1 άλλαξε από πεπερασμένο σε άπειρο μόνο στο έργο στο οποίο του έγιναν οι δύο νύξεις και στις επόμενες διατήρησε τις αρχικές απαντήσεις του. Ο μαθητής Μ8 άλλαξε από πεπερασμένο σε άπειρο πλήθος μόνο στην περίπτωση των φυσικών αριθμών. Τέλος, ο μαθητής Μ6, σε όλες τις ερωτήσεις ακόμα και στο μεταέλεγχο συνεχίζει να αναφέρεται σε πεπερασμένο πλήθος αριθμών. Ωστόσο, πρέπει να αναφερθεί ότι αυτοί οι 4 μαθητές σημείωσαν μια μικρή βελτίωση σε σχέση με τις απαντήσεις τους στον προέλεγχο, καθώς μετακινήθηκαν από απαντήσεις του τύπου ΚΕ (κανείς ενδιάμεσος) σε απαντήσεις του τύπου ΠΠ- ή ΠΠ+. Πράγματι, όπως φαίνεται και από τον Πίνακα 1, στο μεταέλεγχο κανείς μαθητής δεν απάντησε ότι ανάμεσα σε κάποιο διάστημα δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

Πίνακας 3

Πλήθος ρητών αναφορών σε πεπερασμένο πλήθος ενδιάμεσων: Μετατοπίσεις των μαθητών από τον προέλεγχο στο μεταέλεγχο

ΡΑΠΠ	**ΡΑΠΠ (ΜεταΕ)**							
(ΠροΕ)	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	Μ3 Μ5 Μ11 Μ13							
1	**Μ10**							
2								
3	Μ2							
4	**Μ12**							
5	**Μ7**							
6	**Μ15**						**Μ8**	
7	Μ4 **Μ14**			**Μ9**			**Μ1**	**Μ6**

* *Σημείωση:* ΡΑΠΠ: Πλήθος ρητών αναφορών σε πεπερασμένο πλήθος ενδιάμεσων αριθμών

Έργο μεταφοράς 1. Με βάση τις απαντήσεις τους στο έργο Μετ1, οι μαθητές μπορούν καταρχήν να κατηγοριοποιηθούν σε 2 αδρές κατηγορίες --σε αυτούς που θεώρησαν ότι η απάντηση εξαρτάται από ποιες συγκεκριμένες τιμές θα πάρουν οι μεταβλητές α και β, και σε αυτούς που δεν έθεσαν αυτό τον περιορισμό.

Στην πρώτη κατηγορία βρέθηκαν 3 μαθητές (Μ1, Μ6, Μ10). Και οι τρεις ανέφεραν ότι η απάντηση εξαρτάται από τις «μεταβλητές» ή τα «γράμματα». Οι μαθητές Μ6 και Μ10 έδωσαν παραδείγματα, δίνοντας συγκεκριμένες τιμές στις μεταβλητές και αναφερόμενοι σε πεπερασμένο πλήθος ενδιάμεσων αριθμών. Για παράδειγμα, ο μαθητής Μ6 ανέφερε ότι «αν έχω 3 με 100 είναι πολλοί, ενώ αν έχω 2 με 3 είναι λιγότεροι». Και οι δύο αυτοί μαθητές ανήκαν στην Ομάδα 3, δηλαδή, την ομάδα των μαθητών που μετακινήθηκαν ελάχιστα από τις αρχικές απαντήσεις τους («πεπερασμένο πλήθος ενδιάμεσων» σε όλα τα έργα του προελέγχου) στο μεταέλεγχο (βλ. Πίνακα 3). Αντίθετα, ο Μ10 ανήκε στην Ομάδα 2 και, μάλιστα, στο κελί (1, 0) του Πίνακα 2 (δηλ., έδωσε μόνο μία απάντηση του τύπου «πεπερασμένο πλήθος ενδιάμεσων» στον προέλεγχο και καμία στο μεταέλεγχο). Εντούτοις δεν έκανε το βήμα της γενίκευσης που απαιτείται για να απαντήσει ότι σε οποιοδήποτε διάστημα υπάρχουν άπειροι ενδιάμεσοι αριθμοί.

Από τους υπόλοιπους 12 μαθητές, οι 2 (Μ7, Μ14), οι οποίοι ανήκαν στην Ομάδα 2, αναφέρθηκαν σε «πάρα πολλούς» ενδιάμεσους αριθμούς:

Όχι, δεν μπορώ. Αν το βάλω στον υπολογιστή θα είναι αμέτρητοι... ξέρω κι εγώ... Αν μου ζητάτε και αριθμό να πούμε 1.000.000. Ένας άνθρωπος θα βαρεθεί να το κάνει. (Μ7)

Όχι θα υπάρχουν άπειροι - πάρα πάρα πολλοί. Θα σταματάει κάποτε αλλά δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε πόσο πολλοί είναι αυτοί. (Μ14)

Οι υπόλοιποι 10 μαθητές αναφέρθηκαν ρητά σε «άπειρους ενδιάμεσους αριθμούς». Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι ανάμεσα σε αυτούς τους μαθητές βρίσκονται οι Μ8, Μ9 (Ομάδα 3), οι οποίοι αναφέρθηκαν σε μια επαναλήψιμη διαδικασία:

Όχι, γιατί θα είναι πάρα πολλοί αριθμοί. Θα είναι άπειροι.

