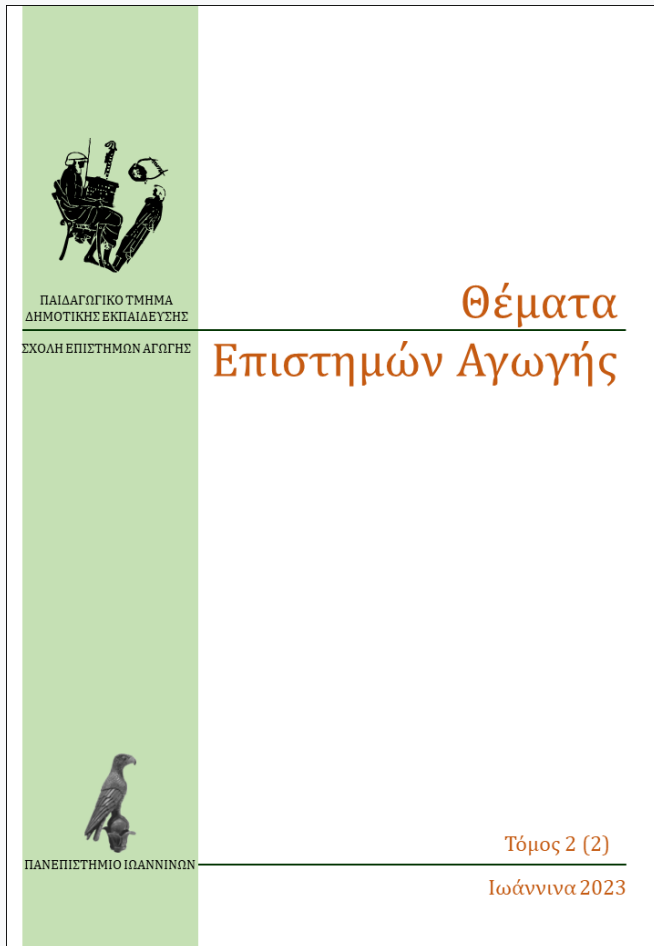


Themes in Education Sciences

Vol 2, No 2 (2023)



Εκτιμήσεις με δεκαδικούς αριθμούς πάνω σε αριθμογραμμή και η σχέση τους με τις μαθηματικές ικανότητες σε παιδιά Ε' και Στ' τάξης Δημοτικού

Δέσποινα (Despina) Δεσλή (Desli), Σοφία Γρίβα

doi: [10.12681/thea.34635](https://doi.org/10.12681/thea.34635)

To cite this article:

Δεσλή (Desli) Δ. (Despina), & Γρίβα Σ. (2023). Εκτιμήσεις με δεκαδικούς αριθμούς πάνω σε αριθμογραμμή και η σχέση τους με τις μαθηματικές ικανότητες σε παιδιά Ε' και Στ' τάξης Δημοτικού. *Themes in Education Sciences*, 2(2), 1-16. <https://doi.org/10.12681/thea.34635>

Εκτιμήσεις με δεκαδικούς αριθμούς πάνω σε αριθμογραμμή και η σχέση τους με τις μαθηματικές ικανότητες σε παιδιά Ε' και Στ' τάξης Δημοτικού

Δέσποινα Δεσλή¹, Σοφία Γρίβα²
d-desli@eled.auth.gr, sophieegr94@gmail.com

¹ Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

² Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

Περίληψη. Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να εξετάσει αφενός την ικανότητα για την πραγματοποίηση εκτιμήσεων με δεκαδικούς αριθμούς πάνω σε αριθμογραμμή και αφετέρου τη σχέση αυτής με τις μαθηματικές ικανότητες. Για τον σκοπό αυτό, σχεδιάστηκαν και παρουσιάστηκαν σε 118 μαθητές (58 της Ε' και 60 της Στ' τάξης) τέσσερα έργα: α) Έργο 1: Εκτίμηση της θέσης αριθμού σε αριθμογραμμή (number-to-position - NP), β) Έργο 2: Εκτίμηση του αριθμού σε συγκεκριμένη θέση πάνω σε αριθμογραμμή (position-to-number - PN), γ) Έργο 3: Επίλυση προβλήματος, και δ) Έργο 4: Εκτέλεση αριθμητικών πράξεων. Αν και οι επιδόσεις των δύο ηλικιακών ομάδων κινήθηκαν σε παρόμοιο επίπεδο, ήταν περισσότερο επιτυχείς στις δοκιμασίες του έργου PN και στις δοκιμασίες στις οποίες οι αριθμογραμμές είχαν επιπλέον σημεία αναφοράς, πέρα από τα σημεία εκκίνησης και τέλους. Υψηλή θετική συσχέτιση βρέθηκε ανάμεσα στην ικανότητα για την πραγματοποίηση εκτιμήσεων πάνω στην αριθμογραμμή και την ικανότητα επίλυσης προβλήματος, με τους συμμετέχοντες που εμφάνισαν υψηλή επίδοση στις δοκιμασίες εκτίμησης να εμφανίζουν υψηλή επίδοση και στις δοκιμασίες επίλυσης προβλήματος. Αντίθετα, καμία συσχέτιση δεν βρέθηκε ανάμεσα στην επιτυχία των εκτιμήσεων και την εκτέλεση αριθμητικών πράξεων.

Λέξεις κλειδιά: εκτιμήσεις σε αριθμογραμμή, δεκαδικοί αριθμοί, επίλυση προβλήματος, αριθμητικές πράξεις

Εισαγωγή

Τα τελευταία χρόνια πολλοί ερευνητές αξιοποιούν τα έργα εκτίμησης με τη χρήση αριθμογραμμής, προκειμένου να μελετούν τις αναπαραστάσεις των παιδιών για τα αριθμητικά μεγέθη αλλά και την εξέλιξη της κατανόησης των αριθμητικών μεγεθών από την προσχολική και τη σχολική ηλικία μέχρι την εφηβεία και την ενηλικίωση (Δεσλή, 2021). Στην κλασική μορφή των έργων αυτών, παρουσιάζεται στα άτομα μία κενή οριζόντια αριθμογραμμή, στην οποία επισημαίνονται η αρχή και το τέλος της με αριθμούς (π.χ., από το 1 έως το 100), και τα άτομα καλούνται να υποδείξουν είτε τη θέση ενός αριθμού σε αυτή (π.χ., «πού βρίσκεται ο αριθμός 84 πάνω στην αριθμογραμμή;») ή τον αριθμό που αντιστοιχεί σε συγκεκριμένο σημείο πάνω σε αυτή (π.χ., «ποιος αριθμός βρίσκεται εδώ;»). Τα έργα αυτά ονομάζονται *έργα εκτίμησης της θέσης του αριθμού σε αριθμογραμμή* (number-to-position tasks ή αλλιώς NP tasks) και *έργα εκτίμησης του αριθμητικού μεγέθους σε συγκεκριμένη θέση σε αριθμογραμμή* (position-to-number tasks ή αλλιώς PN tasks), αντιστοίχα.