Θα πρέπει να πάρουμε κάποιους αριθμούς στα α και β. Εεεεε...τελικά άπειροι γιατί θα μικραίνει ο αριθμός θα πάει 0,1 0,01, 0,001. (Μ9)

Σημειώνουμε ότι όλοι αυτοί οι μαθητές έδειξαν να θεωρούν ότι με την απάντηση «άπειροι» δεν προσδιορίζεται το πλήθος των ενδιάμεσων αριθμών. Τυπικά οι απαντήσεις τους είχαν την μορφή «όχι, (δεν μπορεί να προσδιοριστεί), γιατί είναι άπειροι». Ο Μ15 εξέφρασε με αρκετή σαφήνεια αυτή την άποψη:

Όχι, γιατί υπάρχουν άπειροι αριθμοί ανάμεσα τους. Αλλά το άπειρο είναι ένας αριθμός που δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε. Είναι ένα κατασκεύασμα. (Μ15)

Έργο για τη (μη) ύπαρξη του επόμενου

Κοινές δοκιμασίες προελέγχου και μεταελέγχου. Οι απαντήσεις των μαθητών στα έργα ΕπΔ και ΕπΚ ομαδοποιήθηκαν στις εξής κατηγορίες, για τις οποίες παρουσιάζονται ενδεικτικά παραδείγματα στον Πίνακα 4.

Κατηγορία Α: Ο επόμενος είναι ο δεδομένος αριθμός. Στην κατηγορία αυτή εντάχθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών που συμφώνησαν με τις δηλώσεις «ο επόμενος του 0,15 είναι ο 0,16» (ΕπΔ) και «ο επόμενος του 2/5 είναι ο 3/5» (ΕπΚ).

Κατηγορία Β: Ο επόμενος είναι άλλος (πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων). Στην κατηγορία αυτή εντάχθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών που διαφώνησαν με τις παραπάνω δηλώσεις, και πρότειναν έναν εναλλακτικό «επόμενο». Στην περίπτωση του δεκαδικού, οι απαντήσεις τύπου Β προέκυψαν συνήθως προσθέτοντας δεκαδικά ψηφία στον αριθμό (Παράδειγμα 1), αλλά και προσθέτοντας μια υποδιαστολή ακόμα (Παραδείγματα 2, 3).

Στην περίπτωση των κλασμάτων, οι απαντήσεις τύπου Β προέκυψαν πάλι είτε προσθέτοντας δεκαδικά ψηφία στον αριθμητή (Παράδειγμα 4), είτε με μετατροπή του κλάσματος σε δεκαδικό, συχνά λαμβάνοντας υπόψη μόνο ορισμένα αρχικά ψηφία της δεκαδικής μορφής (Παραδείγματα 5, 6).

Κατηγορία Γ: Ο επόμενος είναι άλλος (άπειρα δεκαδικά ψηφία). Στην κατηγορία αυτή εντάχθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών που αναφέρθηκαν σε ένα δεκαδικό με άπειρα δεκαδικά ψηφία ως τον επόμενο, είτε του 0,15 είτε του 2/7. Τέτοιες απαντήσεις παρουσιάζονται στα παραδείγματα 7, 8.

Κατηγορία Δ: Υπάρχει επόμενος, μπορεί να προσδιοριστεί. Στην κατηγορία αυτή εντάχθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών που υποστήριξαν ότι ο επόμενος υπάρχει και μπορεί να προσδιοριστεί. Αντίθετα με τις απαντήσεις που εντάχθηκαν στην Κατηγορία Γ, στις απαντήσεις αυτές δεν προσδιορίζεται ο επόμενος (βλ. Παραδείγματα 9, 10, 11).

Κατηγορία Ε: Υπάρχει ο επόμενος (δεν προσδιορίζεται). Στην κατηγορία αυτή εντάχθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών που υποστήριξαν ότι ο επόμενος υπάρχει, αλλά δεν μπορεί να προσδιοριστεί με ακρίβεια, εξαιτίας της απειρίας των αριθμών (βλ. Παράδειγμα 12).

Κατηγορία Ζ: Άλλη απάντηση. Σε αυτή την κατηγορία εντάχθηκαν απαντήσεις οι οποίες δεν μπορούσαν να ενταχθούν σε κάποια από τις προηγούμενες κατηγορίες. Πρόκειται για τις απαντήσεις δύο μαθητών (Μ6, Μ11), οι οποίοι απάντησαν ότι ο επόμενος αριθμός εξαρτάται από την επιθυμητή ακρίβεια (Παραδείγματα 13, 14).

Πίνακας 4
Παραδείγματα απαντήσεων στα έργα ΕπΔ, ΕπΚ, ανά κατηγορία

Κατηγορία	**Παραδείγματα**	
Β	Ο επόμενος του 0,15 είναι ο:	Ο επόμενος του 2/7 είναι ο:
	1. 0,151 2. 0,15.1 3. 0,15 κόμμα κάτι	4. 2,1/7 5. 0,29 επειδή το 2/7 κάνει 0,28 6. 0,286
Γ	7. 0,15000…001	8. 0,2857142850…..001
Δ	9. Κάποιος θα υπάρχει. Θα είναι 0,155, αλλά μετά, αν συνεχίσει, θα βρει άπειρους, δεν θα σταματάνε. Θα τον βρει με δυσκολία. 10. Όχι το 0,151, θα είναι άλλος. Αν κάτσει και ψάξει θα το βρει, φυσικά και υπάρχει. 11. Υπάρχουν και άλλοι αριθμοί ανάμεσα τους. Θα τον βρει αν το κάνει με υπολογιστή, θα είναι πιο εύκολο για να κάνει τον τύπο που κάναμε με τις πράξεις.	
Ε	12. Υπάρχει επόμενος, αλλά δεν θα τον βρει γιατί, όπως πριν, θα βρίσκει συνέχεια αριθμούς και δεν θα σταματά ποτέ.	
Ζ	13. Ναι, υπάρχει, αλλά θα πρέπει να είναι πιο συγκεκριμένη η εκφώνηση στο πόσα ψηφία θέλει να έχει. 14. Σύμφωνα με τον αριθμητικό μέσο θα υπάρχουν κι άλλοι. Αλλά συμφωνώ [ότι το 0,16 είναι ο επόμενος του 0,15] γιατί ο Κώστας [το παιδί του σεναρίου] αλλάζει τα νούμερά του ανά μία μονάδα.	