Οι εκτιμήσεις που τα άτομα πραγματοποιούν πάνω σε αριθμογραμμή και η ακρίβειά τους έχει θεωρηθεί ότι αντικατοπτρίζουν τον τρόπο με τον οποίο ερμηνεύονται τα αριθμητικά μεγέθη. Όπως προτείνουν οι Siegler και Opfer (2003), τα παιδιά αρχικά εκτιμούν τους αριθμούς με έναν λιγότερο ακριβή τρόπο που παραπέμπει σε λογαριθμικές αναπαραστάσεις της αριθμητικής αξίας και σταδιακά με την ηλικία και τις εμπειρίες αναπτύσσουν και

ακολουθούν περισσότερο γραμμικές αναπαραστάσεις που οδηγούν σε πιο ακριβείς εκτιμήσεις. Ωστόσο, είναι πιθανόν, όπως υποστηρίζουν οι Barth και Paladino (2011), οι αλλαγές που παρατηρούνται στις εκτιμήσεις των παιδιών και των ενηλίκων να οφείλονται στη βελτίωση των ικανοτήτων αναλογικού συλλογισμού και τη χρήση στρατηγικών που στηρίζονται στον αναλογικό συλλογισμό. Και αυτό γιατί, καθώς τα άτομα μεγαλώνουν, φαίνεται πως οι εκτιμήσεις τους βασίζονται στη σχέση ανάμεσα στο μέγεθος ενός μέρους της αριθμογραμμής και το μέγεθος ολόκληρης της αριθμογραμμής, συχνά χρησιμοποιώντας σημεία στήριξης πάνω στην αριθμογραμμή τα οποία τους επιτρέπουν να εμφανίζουν μοτίβο απαντήσεων που είναι περισσότερο γραμμικό. Αυτό επιβεβαιώνουν τα ευρήματα ερευνών σε μικρά και μεγάλα παιδιά (Peeters et al., 2016· Peeters et al., 2017) και σε ενήλικες (Huber et al., 2014· Patalano et al., 2020), αλλά και για εκτιμήσεις της θέσης ρητών αριθμών πάνω σε αριθμογραμμή (Δεσλή & Τριανταφύλλου, 2022).

Η έρευνα σχετικά με την ικανότητα επιτυχών εκτιμήσεων πάνω στην αριθμογραμμή έχει επιπρόσθετα αναδείξει την ύπαρξη ισχυρής σχέσης ανάμεσα στις επιδόσεις των ατόμων σε έργα εκτίμησης σε αριθμογραμμή και τις επιδόσεις τους στα μαθηματικά (Daker & Lyons, 2018· Gunderson & Hildebrand, 2021· Ouyang et al., 2021· Schneider et al., 2018· Simms et al., 2016). Συγκεκριμένα, τόσο η ακρίβεια όσο και ο βαθμός γραμμικότητας των εκτιμήσεων που πραγματοποιούν τα παιδιά πάνω σε αριθμογραμμή βρέθηκαν να συσχετίζονται και να προβλέπουν τη μαθηματική τους ικανότητα. Είναι πιθανόν μάλιστα να υπάρχει αμφίδρομη σχέση ανάμεσα στις εκτιμήσεις και τις μαθηματικές ικανότητες (Friso-van den Bos et al., 2015). Το γεγονός αυτό υποδηλώνει ότι τα παιδιά με πιο ώριμες και ακριβείς αναπαραστάσεις των αριθμητικών μεγεθών είναι εκείνα που εμφανίζουν υψηλότερες βαθμολογίες τόσο σε έργα που εξετάζουν τις επιδόσεις γενικά στα μαθηματικά όσο και σε έργα που σχετίζονται πιο συγκεκριμένα με τους αριθμούς, τις πράξεις και τα χαρακτηριστικά των αριθμών.

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στη σχέση της ικανότητας για εκτίμηση σε αριθμογραμμή με τις μαθηματικές ικανότητες, όπως προκύπτει από τη μελέτη αφενός των εκτιμήσεων που τα παιδιά πραγματοποιούν για τη θέση των δεκαδικών αριθμών πάνω σε αριθμογραμμή και αφετέρου των ικανοτήτων τους στην επίλυση προβλήματος και την εκτέλεση αλγοριθμικών διαδικασιών.

Θεωρητικό πλαίσιο

Σχέση της ικανότητας για εκτίμηση σε αριθμογραμμή με αριθμητικές ικανότητες

Αρκετές έρευνες έχουν δείξει ότι η ικανότητα εκτίμησης σε αριθμογραμμή είναι σημαντικός προβλεπτικός παράγοντας των αριθμητικών ικανοτήτων μικρών και μεγαλύτερων παιδιών, ακόμα και μετά τον έλεγχο της επίδρασης άλλων μεταβλητών, όπως της ανάγνωσης, της εκπαίδευσης των γονέων, του οικογενειακού εισοδήματος, της εθνικότητας κλπ. (π.χ., Bailey et al., 2014· Cowan & Powell, 2014· Fazio et al., 2014). Για παράδειγμα, οι Booth και Siegler (2006) επισήμαναν ότι η ικανότητα για εκτίμηση σε αριθμογραμμή συσχετίζεται θετικά με τις αριθμητικές ικανότητες από το νηπιαγωγείο έως την τρίτη τάξη, καθώς όσα παιδιά έκαναν λιγότερα λάθη στις εκτιμήσεις αριθμογραμμής είχαν υψηλότερες βαθμολογίες στα τεστ αριθμητικής. Επίσης, όπως επισημαίνουν οι Dietrich et al. (2016), η ικανότητα αυτή είναι δυνατόν να προβλέψει την κατανόηση της θεσιακής αξίας στην πρώτη τάξη. Ισχυρότερη φαίνεται να είναι η συσχέτιση σε περιπτώσεις πρόσθεσης και αφαίρεσης παρά σε περιπτώσεις πολλαπλασιασμού (Link et al., 2014), ενδεχομένως γιατί η αριθμογραμμή είναι πιθανόν να συνδέεται περισσότερο με τον αριθμητικό υπολογισμό, καθώς οι πράξεις πολλαπλασιασμού συνήθως επιλύονται με άμεση ανάκληση των αριθμητικών δεδομένων.

Στην έρευνα των Bailey et al. (2014), η ακρίβεια των εκτιμήσεων αριθμογραμμής που πραγματοποίησαν τα παιδιά στην ηλικία των έξι ετών με φυσικούς αριθμούς προέβλεπε την ακρίβεια των εκτιμήσεών τους με τα κλάσματα στην ηλικία των 13 ετών. Με άλλα λόγια, τα παιδιά που σχηματίζουν ακριβείς αναπαραστάσεις για τους φυσικούς αριθμούς στην αριθμογραμμή είναι πιθανόν να μπορούν, επίσης, να σχηματίζουν αργότερα ακριβείς αναπαραστάσεις για το μέγεθος των κλασμάτων στην αριθμογραμμή. Για τους Bailey et al. (2014), η απόκτηση μίας νοερής αριθμογραμμής που περιλαμβάνει κλάσματα προϋποθέτει τη συμπλήρωση των κενών μεταξύ διαδοχικών φυσικών αριθμών. Αυτό συμβαίνει γιατί, όπως εξηγούν, οι ακριβείς αναπαραστάσεις για τους φυσικούς και τους κλασματικούς αριθμούς απαιτούν κωδικοποίηση αναφορικά με άλλους αριθμούς. Για παράδειγμα, όπως το 75 σημειώνεται στο 75% μίας γραμμής από το 0 έως το 100, έτσι και το $\frac{3}{4}$ σημειώνεται στο 75% μίας γραμμής από το 0 έως το 1.