**Σημείωση*. Β. Υπάρχει άλλος επόμενος (πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων), Γ. Υπάρχει άλλος επόμενος (άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων), Δ. Υπάρχει επόμενος, μπορεί να προσδιοριστεί, Ε. Υπάρχει επόμενος, δεν μπορεί να προσδιοριστεί, Ζ: Άλλη

Σημειώνουμε ότι στις απαντήσεις και των δύο πρώτων κατηγοριών (Α,Β), ο «επόμενος» των δεδομένων αριθμών αναζητείται σε ένα διακριτό, πεπερασμένο, σύνολο αριθμών που διατηρούν τη διάταξη των φυσικών αριθμών. Η ορθή απάντηση («Δεν υπάρχει επόμενος») δε δόθηκε από κανένα μαθητή, ούτε στο προέλεγχο, ούτε στο μεταέλεγχο και δεν εμφανίζεται στα αποτελέσματα.

Στον Πίνακα 5 παρουσιάζεται το πλήθος των απαντήσεων των μαθητών ανά κατηγορία και ανά έργο, στον προέλεγχο (ΠροΕ) και στο μεταέλεγχο (ΜεταΕ).

Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 5, στον προέλεγχο οι απαντήσεις που ανήκουν στην κατηγορία Α ή Β αποτελούν τις 11 από τις 15 απαντήσεις που δόθηκαν στον προέλεγχο, με την Α να υπερτερεί στην περίπτωση των κλασμάτων. Οι απαντήσεις αυτές μειώνονται στο μεταέλεγχο και αυξάνονται οι απαντήσεις του τύπου Ε, ενώ εμφανίζεται και η απάντηση τύπου Δ.

Στους Πίνακες 6 και 7 καταγράφονται οι μετατοπίσεις των μαθητών ως προς την κατηγορία απάντησης που έδωσαν στον προέλεγχο και το μεταέλεγχο για τον επόμενο αριθμό ενός δεκαδικού και ενός κλάσματος. Οι βοηθητικές νύξεις έγιναν στο πρώτο έργο (ΕπΔ) και οι μαθητές που τις χρειάστηκαν σημαίνονται με έντονο χρώμα στον Πίνακα 6. Όπως φαίνεται, οι νύξεις ήταν απαραίτητες σε όλους τους μαθητές. Δηλαδή, κανένας μαθητής δεν άλλαξε αυθόρμητα την αρχική του απάντηση.

Πίνακας 5

Συχνότητα των απαντήσεων των μαθητών ανά κατηγορία και ανά έργο, στον προέλεγχο (ΠροΕ) και στο μεταέλεγχο (ΜεταΕ)

Κατηγορίες απαντήσεων	**Έργο ΕπΔ**		**Έργο ΕπΚ**	
	ΠροΕ	**ΜεταΕ**	**ΠροΕ**	**ΜεταΕ**
Α	3	1	7	2
Β	8	0	4	2
Γ	1	1	2	1
Δ	0	5	0	3
Ε	2	6	1	5
Ζ	1	2	1	2
Σύνολο	15	15	15	15

**Σημείωση.* Α: Ο δεδομένος είναι ο επόμενος αριθμός, Β. Υπάρχει άλλος επόμενος (πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων), Γ. Υπάρχει άλλος επόμενος (άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων), Δ. Υπάρχει επόμενος, μπορεί να προσδιοριστεί, Ε. Υπάρχει επόμενος, δεν μπορεί να προσδιοριστεί., Ζ: Άλλη

Όπως φαίνεται στους Πίνακες 6 και 7, από τους μαθητές της Ομάδας 1 κανείς δεν έδωσε απάντηση τύπου Α ή Β, ήδη από τον προέλεγχο. Ο Μ11 παρέκαμψε στην ουσία το πρόβλημα του επόμενου, λέγοντας ότι ο επόμενος εξαρτάται από την επιθυμητή ακρίβεια (βλ. Πίνακα 4, Παράδειγμα 13). Στο μεταέλεγχο διατήρησε αυτού του τύπου την απάντηση, αναγνωρίζοντας ταυτόχρονα την απειρία των ενδιάμεσων. Για παράδειγμα:

Δεν συμφωνώ [ότι το 0,16 είναι ο επόμενος του 0,15]. *Γιατί μπορεί να είναι πάλι άπειροι, 0,151 ή 0,1511, ανάλογα πόσα ψηφία θέλω. Θα μπορούσε να τον βρει, αν ο επόμενος αριθμός θέλω να έχει 3 ψηφία και τα λοιπά. Αν ήταν πιο συγκεκριμένη η εκφώνηση θα μπορούσε να τον βρει.*

Οι υπόλοιποι μαθητές της Ομάδας 1 έδωσαν απαντήσεις τύπου Γ ή Ε και στα δύο έργα στον προέλεγχο, τις οποίες διατήρησαν και στο μεταέλεγχο. Παρά τις νύξεις που τους έγιναν, δεν έφτασαν στο συμπέρασμα ότι δεν υπάρχει επόμενος, καθώς δεν μπορούσαν να φανταστούν με ποιο τρόπο ένας αριθμός που δεν μπορεί να προσδιοριστεί με ακρίβεια μπορεί να χρησιμοποιηθεί στον τύπο για να υπολογιστεί ο αριθμητικός μέσος.

Δεν μπορώ να βρω τον αριθμητικό μέσο γιατί δεν ξέρω πόσα μηδενικά έχει το 0,15000.....01 και είναι ένας θεωρητικός αριθμός. Δεν θα τον βρει ακριβώς ποτέ. Θα μπορούσαμε να δώσουμε κάποιον αριθμό που θα πλησιάζει. [...] *Ούτε με τον υπολογιστή θα τον βρω. Δεν μπορεί να προσεγγιστεί εύκολα, γιατί έχω απροσδιόριστα μηδενικά* [...]. *Υπάρχει, αλλά δεν μπορώ να τον βρω. Κατά προσέγγιση θα μπορεί να είναι ο επόμενος το 0,15000000.....01.* (Μ13)

Πίνακας 6

Μετατόπιση των μαθητών ως προς τις κατηγορίες απάντησης στο ΕπΔ («επόμενος» του 0,15) από τον προέλεγχο (ΠροΕ) στο μετάλεγχο (ΜεταΕ)

ΠροΕ	**ΜεταΕ**					
	Α	**Β**	**Γ**	**Δ**	**Ε**	**Ζ (άλλη)**
Α	**Μ2**				**Μ10**	**Μ6**
Β				**Μ1 Μ4 Μ7 Μ9 Μ12**	**Μ8 Μ14 Μ15**	
Γ			**Μ3**			
Δ						
Ε					**Μ5 Μ13**	
Ζ						**Μ11**

*Σημείωση. Α: Ο δεδομένος είναι ο επόμενος αριθμός, Β. Υπάρχει άλλος επόμενος (πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων), Γ. Υπάρχει άλλος επόμενος (άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων), Δ. Υπάρχει επόμενος, μπορεί να προσδιοριστεί, Ε. Υπάρχει επόμενος, δεν μπορεί να προσδιοριστεί., Ζ: Άλλη

Πίνακας 7

Μετατόπιση των μαθητών ως προς τις κατηγορίες απάντησης στο ΕπΚ («επόμενος» του 2/5) από τον προέλεγχο (ΠροΕ) στο μετάλεγχο (ΜεταΕ)

ΠροΕ	**ΜεταΕ**					
	Α	**Β**	**Γ**	**Δ**	**Ε**	**Ζ**
Α	Μ2 Μ9			Μ1 Μ4 Μ7	Μ10	Μ6
Β		Μ12 Μ15			Μ8 Μ14	
Γ			Μ3		Μ13	
Δ						
Ε					Μ5	
Ζ						Μ11

*Σημείωση. Α: Ο δεδομένος είναι ο επόμενος αριθμός, Β. Υπάρχει άλλος επόμενος (πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων), Γ. Υπάρχει άλλος επόμενος (άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων), Δ. Υπάρχει επόμενος, μπορεί να προσδιοριστεί, Ε. Υπάρχει επόμενος, δεν μπορεί να προσδιοριστεί., Ζ: Άλλη

Οι μαθητές της Ομάδας 2 ξεκίνησαν στον προέλεγχο δίνοντας απαντήσεις τύπου Α ή Β και στα δύο έργα. Στο μεταέλεγχο, μετακινήθηκαν σε απαντήσεις τύπου Δ ή Ε στο ΕπΔ, με την εξαίρεση του Μ2 που παρέμεινε στην απάντηση Α, την οποία και διατήρησε και στο ΕπΚ. Δύο μαθητές της ομάδας αυτής (Μ12, Μ15) έδωσαν λιγότερο εκλεπτυσμένες απαντήσεις (τύπου Β) στο ΕπΚ, σε σύγκριση με το ΕπΔ.

Παρόμοια, οι μαθητές της Ομάδας 3 ξεκίνησαν από απαντήσεις τύπου Α ή Β στο ΕπΔ στον προέλεγχο και μετακινήθηκαν προς τις κατηγορίες Δ και Ε. Εξαίρεση ήταν ο Μ6 ο οποίος, παρόμοια με τον Μ11 της Ομάδας 1, παρέκαμψε το πρόβλημα, λέγοντας ότι ο επόμενος εξαρτάται από την επιθυμητή ακρίβεια (βλ. Πίνακα 4, Παράδειγμα 14). Στο ΕπΚ, ένας μαθητής (Μ9) της ομάδας αυτής ξεκίνησε και παρέμεινε στην απάντηση τύπου Α, ενώ οι υπόλοιποι απάντησαν παρόμοια με το ΕπΔ δίνοντα απαντήσεις τύπου Δ και Ε.

Στο μετάλεγχο, οι μαθητές της Ομάδας 2 και 3 που μετατοπίστηκαν προς πιο εκλεπτυσμένες απαντήσεις, χρησιμοποίησαν τον αριθμητικό μέσο και την ιδέα της επαναλήψιμης διαδικασίας προκειμένου να εξηγήσουν τις απαντήσεις τους. Για παράδειγμα:

Μπορώ να βρω το μέσο [του 0,15 και του 0,151], *ναι, υπάρχει, είναι ο 0,1505. Μπορεί να μη τον βρει* [τον επόμενο του 0,15], *γιατί αν κάνει συνέχεια την πράξη δε θα σταματήσει ποτέ. Δε θα τον βρει. Υπάρχει, αλλά δεν ξέρουμε ποιος είναι.* (Μ8)

Έργο μεταφοράς 2. Στο έργο Μετ2, οι μαθητές ρωτήθηκαν αν μπορούν να προσδιορίσουν την πρώτη τιμή που θα πάρει μια μεταβλητή x, η οποία κινείται στο διάστημα (0,1).