Η ικανότητα για εκτίμηση της θέσης των κλασμάτων σε αριθμογραμμή συσχετίζεται σημαντικά και με τις επιδόσεις στην άλγεβρα. Οι Booth και Newton (2012) ζήτησαν από εφήβους 12-14 ετών να εκτιμήσουν τη θέση κλασμάτων σε αριθμογραμμή από το 0 έως το 1 και τη θέση φυσικών αριθμών σε τυπική αριθμογραμμή από το 0 έως το 10.000 και σε μη τυπική αριθμογραμμή από το 0 έως το 6.257 καθώς και να απαντήσουν σε μία ποικιλία έργων πρώιμης άλγεβρας (π.χ., «Τι σημαίνει αυτό το σύμβολο;», «Λύσε την εξίσωση: $5 = x - 7$ »). Αν και βρήκαν συσχετίσεις ανάμεσα στις επιδόσεις των εφήβων στα έργα με αριθμογραμμή και τις επιδόσεις τους στα έργα άλγεβρας και για τους δύο τύπους αριθμών, περισσότερο ισχυρή ήταν η συσχέτιση όταν οι εκτιμήσεις αφορούσαν τα κλάσματα παρά όταν αφορούσαν τους φυσικούς αριθμούς. Μάλιστα βρήκαν ότι οι εκτιμήσεις τόσο με τα απλά κλάσματα (π.χ., $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{180}$, $\frac{1}{5}$) όσο και με τα πιο σύνθετα κλάσματα (π.χ., $\frac{5}{118}$, $\frac{83}{215}$, $\frac{5}{8}$) τα οποία περισσότερο απαιτούσαν αναλογικό συλλογισμό, συσχετιζόνταν με την επίλυση εξισώσεων και γενικότερα την αλγεβρική ετοιμότητα των συμμετεχόντων. Παρόμοια ήταν τα ευρήματα των DeWolf et al. (2015) για τις εκτιμήσεις με δεκαδικούς αριθμούς, στην έρευνά τους με δωδεκάχρονα παιδιά. Όπως επισημαίνουν, η ικανότητα εκτίμησης της θέσης των δεκαδικών αριθμών πάνω σε αριθμογραμμή (π.χ., 0,78, 0,08, 0,0056, 0,62500) είναι καλύτερος προγνωστικός παράγοντας της αλγεβρικής ικανότητας από την ικανότητα εκτίμησης της θέσης φυσικών αριθμών ή κλασμάτων πάνω σε αριθμογραμμή.

Με δεδομένη τη συμβολή των εκτιμήσεων αριθμογραμμής στην πρόβλεψη των μεταγενέστερων ικανοτήτων των παιδιών, αρκετοί είναι οι ερευνητές που πρότείνουν διδακτικές παρεμβάσεις επικεντρωμένες σε τρόπους ενίσχυσης των εκτιμήσεων που πραγματοποιούνται πάνω σε αριθμογραμμή (π.χ., Dietrich et al., 2016· Siegler & Ramani, 2008). Σε τέτοιες έρευνες παρέμβασης, η βελτίωση της ικανότητας για εκτίμηση σε αριθμογραμμή συνοδευόταν με βελτίωση στις αριθμητικές ικανότητες και μετρίαση των δυσκολιών αναφορικά με την κατανόηση των αριθμών.

Σχέση της ικανότητας για εκτίμηση σε αριθμογραμμή με μαθηματικές ικανότητες

Πραγματοποιώντας μετα-ανάλυση 41 ερευνητικών εργασιών στις οποίες συμμετείχαν αποκλειστικά παιδιά ηλικίας από 4 έως 14 ετών, οι Schneider et al. (2018) βρήκαν σταθερά υψηλές συσχετίσεις (που κυμαινόνταν από $r=.406$ έως $r=.480$) ανάμεσα στις εκτιμήσεις σε αριθμογραμμή και τις ευρύτερες μαθηματικές ικανότητες (π.χ., αναλογικός συλλογισμός, χωρικές δεξιότητες, νοεροί υπολογισμοί), οι οποίες διαφοροποιούνταν σημαντικά μεταξύ των ηλικιακών ομάδων. Πιο συγκεκριμένα, η συσχέτιση ήταν χαμηλότερη για τα παιδιά κάτω των έξι ετών, πιο υψηλή για τα παιδιά ηλικίας από έξι έως εννέα ετών και ακόμα πιο υψηλή για τα παιδιά άνω των εννέα ετών. Με άλλα λόγια, όσο αυξανόταν η ηλικία των συμμετεχόντων τόσο μεγαλύτερη ήταν η συσχέτιση, εύρημα που αναδεικνύει και τονίζει τον ρόλο των

εκτιμήσεων σε αριθμογραμμή στην ανάδειξη των μαθηματικών ικανοτήτων των συμμετεχόντων. Επιπρόσθετα, η συσχέτιση μεταξύ των εκτιμήσεων αριθμογραμμής και των μαθηματικών ικανοτήτων μετριάζονταν σημαντικά από το είδος των αριθμών που έπρεπε να εκτιμηθούν: οι εκτιμήσεις με κλάσματα εμφάνιζαν υψηλότερη συσχέτιση από τις εκτιμήσεις με φυσικούς αριθμούς, εύρημα που πιθανότατα οφείλεται στο γεγονός ότι οι εκτιμήσεις με κλάσματα είναι πιο σύνθετες και περισσότερο απαιτητικές από τις εκτιμήσεις με φυσικούς αριθμούς. Μάλιστα βρέθηκε ότι για τις εκτιμήσεις με φυσικούς αριθμούς, η συσχέτιση ήταν υψηλότερη στα παιδιά ηλικίας από 6 έως 9 ετών και χαμηλότερη στα μικρότερα και τα μεγαλύτερα παιδιά. Για τις εκτιμήσεις με κλάσματα, η συσχέτιση ήταν υψηλότερη στα παιδιά μεγαλύτερα των 9 ετών σε σχέση με τα μικρότερα παιδιά. Η συνέπεια που παρατήρησαν στα αποτελέσματά τους οι Schneider et al. (2018) τους οδήγησε αφενός να συμπεράνουν ότι η πραγματοποίηση εκτιμήσεων σε αριθμογραμμή συσχετίζεται εξαιρετικά ισχυρά και προβλέπει τις μαθηματικές ικανότητες των παιδιών και αφετέρου να προτείνουν την αξιοποίηση των έργων εκτίμησης αριθμογραμμής σε αναπτυξιακές έρευνες και σε πειραματικές έρευνες παρέμβασης.