Όλοι οι μαθητές της Ομάδας 1 αναφέρθηκαν σε έναν αριθμό με άπειρα δεκαδικά ψηφία και όλοι, εκτός από τον Μ5, πρότειναν συγκεκριμένα τον 0,00…01. Οι απαντήσεις αυτές συνάδουν με τις απαντήσεις τους στα έργα ΕπΔ, ΕκΚ ως προς την ύπαρξη του επόμενου και, μάλιστα, ακόμα και αυτοί που είχαν απαντήσει ότι ο επόμενος δεν μπορεί να προσδιοριστεί, φάνηκαν πιο πρόθυμοι να τον προσδιορίσουν ως ένα συγκεκριμένο δεκαδικό με άπειρα δεκαδικά ψηφία.

Από τους μαθητές της Ομάδας 2, ο Μ4 πρότεινε τον αριθμό 0,100… που, στην ουσία, ταυτίζεται με τον 0,1. Οι Μ2, Μ7, Μ14 και Μ15 πρότειναν τον 0,00…01, ενώ οι Μ10 και Μ12 απάντησαν ότι η πρώτη τιμή, αν και υπάρχει, δεν μπορεί να προσδιοριστεί, γιατί «οι αριθμοί είναι άπειροι».

Όλοι οι μαθητές της Ομάδας 3 (Μ1, Μ6, Μ8, Μ9) προσδιόρισαν την πρώτη τιμή της μεταβλητής, αναφέροντας αριθμούς όπως τον 0,1, τον 0,01 και τον 0,001.Οι μαθητές αυτοί υπαναχώρησαν, σε σχέση με τις απαντήσεις τους στα έργα για τον επόμενο του μεταελέγχου, σε λιγότερο εκλεπτυσμένες απαντήσεις.

Συμπεράσματα – Συζήτηση

Στην εργασία αυτή εξετάσαμε τις αντιλήψεις μαθητών της Β΄ Λυκείου για την απειρία των αριθμών σε ένα διάστημα με άκρα ρητούς αριθμούς και την ύπαρξη (ή μη) του επόμενου αριθμού στους ρητούς. Οι μαθητές εξετάστηκαν πριν και μετά την εισαγωγή ενός μαθηματικού εργαλείου, συγκεκριμένα του αριθμητικού μέσου σε ένα διάστημα στο πλαίσιο μιας επαναλήψιμης διαδικασίας, το οποίο δυνητικά μπορεί να υποστηρίξει την κατανόηση και των δύο παραπάνω όψεων της πυκνής διάταξης των ρητών. Η μέθοδος που υιοθετήσαμε ανταποκρίθηκε σε δύο ζητούμενα με βάση τη βιβλιογραφία (π.χ., Vamvakoussi & Vosniadou, 2012): Επέτρεψε την ταυτοποίηση μαθητών που διαφοροποιούν την έκφραση «άπειροι αριθμοί» από εκφράσεις του τύπου «ένα πολύ μεγάλο πλήθος αριθμών». Ταυτόχρονα, επέτρεψε να διευκρινιστούν οι απαντήσεις του τύπου «δεν μπορώ να προσδιορίσω ποιος θα είναι ο επόμενος» ως προς τον αν ο επόμενος υπάρχει ή όχι. Επιπλέον, η παροχή ενός υποστηρικτικού εργαλείου και η παρώθηση των μαθητών να το χρησιμοποιήσουν πυροδότησε μεταβολές στον τρόπο που σκεφτόταν ο κάθε μαθητής για την πυκνή διάταξη (Siegler, 2006) και επέτρεψε την εξέτασή τους.

Όπως αναμενόταν, πριν την παρέμβαση, η πλειοψηφία των απαντήσεων των μαθητών ήταν συμβατή με την αντίληψη ότι οι ρητοί αριθμοί είναι διακριτοί, όπως οι φυσικοί αριθμοί. Παρά το γεγονός ότι υπήρξαν διαβαθμίσεις ως προς το μέγεθος του πλήθους των ενδιάμεσων (από κανένας, μέχρι ένα πολύ μεγάλο πλήθος της τάξης του δισεκατομμυρίου), η επικρατούσα απάντηση ήταν το πεπερασμένο πλήθος ενδιάμεσων. Κατηγοριοποιώντας τους μαθητές ανάλογα με το πλήθος των απαντήσεων του τύπου «πεπερασμένο πλήθος ενδιάμεσων» που έδωσαν στο προέλεγχο, προέκυψαν τρεις αδρές ομάδες μαθητών. Η Ομάδα 1 περιελάμβανε τους μαθητές που απάντησαν ότι υπάρχουν άπειροι ενδιάμεσοι, ήδη από τον προέλεγχο. Οι μαθητές αυτοί είχαν ήδη στη διάθεσή τους μια επαναλήψιμη διαδικασία παραγωγής ενδιάμεσων, βασισμένη σε ιδιότητες των δεκαδικών. Ούτε αυτή, ούτε η διαδικασία με τον αριθμητικό μέσο τους οδήγησε στο συμπέρασμα ότι δεν υπάρχει ο επόμενος αριθμός.

Η Ομάδα 2 περιελάμβανε τους μαθητές που έδωσαν απαντήσεις του τύπου «πεπερασμένο πλήθος ενδιάμεσων» στον προέλεγχο, αλλά όχι στο μεταέλεγχο. Με μία μόνο εξαίρεση, οι βοηθητικές νύξεις που παρέπεμπαν στον αριθμητικό μέσο ήταν απαραίτητες για τη μετατόπιση αυτή, η οποία, ωστόσο, δεν εξασφάλισε απαραίτητα εκλεπτυσμένες απαντήσεις σε όλα τα έργα που ακολούθησαν. Στον Πίνακα 7, για παράδειγμα, φαίνεται ότι 5 από τα 7 μέλη της ομάδας αυτής, στο μεταέλεγχο, έδωσαν απαντήσεις του τύπο Α, Β, ή Δ στο ΕπΚ. Δηλαδή, είτε πρότειναν έναν συγκεκριμένο αριθμό ως επόμενο του κλάσματος 2/5, είτε ισχυρίστηκαν ότι μπορεί να βρεθεί. Για την ακρίβεια, μια προσεκτική εξέταση των αποτελεσμάτων ανά άτομο, δείχνει ότι όλα τα μέλη αυτής της ομάδας, σε κάποια από τα έργα ΕπΔ, ΕπΚ, Μετ1, Μετ2 έδωσαν λιγότερο εκλεπτυσμένες απαντήσεις σε σχέση με τα υπόλοιπα. Οι μαθητές της Ομάδας 2 ενσωμάτωσαν τον αριθμητικό μέσο και την επαναλαμβανόμενη χρήση του ως στρατηγική και χρησιμοποίησαν εκφράσεις όπως «αμέτρητοι», «άπειροι», «δεν θα σταματάνε». Αυτό δε σημαίνει απαραίτητα ότι όλοι θεώρησαν ότι η διαδικασία θα συνεχίζεται πράγματι επ'άπειρο (όπως φαίνεται, για παράδειγμα, από τις απαντήσεις των Μ7 και Μ14 στο Μετ1) και, βέβαια, δεν οδηγήθηκαν στο συμπέρασμα ότι δεν υπάρχει ο επόμενος αριθμός.

Τέλος, η Ομάδα 3 περιελάμβανε τους μαθητές που, τόσο στον προέλεγχο, όσο και στο μεταέλεγχο, έδωσαν απαντήσεις του τύπου «πεπερασμένο πλήθος ενδιάμεσων» σε τρία έως και εφτά από τα αντίστοιχα έργα, παρά τις βοηθητικές νύξεις. Παρόμοια με τους μαθητές της Ομάδας 2, κάποια από τα μέλη της ομάδας αυτής χρησιμοποίησαν την ιδέα του αριθμητικού μέσου και αντιμετώπισαν κάποια από τα επόμενα έργα με μεγαλύτερη επιτυχία απ' όσο θα αναμενόταν από την επίδοσή τους στα έργα για την απειρία των ενδιάμεσων στο μεταέλεγχο (όπως, για παράδειγμα, οι Μ8 και Μ9 στο Μετ1, και όλα τα μέλη της ομάδας στο ΕπΔ –βλ. Πίνακα 6). Παρ'όλ'αυτά, όλοι οι μαθητές της Ομάδας 3 επανήλθαν στις λιγότερο εκλεπτυσμένες απαντήσεις στο Μετ2, προτείνοντας το 0,1, το 0,01 και το 0,001 ως την πρώτη τιμή που παίρνει η μεταβλητή x στο (0,1).

Παρά τις διαφορές μεταξύ των μαθητών στις τρεις ομάδες, υπάρχει ένα κοινό σημείο: Κανένας μαθητής δεν αμφισβήτησε την αρχή του επόμενου στους ρητούς αριθμούς. Το εύρημα αυτό έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον όσον αφορά τους μαθητές της Ομάδας 1 που, αντίθετα με τους συμμαθητές τους των άλλων ομάδων, διέθεταν εξαρχής στρατηγικές που παράγουν ακολουθίες από άπειρους ενδιάμεσους σε ένα διάστημα, οικειοποιήθηκαν και τη στρατηγική του αριθμητικού μέσου και τις χρησιμοποίησαν όλες με συνέπεια στα διάφορα έργα. Τα παραδείγματά τους και οι εξηγήσεις τους δείχνουν ότι με τον όρο «άπειροι» αυτοί οι μαθητές αναφέρονταν στα προϊόντα μιας ατέρμονης διαδικασίας. Παρ'όλ'αυτά, συνέχισαν να πιστεύουν ότι ο επόμενος των δεδομένων αριθμών υπάρχει.

Τα αποτελέσματα αυτά είναι σύμφωνα με ευρήματα πλήθους ερευνών που υποδεικνύουν ότι η πυκνή διάταξη των ρητών παρουσιάζει σημαντικές δυσκολίες για τους μαθητές διαφόρων ηλικιών και επιπέδων εκπαίδευσης (Depaepe et al., 2015· Giannakoulias et al., 2007· Malara, 2001· McMullen, et al., 2015· Merenluoto & Lehtinen, 2002· Neumann, 1998· Hannula et al., 2006· Smith, 1995· Smith et al., 2005· Tirosh et al., 1999· Vamvakoussi et al., 2012).