Οι Fuchs et al. (2010) διαπίστωσαν ότι η εκτίμηση της θέσης των αριθμών πάνω σε αριθμογραμμή εξηγούσε τις ατομικές διαφορές που εντόπισαν σε παιδιά ηλικίας από πέντε έως επτά ετών κατά την επίλυση προβλήματος. Παρόμοια, οι Zhu, Cai και Leung (2017), εξετάζοντας τη συμβολή της εκτίμησης στη διαχείριση μαθηματικών έργων, βρήκαν ότι οι επιδόσεις σε έργα εκτίμησης σε αριθμογραμμή προέβλεπαν τις επιδόσεις των παιδιών δευτέρας τάξης από την Κίνα τόσο σε υπολογισμούς με αριθμητικές πράξεις (πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμό) όσο και στην επίλυση προβλήματος. Πρόσφατα, οι Gunderson και Hildebrand (2021) βρήκαν υψηλή συσχέτιση ανάμεσα στις εκτιμήσεις σε αριθμογραμμή και τους προσεγγιστικούς υπολογισμούς, ακόμα και όταν δεν είχε προηγηθεί διδασκαλία των υπολογισμών με ακρίβεια. Για παράδειγμα, πεντάχρονα παιδιά που πραγματοποιούσαν επιτυχείς εκτιμήσεις σε αριθμογραμμή από το 0 έως το 100 ήταν σε θέση να κρίνουν αν το $23+21$ είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από το 55, χωρίς να είναι απαραίτητα σε θέση να πουν ότι $23+21=44$.

Συνοψίζοντας, τα ευρήματα των ερευνών τονίζουν τη σπουδαιότητα της ικανότητας για πραγματοποίηση εκτιμήσεων σε αριθμογραμμή και τον καθοριστικό ρόλο τους σε μεγάλο εύρος πολύπλοκων και σύνθετων μαθηματικών περιοχών που ξεπερνούν συχνά τις έννοιες που σχετίζονται αποκλειστικά με τον αριθμό. Παράλληλα, διαπιστώνονται κενά στη βιβλιογραφία, καθώς οι έρευνες που εξετάζουν τη σχέση ανάμεσα στις εκτιμήσεις και τις μαθηματικές ικανότητες συχνά περιορίζονται στον έλεγχο της ικανότητας για πραγματοποίηση εκτιμήσεων σχεδόν αποκλειστικά με φυσικούς αριθμούς.

Η παρούσα εργασία

Λαμβάνοντας υπόψη τη σημασία των εκτιμήσεων σε αριθμογραμμή αλλά και τα κενά στη βιβλιογραφία, το ενδιαφέρον της εργασίας επικεντρώθηκε στη συνδυαστική εξέταση δύο πεδίων, της ικανότητας για πραγματοποίηση εκτιμήσεων με δεκαδικούς αριθμούς πάνω σε αριθμογραμμή και των μαθηματικών ικανοτήτων. Με δεδομένο ότι αφενός οι εκτιμήσεις σε αριθμογραμμή έχουν μελετηθεί για τους φυσικούς αριθμούς και τα κλάσματα και αφετέρου τα λιγοστά ευρήματα για τις εκτιμήσεις με δεκαδικούς αριθμούς σε αριθμογραμμή προέρχονται από εφήβους και ενήλικες, σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να εξετάσει τις επιδόσεις των παιδιών Ε' και Στ' τάξης σε έργα εκτίμησης με δεκαδικούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή και πώς αυτές σχετίζονται με τις μαθηματικές ικανότητές τους.

Τα ερευνητικά ερωτήματα που θα επιχειρήσει η παρούσα εργασία να απαντήσει είναι τα εξής:
α) Ποια είναι η ικανότητα παιδιών Ε' και Στ' τάξης του δημοτικού σχολείου για πραγματοποίηση εκτιμήσεων με δεκαδικούς αριθμούς πάνω σε αριθμογραμμή και πώς

διαφοροποιείται από την ηλικία;, β) Επηρεάζονται οι εκτιμήσεις πάνω σε αριθμογραμμή από το είδος των έργων εκτίμησης;, γ) Παράγοντες, όπως το μέγεθος των δεκαδικών αριθμών και η παρουσία σημείων αναφοράς πάνω στην αριθμογραμμή, επηρεάζουν αυτή την ικανότητα και με ποιον τρόπο;, και δ) Υπάρχει σχέση ανάμεσα στην ικανότητα των παιδιών για πραγματοποίηση εκτιμήσεων με δεκαδικούς αριθμούς και τις μαθηματικές τους ικανότητες;

Μεθοδολογία

Συμμετέχοντες

Στην έρευνα έλαβαν μέρος συνολικά 118 παιδιά (56 αγόρια, 47,5%), από τα οποία τα 58 φοιτούσαν στην Ε' τάξη (27 αγόρια) και τα 60 στην Στ' τάξη (29 αγόρια) του δημοτικού σχολείου. Η ηλικία των παιδιών της Ε' τάξης κυμαινόταν από 10 χρονών και 4 μηνών έως 11 χρονών και 3 μηνών, με μέσο όρο ηλικίας τα 10 χρόνια και 10 μήνες, ενώ τα παιδιά της Στ' τάξης είχαν ηλικία από 11 χρονών έως 12 χρονών και 3 μηνών, με μέσο όρο ηλικίας τα 11 χρόνια και 8 μήνες.

Οι συμμετέχοντες φοιτούσαν σε διάφορα δημόσια δημοτικά σχολεία που προέρχονταν από την ευρύτερη περιοχή της πόλης της Θεσσαλονίκης. Δεν είχαν δεχθεί εξειδικευμένη διδασκαλία στις εκτιμήσεις πάνω σε αριθμογραμμή και η εξοικείωσή τους με τις εκτιμήσεις περιοριζόταν σε όσα προβλέπονται από το αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών και αφορούν στη χρήση της αριθμογραμμής και τις εκτιμήσεις. Τέλος, η επιλογή των συμμετεχόντων έγινε με βολική δειγματοληψία.

Σχεδιασμός της έρευνας - Εργαλείο μέτρησης

Για την επίτευξη του ερευνητικού σκοπού, πραγματοποιήθηκε ποσοτική έρευνα με συγχρονικό σχεδιασμό (έρευνα επισκόπησης). Η συλλογή των δεδομένων πραγματοποιήθηκε μέσω τεστ που περιείχαν συγκεκριμένες ομάδες δοκιμασιών και επέτρεπαν υπό προϋποθέσεις την εξαγωγή γενικεύσιμων συμπερασμάτων (Bryman, 2017). Πιο συγκεκριμένα, σχεδιάστηκαν και παρουσιάστηκαν σε όλους τους συμμετέχοντες τέσσερα έργα, δύο από τα οποία εξετάζουν τις επιδόσεις σε δοκιμασίες εκτίμησης πάνω σε αριθμογραμμή και δύο τις επιδόσεις σε δοκιμασίες μαθηματικών ικανοτήτων.

Έργα εκτίμησης πάνω σε αριθμογραμμή. Προκειμένου να διερευνηθεί η ικανότητα των συμμετεχόντων για την πραγματοποίηση εκτιμήσεων με δεκαδικούς αριθμούς πάνω σε αριθμογραμμή (1^ο ερευνητικό ερώτημα) αλλά και αν η ικανότητα αυτή διαφοροποιείται από το είδος του έργου εκτίμησης (έργα NP και PN) (2^ο ερευνητικό ερώτημα), δόθηκαν σε αυτούς δύο έργα εκτίμησης, καθένα από τα οποία αποτελούνταν από 8 δοκιμασίες (συνολικά 16 δοκιμασίες). Στο πρώτο έργο (*Έργο 1: Εκτίμηση της θέσης του αριθμού πάνω σε αριθμογραμμή - NP: number-to-position*), δίνονταν συγκεκριμένοι δεκαδικοί αριθμοί και οι συμμετέχοντες καλούνταν να εκτιμήσουν τη θέση των αριθμών αυτών πάνω στην αριθμογραμμή, σημειώνοντας με κάθετη γραμμή το σημείο που θεωρούσαν κατάλληλο (π.χ., «Πού βρίσκεται ο αριθμός 0,68 πάνω στην αριθμογραμμή;»). Στο δεύτερο έργο (*Έργο 2: Εκτίμηση του αριθμητικού μεγέθους σε συγκεκριμένη θέση πάνω στην αριθμογραμμή - PN: position-to-number*), δινόταν πάνω σε αριθμογραμμή μια συγκεκριμένη θέση, η οποία υποδεικνυόταν από μία κάθετη γραμμή και ένα βέλος, και ζητούνταν από τους συμμετέχοντες να εκτιμήσουν την τιμή του αριθμού αυτής της θέσης (π.χ., «Ποιος αριθμός βρίσκεται στη θέση του βέλους;»), καταδεικνύοντας μια συγκεκριμένη θέση πάνω στην αριθμογραμμή).

Οι αριθμογραμμές σε όλες τις δοκιμασίες είχαν σταθερό μήκος 25 εκατοστά, με άκρα από το 0 έως το 5. Με σκοπό να εξεταστεί αν διαφοροποιούνται οι επιδόσεις των παιδιών στις εκτιμήσεις για δεκαδικούς αριθμούς από την παρουσία σημείων αναφοράς πάνω στην

αριθμογραμμή (3^ο ερευνητικό ερώτημα), οι συμμετέχοντες και από τις δύο ηλικιακές ομάδες χωρίστηκαν τυχαία σε δύο υποομάδες: στους μισούς συμμετέχοντες (Ομάδα Α) δόθηκαν δοκιμασίες, στις οποίες οι αριθμογραμμές είχαν σημειωμένα το αρχικό και το τελικό άκρο της αριθμογραμμής (βλ. Σχήμα 1), ενώ στους άλλους μισούς συμμετέχοντες (Ομάδα Β) δόθηκαν δοκιμασίες, στις οποίες οι αριθμογραμμές είχαν σημειωμένα, πέρα από το αρχικό και το τελικό άκρο της αριθμογραμμής (0 και 5), τρία επιπλέον σημεία αναφοράς (βλ. Σχήμα 2). Τα επιπλέον σημεία αναφοράς (1,25, 2,5 και 3,75) βρίσκονταν ένα σε κάθε τεταρτημόριο της αριθμογραμμής με τη μορφή μαύρων γραμμών και κάτω από το καθένα αναγράφονταν οι αριθμοί στους οποίους αντιστοιχούν.

Και στα δύο έργα εκτίμησης, όπως φαίνεται στον Πίνακα 1, οι μισές δοκιμασίες αφορούσαν δεκαδικούς αριθμούς μεγαλύτερους της μονάδας (π.χ., 2,4, 3,84) και οι άλλες μισές δοκιμασίες αφορούσαν δεκαδικούς αριθμούς μικρότερους της μονάδας (π.χ., 0,3, 0,68), ισάριθμα μοιρασμένες ώστε να περιλαμβάνουν δεκαδικούς αριθμούς με ένα δεκαδικό ψηφίο και με δύο δεκαδικά ψηφία. Με αυτόν τον τρόπο, επιχειρήθηκε να εξεταστεί αν η επιτυχία των συμμετεχόντων στις εκτιμήσεις πάνω στην αριθμογραμμή επηρεάζεται από το μέγεθος των δεκαδικών αριθμών (3^ο ερευνητικό ερώτημα). Επιπρόσθετα, η επιλογή των αριθμών ήταν τέτοια ώστε να μην διαφέρουν πολύ ανάμεσα στο δύο έργα εκτίμησης. Για τον σκοπό αυτόν, για το Έργο 2 όσοι αριθμοί επιλέχθηκαν προέκυψαν ύστερα από αφαίρεση των αριθμών του Έργου 1, από το 1 για τις δοκιμασίες με αριθμούς μικρότερους της μονάδας (για παράδειγμα, 0,07 και 0,93 στα Έργα 1 και 2, αντίστοιχα) και από το 5 για τις δοκιμασίες με αριθμούς μεγαλύτερους της μονάδας (για παράδειγμα, 3,2 και 1,8 στα Έργα 1 και 2, αντίστοιχα). Τέλος, και στα δύο έργα εκτίμησης, οι αριθμοί δόθηκαν στους συμμετέχοντες με τυχαία σειρά, η οποία όμως ήταν ίδια για όλους τους συμμετέχοντες.

Έργο 1 (NP)

Πού βρίσκεται ο αριθμός 0,68 πάνω στην αριθμογραμμή;



Έργο 2 (PN)

Ποιος αριθμός βρίσκεται στη θέση του βέλους;



Σχήμα 1. Παραδείγματα αριθμογραμμών με σημειωμένα το αρχικό και το τελικό άκρο της αριθμογραμμής για τα δύο έργα εκτίμησης

Έργο 1 (NP)

Πού βρίσκεται ο αριθμός 0,68 πάνω στην αριθμογραμμή;



Έργο 2 (PN)

Ποιος αριθμός βρίσκεται στη θέση του βέλους;



Σχήμα 2. Παραδείγματα αριθμογραμμών με επιπλέον σημεία αναφοράς για τα δύο έργα εκτίμησης

Πίνακας 1. Οι αριθμοί που αξιοποιήθηκαν στα δύο έργα εκτίμησης

Έργο 1: Εκτίμηση της θέσης του αριθμού πάνω σε αριθμογραμμή - NP	Έργο 2: Εκτίμηση του αριθμητικού μεγέθους σε συγκεκριμένη θέση της αριθμογραμμής - PN	
0,07	0,93	} <1
0,3	0,7	
0,68	0,32	
0,9	0,1	
1,09	3,91	} >1
2,4	2,6	
3,2	1,8	
3,84	1,16	