Ειδικότερα, είναι συμβατά με την υπόθεση της προσέγγισης της θεωρίας πλαισίου για την εννοιολογική αλλαγή (Vosniadou et al., 2008) ότι η ιδέα της διακριτότητας, ως θεμελιώδης παραδοχή της αρχικής θεωρίας πλαισίου για τον αριθμό, δεν αίρεται διαμιάς. Όσον αφορά την απειρία των ενδιάμεσων, αυτό είναι εμφανές, για παράδειγμα, σε όλους τους μαθητές της Ομάδας 3, αλλά και σε μαθητές της Ομάδας 2 (π.χ., Μ10) που υπαναχώρησαν σε λιγότερο εκλεπτυσμένες απαντήσεις στο Μετ1.

Ταυτόχρονα, τα αποτελέσματα ισχυροποιούν τον ισχυρισμό των Vamvakoussi και Vonsiadou (2012) ότι η αναθεώρηση της αρχής του επόμενου είναι πιο απαιτητική από την κατανόηση της απειρίας των ενδιάμεσων αριθμών. Επιπλέον, τεκμηριώνουν την ύπαρξη μιας συνθετικής αντίληψης για τη διάταξη των ρητών που συνδυάζει την απειρία των ενδιάμεσων αριθμών σε ένα διάστημα με την ύπαρξη του επόμενου, δείχνοντας ότι μαθητές που πράγματι συμπέραναν την απειρία των ενδιάμεσων (όλοι οι μαθητές της Ομάδας 1 αλλά και μαθητές της Ομάδας 2) δεν αμφισβήτησαν την ύπαρξη του επόμενου. Επομένως, το εύρημα αυτό συνηγορεί υπέρ της προβλεπτικής ισχύος της προσέγγισης της θεωρίας πλαισίου στην εννοιολογική αλλαγή, καθώς η δημιουργία συνθετικών αντιλήψεων αποτελεί κεντρική πρόβλεψη της συγκεκριμένης προσέγγισης (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010· Vosniadou et. al., 2008· Βαμβακούση, 2019).

Βιβλιογραφία

Bailey, D. H., Hoard, M. K., Nugent, L., & Geary, D. C. (2012). Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, *113*, 447-455. http://dx.doi.org/10.1016/j.jecp.2012.06.004

Βαμβακούση, Ξ. (2019). Η προβλεπτική και επεξηγηματική ισχύς της προσέγγισης της θεωρίας πλαισίου στην εννοιολογική αλλαγή στα μαθηματικά: Η περίπτωση των ρητών αριθμών. Στο Ε. Σκοπελίτη & Ν. Κυριακοπούλου (Επιμ.), *Νόηση και μάθηση υπό το πρίσμα της εννοιολογικής αλλαγής* (σελ. 145-162). Εκδόσεις Gutenberg.

Booth, J. L., & Newton, K. J. (2012). Fractions: Could they really be the gatekeeper's doorman? *Contemporary Educational Psychology*, *37*(4), 247-253. http://dx.doi.org/10.1016/j.cedpsych.2012.07.001

Depaepe, F., Torbeyns, J., Vermeersch, N., Janssens, D., Janssen, R., Kelchtermans, G., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2015). Teachers' content and pedagogical content knowledge on rational numbers: A comparison of prospective elementary and lower secondary school teachers. *Teaching and Teacher Education*, *47*, 82-92. http://dx.doi.org/10.1016/j.tate.2014.12.009

Giannakoulias, E., Souyoul, A., & Zachariades, T. (2007). Students' thinking about fundamental real numbers properties. In D. Pitta-Pantazi, & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 426-425). ERME, Department of Education, University of Cyprus. http://erme.site/cerme-conferences/cerme-5/

Hannula, M. S., Pehkonen, E., Maijala, H., & Soro, R. (2006). Levels of students' understanding on infinity.*Teaching Mathematics and Computer Science, 4*(2), 317–337. http://dx.doi.org/10.5485/TMCS.2006.0129

Hartnett, P. M., & Gelman, R. (1998). Early understandings of number: Paths or barriers to the construction of new understandings? *Learning and Instruction*, *8*, 341-374. http://dx.doi.org/10.1016/S0959-4752(97)00026-1

Malara, N. (2001). From fractions to rational numbers in their structure: Outlines for an innovative didactical strategy and the question of density. In J. Novotná (Ed.), *Proceedings of the 2nd Conference of the European Society for Research Mathematics Education II* (pp. 35–46). Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická Faculta. http://erme.site/wp-content/uploads/2021/06/CERME2_proceedings.pdf

McMullen, J., Laakkonen, E., Hannula-Sormunen, M., & Lehtinen, E. (2015). Modeling the developmental trajectories of rational number concept(s). *Learning and Instruction*, *37,* 14-20. http://dx.doi.org/10.1016/j.learninstruc.2013.12.004

Merenluoto, K., & Lehtinen, E. (2002). Conceptual change in mathematics: Understanding the real numbers. In: M. Limon, & L. Mason (Eds.), Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice (pp. 233–258). Kluwer. http://dx.doi.org/10.1007/0-306-47637-1_13

Moss, J. (2005). Pipes, tubes, and beakers: new approaches to teaching the rational-number system. In M. S. Donovan & J. D. Bransford (Eds.), *How students learn: mathematics in the classroom* (pp. 121–162). National Academic Press. https://nap.nationalacademies.org/read/11101/chapter/6

Neumann, R. (1998). Students' ideas on the density of fractions. In H.G. Weigand, A. Peter-Koop, N.Neil, K.Reiss, G. Torner & B. Wollring (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the Gesellschaft fur Didaktik der Mathematik* (pp. 97-104). Retrieved June 13 2022 from http://webdoc.gwdg.de/ebook/e/gdm/1998/neumann3.pdf