Έργα μαθηματικών ικανοτήτων. Με σκοπό να μελετηθεί η σχέση ανάμεσα στην ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων για δεκαδικούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή και τις μαθηματικές ικανότητες (4^ο ερευνητικό ερώτημα), παρουσιάστηκαν στους συμμετέχοντες δύο έργα μαθηματικών ικανοτήτων. Στο πρώτο έργο (Έργο 3: Επίλυση προβλήματος), οι συμμετέχοντες κλήθηκαν να επιλύσουν και να επιλέξουν, ανάμεσα σε τρεις απαντήσεις, τη σωστή απάντηση σε οχτώ μαθηματικά προβλήματα, τα οποία ισάριθμα αφορούσαν σε τέσσερις μαθηματικές περιοχές: αριθμητικές πράξεις, πιθανότητες, γεωμετρία και μοτίβα. Το Έργο Επίλυσης Προβλήματος βασίστηκε στο ερευνητικό εργαλείο των Desli και Lioliou (2020) και των Gürbüz και Erdem (2016). Στο δεύτερο έργο μαθηματικών ικανοτήτων (Έργο 4: Εκτέλεση αριθμητικών πράξεων), το οποίο βασίστηκε και επέκτεινε το ερευνητικό εργαλείο των Gürbüz και Erdem (2016), ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες να εκτελέσουν γραπτά οχτώ αριθμητικές πράξεις, δύο για κάθε αλγόριθμο των πράξεων (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση). Πιο αναλυτικά, ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες η εκτέλεση

δύο πράξεων της πρόσθεσης με τριψήφιους αριθμούς και κρατούμενο, η εκτέλεση δύο πράξεων της αφαίρεσης με τριψήφιους αριθμούς και δανεικό, η εκτέλεση δύο πράξεων του πολλαπλασιασμού διψήφιου με διψήφιο και η εκτέλεση δύο πράξεων της διαίρεσης με τριψήφιο διαιρέτο και διψήφιο διαιρέτη.

Προκειμένου να διερευνηθεί η εσωτερική αξιοπιστία του ερευνητικού εργαλείου, χρησιμοποιήθηκε ο δείκτης Cronbach's alpha. Τόσο τα έργα εκτίμησης όσο και τα έργα μαθηματικών ικανοτήτων εμφάνισαν ικανοποιητικά επίπεδα εσωτερικής αξιοπιστίας, με τον δείκτη Cronbach's alpha να βρίσκεται στο 0,838 και 0,846, αντίστοιχα.

Διαδικασία

Οι συμμετέχοντες εξετάστηκαν σε χώρο του σχολείου τους όπου επικρατούσαν συνθήκες ησυχίας, απαντώντας ατομικά στις δοκιμασίες. Η συμμετοχή τους στην έρευνα ήταν ανώνυμη και πραγματοποιήθηκε μετά από ενυπόγραφη συγκατάθεση των γονέων-κηδεμόνων τους, χωρίς να συνδέεται με την αξιολόγησή τους στα σχολικά μαθήματα ή το μάθημα των μαθηματικών.

Η συλλογή των δεδομένων πραγματοποιήθηκε σε δύο χρονικές στιγμές, για να διασφαλιστεί ότι οι συμμετέχοντες δεν θα κουράζονταν ή δεν θα παρουσίαζαν μείωση προσοχής και συγκέντρωσης λόγω του πλήθους των δοκιμασιών. Αρχικά, οι συμμετέχοντες απάντησαν στα έργα εκτίμησης και μετά από μία εβδομάδα στα έργα μαθηματικών ικανοτήτων. Η σειρά παρουσίασης των έργων σε κάθε χρονική στιγμή εναλλασσόταν, προκειμένου να περιοριστούν τα λάθη κούρασης στις τελευταίες δοκιμασίες των έργων. Πριν από τις δοκιμασίες, δίνονταν οι βασικές οδηγίες και πραγματοποιούνταν ένα παράδειγμα.

Για τα έργα εκτίμησης, σε όλους τους συμμετέχοντες δόθηκε από ένα μπλοκ με 16 σελίδες (8 για κάθε έργο εκτίμησης) για να σημειώνουν τις απαντήσεις τους στις ισάριθμες δοκιμασίες. Σε κάθε σελίδα υπήρχε μία αριθμογραμμή μήκους 25 εκατοστών στην οποία, ανάλογα με την ομάδα στην οποία ανήκαν οι συμμετέχοντες, ήταν σημειωμένα μόνο τα άκρα ή/και τα ενδιάμεσα σημεία αναφοράς. Όλη η διαδικασία για τα Έργα 1 και 2 διήρκεσε περίπου 15'-20' για κάθε συμμετέχοντα.

Τα έργα μαθηματικών ικανοτήτων παρουσιάστηκαν στους συμμετέχοντες σε έντυπη μορφή. Δίπλα από κάθε πρόβλημα υπήρχε χώρος τον οποίο μπορούσαν να αξιοποιήσουν για την επίλυση των προβλημάτων. Η διαδικασία για τη συμπλήρωση των δοκιμασιών των Έργων 3 και 4 διήρκεσε περίπου 35'-40' για κάθε συμμετέχοντα.

Ανάλυση των δεδομένων

Κάθε σωστή απάντηση βαθμολογήθηκε με 1 βαθμό, ενώ κάθε λανθασμένη απάντηση με 0 βαθμούς. Ο μέγιστος αριθμός των σωστών απαντήσεων για κάθε συμμετέχοντα δυνητικά ήταν 32 (4 έργα x 8 δοκιμασίες/έργο). Η στατιστική επεξεργασία και ανάλυση των δεδομένων πραγματοποιήθηκε με τη χρήση του προγράμματος SPSS 28. Δεδομένης της κανονικής κατανομής των δεδομένων, ακολουθήθηκε παραμετρική στατιστική ανάλυση.

Για την κωδικοποίηση των δεδομένων που συλλέχθηκαν από τα έργα εκτίμησης, χρησιμοποιήθηκε ένα ελαστικό κριτήριο το οποίο χρησιμοποιείται σε ανάλογες έρευνες (π.χ., Sekeris, Verschaffel, & Luwel, 2019; Torbeyns, Schneider, Xin, & Siegler, 2015), σύμφωνα με το οποίο επιτυχείς θεωρούνταν οι εκτιμήσεις που έχουν ποσοστιαία απόκλιση κατά 20% από το αποτέλεσμα της ακριβούς μέτρησης. Το αποτέλεσμα της ακριβούς μέτρησης εξαρτάται από το μήκος της αριθμογραμμής που κάθε φορά χρησιμοποιείται. Στην αριθμογραμμή των 25 εκ. που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα έρευνα, η απόκλιση 20% υπολογίζεται ως 2,5 εκ. πριν από και 2,5 εκ. μετά τη θέση του αριθμού με ακρίβεια. Για παράδειγμα, η ακριβής θέση του αριθμού 1,09 πάνω στην αριθμογραμμή των 25 εκ. με άκρα 0-5 βρίσκεται στα 5,45 εκ. αυτής

και το εύρος των σωστών απαντήσεων, σύμφωνα με το ελαστικό κριτήριο που υιοθετήθηκε, αφορά τις θέσεις από τα 2,95 εκ. έως τα 7,95 εκ.

Αποτελέσματα

Επίδοση στα Έργα Εκτίμησης

Η γενική επίδοση των συμμετεχόντων στο σύνολο των δοκιμασιών εκτίμησης κινήθηκε αρκετά υψηλά, με το ποσοστό επιτυχίας τους να ξεπερνά το 80%. Από τις συνολικά 16 δοκιμασίες εκτίμησης, οι συμμετέχοντες απαντούσαν με επιτυχία σε περίπου 13 δοκιμασίες (μ.ο.=12,89, τ.α.=2,985), χωρίς να εντοπίζονται στατιστικά σημαντικές διαφορές στις επιδόσεις ανάμεσα στις δύο ηλικιακές ομάδες ($t(116)=-,984, p=.327$) ούτε ανάμεσα στα δύο φύλα ($t(116)=1,471, p=.144$). Το φύλο δεν βρέθηκε να επηρεάζει τις εκτιμήσεις των συμμετεχόντων ακόμα και όταν εξετάστηκε για κάθε ηλικιακή ομάδα ξεχωριστά. Με άλλα λόγια, παρόμοια επιτυχίες ήταν οι εκτιμήσεις που πραγματοποίησαν τα αγόρια και τα κορίτσια της Ε' τάξης ($t(56)=1,879, p=.065$) όσο και τα αγόρια και τα κορίτσια της Στ' τάξης ($t(58)=,063, p=.950$).

Το είδος του έργου επηρέασε στατιστικά σημαντικά την επιτυχία των συμμετεχόντων στις εκτιμήσεις ($t(117)=-2,636, p<.01$). Συγκεκριμένα, το Έργο 2 (PN) που καλούσε τους συμμετέχοντες να εκτιμήσουν ποιος αριθμός βρίσκεται σε συγκεκριμένη θέση της αριθμογραμμής ήταν λιγότερο απαιτητικό ($t(57)=-1,863, p<.05$ και $t(59)=-1,849, p<.05$, για τα παιδιά της Ε' τάξης και της Στ' τάξης, αντίστοιχα) σε σχέση με το Έργο 1 (NP) στο οποίο οι συμμετέχοντες καλούνταν να βρουν τη θέση ενός δεκαδικού αριθμού πάνω στην αριθμογραμμή.

Οι εκτιμήσεις των συμμετεχόντων επηρεάστηκαν από την παρουσία επιπρόσθετων σημείων αναφοράς πάνω στην αριθμογραμμή ($t(116)=6,805, p<.001$): στατιστικά σημαντικά καλύτερες ήταν οι επιδόσεις των συμμετεχόντων που είχαν αριθμογραμμές με σημεία αναφοράς (90,25%) σε σχέση με τις επιδόσεις των συμμετεχόντων που είχαν αριθμογραμμές χωρίς σημεία αναφοράς (70,87%). Οι διαφορές αυτές επιβεβαιώθηκαν και για τις δύο ηλικιακές ομάδες ($t(56)=5,269, p<.001$ και $t(58)=4,275, p<.001$, για τα παιδιά της Ε' τάξης και της Στ' τάξης, αντίστοιχα) αλλά και για κάθε έργο ξεχωριστά ($t(116)=7,984, p<.001$ και $t(116)=3,718, p<.001$, για τα Έργα 1 και 2, αντίστοιχα). Η διαφοροποίηση στις εκτιμήσεις ανάμεσα στο είδος της αριθμογραμμής και το είδος του έργου φαίνεται ιδιαίτερα από τους χαμηλούς μέσους όρους ($m\bar{x}=8$) αλλά και τις μεγάλες τυπικές αποκλίσεις στις δοκιμασίες που παρουσιάστηκαν χωρίς ενδιάμεσα σημεία αναφοράς, όπως δείχνει ο Πίνακας 2.

Πίνακας 2. Μέσοι όροι (και τυπικές αποκλίσεις) των εκτιμήσεων των συμμετεχόντων ως προς το είδος αριθμογραμμής, το είδος έργου και την ηλικιακή ομάδα

Είδος αριθμογραμμής	Έργο 1 (NP, $m\bar{x}=8$)		Έργο 2 (PN, $m\bar{x}=8$)	
	Ε' τάξη	Στ' τάξη	Ε' τάξη	Στ' τάξη
Με σημεία αναφοράς	7,25 (.75)	7,29 (.82)	7,25 (.84)	7,10 (1,14)
Χωρίς σημεία αναφοράς	5,03 (1,88)	5,41 (1,74)	5,84 (2,14)	6,41 (1,66)

Όταν οι εκτιμήσεις των συμμετεχόντων εξετάστηκαν ως προς το μέγεθος των δεκαδικών αριθμών που τους ζητήθηκε να εκτιμήσουν, βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές ($t(117)=2,323, p<.05$), με τις επιδόσεις του συνόλου των συμμετεχόντων να είναι σημαντικά υψηλότερες στις δοκιμασίες που περιείχαν αριθμούς μικρότερους της μονάδας (83,12%) συγκριτικά με τις δοκιμασίες που περιείχαν αριθμούς μεγαλύτερους της μονάδας (78%). Τα παραπάνω αποτελέσματα επιβεβαιώθηκαν για το Έργο 1 ($t(117)=2,351, p<.05$) αλλά δεν

επιβεβαιώθηκαν για το Έργο 2 ($t(117)=1,359, p=.177$), στο οποίο το μέγεθος των αριθμών δεν επηρέασε την επιτυχία των συμμετεχόντων στις εκτιμήσεις. Συγκεκριμένα, στις δοκιμασίες του Έργου 1 που περιείχαν δεκαδικούς αριθμούς μικρότερους της μονάδας, οι συμμετέχοντες πραγματοποίησαν περισσότερες επιτυχίες εκτιμήσεις σε σύγκριση με τις δοκιμασίες του ίδιου έργου που περιείχαν δεκαδικούς αριθμούς μεγαλύτερους της μονάδας. Αντίθετα, παρόμοιες ήταν οι επιδόσεις των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες του Έργου 2 με δεκαδικούς αριθμούς μικρότερους και σε αυτές με αριθμούς μεγαλύτερους της μονάδας.