Ni, Y., & Zhou, Y-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: the origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, *40*(1), 27–52. http://dx.doi.org/10.1207/s15326985ep4001_3

Núñez, R., & Lakoff, G. (2005). The cognitive foundations of mathematics: The role of conceptual metaphor. In J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp. 109 - 124). Psychology Press. http://dx.doi.org/10.4324/9780203998045

Siegler, R. S. (2006). Microgenetic analyses of learning. In W. Damon& R. M. Lerner (Eds.), D. Kuhn & R. S. Siegler (Volume Eds.), *Handbook of child psychology* (6th Ed., 2ndV., pp.464-510). John Wiley & Sons. http://dx.doi.org/10.1002/9780470147658.chpsy0211

Singer, F. M., & Voica, C. (2008). Between perception and intuition: Learning about infinity. *Journal of Mathematical Behavior*, *27*, 188–205. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2008.06.001

Smith III, J. P. (1995). Competent reasoning with rational numbers. *Cognition and Instruction*, *13*(1), 3-50. http://dx.doi.org/10.1207/s1532690xci1301_1

Smith, C. L., Solomon, G. E. A., & Carey, S. (2005). Never getting to zero: Elementary school students' understanding of the infinite divisibility of number and matter. *Cognitive Psychology, 51*, 101–140. http://dx.doi.org/10.1016/j.cogpsych.2005.03.001

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In A. E. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781410602725

Tirosh, D., Fischbein, E., Graeber, A. O., & Wilson, J. W. (1999). *Prospective elementary teachers' conceptions of rational numbers.* Retrieved May 05, 2005 from http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/Tirosh/Pros.El.Tchrs.html

Torbeyns, J., Schneider, M., Xin, Z., & Siegler, R. S. (2015). Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents. *Learning and Instruction*, *37*, 5-13. http://dx.doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.03.002

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*, 344 -355. http://dx.doi.org/ 10.1016/j.jmathb.2012.02.001

Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction, 14*, 453-467. http://dx.doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.013

Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2007).How many numbers in an interval? Presuppositions, synthetic models and the effect of the number line. In S. Vosniadou, A. Baltas, & X. Vamvakoussi (Eds.), *Reframing the conceptual change approach in learning and instruction* (pp. 267-283).Elsevier.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation.*Cognition and Instruction*, *28*(2), 181-209. http://www.jstor.org/stable/27806348

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2012). Bridging the gap between the dense and the discrete: the number line and the "rubber line" bridging analogy. *Mathematical Thinking and Learning*, *14*, 265-284. http://dx.doi.org/10.1080/10986065.2012.717378

Vergnaud, G. (1996). The theory of conceptual fields. In L.P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G.A. Goldin, & B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 219-244). Lawrence Erlbaum Associates. http://dx.doi.org/10.1159/000202727

Vosniadou, S. (2013). Conceptual change in learning and instruction: The framework theory approach. In S. Vosniadou (Ed.), *International handbook of research on conceptual change* (2nd ed., pp. 23-42). Routledge. http://dx.doi.org/10.4324/9780203154472

Vosniadou, S., Vamvakoussi, X., & Skopeliti, I. (2008). The framework theory approach to conceptual change. In S. Vosniadou (Ed.), *International handbook of research on conceptual change* (1st ed., pp. 3-34). Lawrence Erlbaum Associates. http://dx.doi.org/10.4324/9780203154472

ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ | RESEARCH PAPER

How 10th graders understand the dense ordering of rational numbers: a teaching experiment

Dimitris FOKAS[1], Xenia VAMVAKOUSSI[2]

[1] Department of Primary Education, School of Humanities and Social Sciences, University of Western Macedonia
[2] Department of Early Childhood Education, School of Education, University of Ioannina

KEYWORDS

rational numbers,
dense ordering,
conceptual change,
synthetic models

CORRESPONDENCE

Xenia Vamvakoussi,
University of Ioannina,
Department of Early
Childhood Education,
Metavatiko ktirio, 45110
University Campus, Ioannina
xvamvak@uoi.gr

ABSTRACT

A major source of difficulty in the transition from natural to rational numbers is the interference of natural number knowledge in rational number learning. The framework theory approach to conceptual change assumes that students use their initial theories of numbers as natural numbers to make sense of rational numbers; and that the background assumptions of these theories are not easily revised, an example being the idea that numbers are discrete. Natural numbers are indeed discrete (i.e., given any natural number, it is always possible to define its successor in the natural numbers set). On the contrary, rational numbers are densely ordered (i.e., given any rational number, it is never possible to define its successor). The idea of discreteness stands in the way of students' understanding of the density of rational numbers. We present a teaching experiment that investigated 15 11th graders' understanding of two different aspects of density, namely the fact that there are infinitely many numbers in any rational number interval ("infinity of intermediates"); and that no rational number has a successor ("no successor principle"). We hypothesized that these aspects of density, although mathematically equivalent, are not equally challenging for students. First, students' initial understandings of density were pre-tested in individual interviews; then each student was exposed to the idea of the arithmetic mean of two numbers that, in principle, could support understanding of both aspects of density; and, finally, each student revisited the tasks of the pretest and was prompted, when necessary, to use the idea of the arithmetic mean. Most students grasped the "infinity of intermediates" but all continued to assume the successor principle. From the perspective of the framework theory approach to conceptual change, this is a *synthetic conception*, since students accept the infinity of intermediates while retaining the successor principle.

© 2022, Dimitris Fokas, Xenia Vamvakoussi
Licence CC-BY-SA 4.0