Οι επιμέρους αναλύσεις που πραγματοποιήθηκαν για κάθε ηλικιακή ομάδα έδειξαν πως για τα παιδιά της Ε΄ τάξης οι δοκιμασίες με αριθμούς μεγαλύτερους της μονάδας ήταν περισσότερο απαιτητικές (μ.ο.=5,95, με μέγιστο αριθμό σωστών δοκιμασιών τις 8 δοκιμασίες), τόσο στο σύνολο των δοκιμασιών εκτίμησης ($t(57)=2,895, p<.01$) όσο και στις δοκιμασίες κάθε έργου ξεχωριστά ($t(57)=2,303, p<.05$ και $t(57)=2,267, p<.05$, για τα Έργα 1 και 2, αντίστοιχα). Ωστόσο, οι εκτιμήσεις των παιδιών της Στ΄ τάξης δεν επηρεάστηκαν στατιστικά σημαντικά από το μέγεθος των εμπλεκόμενων αριθμών, είτε αυτό ήταν μικρότερο είτε μεγαλύτερο από τη μονάδα ($t(59)=,464, p=.645$). Το εύρημα αυτό επιβεβαιώθηκε και στα δύο έργα εκτίμησης ($t(59)=,964, p=.339$ και $t(59)=-,205, p=.839$, για τα Έργα 1 και 2, αντίστοιχα). Ο Πίνακας 3 παρουσιάζει τα παραπάνω στοιχεία.

Πίνακας 3. Μέσοι όροι (και τυπικές αποκλίσεις) των εκτιμήσεων των συμμετεχόντων ως προς το μέγεθος των αριθμών, το είδος έργου και την ηλικιακή ομάδα

Μέγεθος αριθμών	Έργο 1 (NP, $m_x=4$)		Έργο 2 (PN, $m_x=4$)		Σύνολο ($m_x=8$)	
	Ε΄ τάξη	Στ΄ τάξη	Ε΄ τάξη	Στ΄ τάξη	Ε΄ τάξη	Στ΄ τάξη
Αριθμοί < 1	3,24 (.90)	3,26 (.76)	3,43 (.80)	3,37 (.92)	6,67 (1,32)	6,63 (1,15)
Αριθμοί > 1	2,86 (1,27)	3,12 (1,22)	3,09 (1,27)	3,40 (.99)	5,95 (2,27)	6,52 (2,01)

Επίδοση στα Έργα Μαθηματικών Ικανοτήτων

Αρκετά υψηλό ποσοστό επιτυχίας (78,94%) σημείωσε το σύνολο των συμμετεχόντων στα δύο έργα μαθηματικών ικανοτήτων (Επίλυση Προβλήματος και Εκτέλεση Αριθμητικών Πράξεων). Το ποσοστό αυτό δεν βρέθηκε να διαφοροποιείται στατιστικά σημαντικά από την ηλικιακή ομάδα ($t(116)=-,931, p=.354$) ούτε από το φύλο των συμμετεχόντων ($t(116)=-,136, p=.446$).

Στατιστικά σημαντικές διαφορές βρέθηκαν στις επιδόσεις των συμμετεχόντων ανάμεσα στα δύο έργα μαθηματικών ικανοτήτων ($t(117)=-6,328, p<.001$), με τις επιδόσεις του συνόλου των παιδιών να είναι υψηλότερες στο Έργο της εκτέλεσης αριθμητικών πράξεων συγκριτικά με το Έργο της επίλυσης προβλήματος. Αυτές οι διαφορές επιβεβαιώθηκαν, όταν η ίδια ανάλυση πραγματοποιήθηκε ξεχωριστά για τα παιδιά της Ε΄ τάξης και της Στ΄ τάξης ($t(57)=-3,770, p<.001$ και $t(59)=-5,185, p<.001$, αντίστοιχα). Με σκοπό να ελεγχθεί αν το είδος των δοκιμασιών στα έργα των μαθηματικών ικανοτήτων επηρεάζει τις διαφορές που εντοπίστηκαν στις επιδόσεις ανάμεσα στα δύο έργα, εξετάστηκαν ξεχωριστά οι εκτιμήσεις των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες επίλυσης προβλήματος και στις δοκιμασίες εκτέλεσης αριθμητικών πράξεων. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4, αναφορικά με το Έργο της επίλυσης προβλήματος, η επίδοση των συμμετεχόντων ήταν υψηλότερη στις δοκιμασίες που αφορούσαν τα μοτίβα ($p<.05$), ενώ η χαμηλότερη επίδοσή τους σημειώθηκε στις δοκιμασίες από την περιοχή της Γεωμετρίας ($p<.01$). Μάλιστα η μικρή τυπική απόκλιση που παρατηρήθηκε και για τις δύο ηλικιακές ομάδες στις δοκιμασίες για τα μοτίβα (.36 και .32, για τα παιδιά της Ε΄ τάξης και τα παιδιά της Στ΄ τάξης, αντίστοιχα) δείχνει ότι για την πλειοψηφία των παιδιών οι δοκιμασίες με τα μοτίβα ήταν παρόμοιες δυσκολίας. Από τις δοκιμασίες του Έργου της εκτέλεσης αριθμητικών

πράξεων, οι δοκιμασίες που αφορούσαν στην εκτέλεση των πράξεων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης ήταν εκείνες με τα μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας ($p<.01$) σε σχέση με τις δοκιμασίες που ζητούσαν την εκτέλεση του πολλαπλασιασμού και την εκτέλεση της διαίρεσης.

Πίνακας 4. Μέσοι όροι (και τυπικές αποκλίσεις) των σωστών απαντήσεων ($n=2$) στα έργα μαθηματικών ικανοτήτων ως προς την ηλικιακή ομάδα

Έργα Μαθηματικών Ικανοτήτων	Ηλικιακές Ομάδες		
	Ε' τάξη	Στ' τάξη	Σύνολο
<i>Επίλυση Προβλήματος (Έργο 3)</i>			
Αριθμητικές πράξεις	1,53 (.60)	1,42 (.64)	1,47 (.62)
Πιθανότητες	1,28 (.72)	1,45 (.65)	1,36 (.69)
Γεωμετρία	1,09 (.78)	1,10 (.73)	1,09 (.75)
Μοτίβα	1,90 (.36)	1,88 (.32)	1,89 (.34)
<i>Εκτέλεση αριθμητικών Πράξεων (Έργο 4)</i>			
Πρόσθεση	1,81 (.39)	1,87 (.39)	1,84 (.39)
Αφαίρεση	1,76 (.47)	1,82 (.43)	1,79 (.45)
Πολλαπλασιασμός	1,45 (.73)	1,68 (.57)	1,57 (.66)
Διαίρεση	1,64 (.55)	1,60 (.59)	1,62 (.57)

Συσχέτιση της επίδοσης στις εκτιμήσεις με την επίδοση στις μαθηματικές ικανότητες

Με σκοπό να διερευνηθεί αν υπάρχει σχέση ανάμεσα στην επίδοση στις εκτιμήσεις με δεκαδικούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή και τις μαθηματικές ικανότητες, πραγματοποιήθηκε ανάλυση συσχέτισης. Η ανάλυση έδειξε ότι υπάρχει θετική συνάφεια ανάμεσα στην επίδοση των παιδιών στο σύνολο των έργων εκτίμησης και την επίδοσή τους στις δοκιμασίες επίλυσης προβλήματος, τόσο για τα παιδιά της Ε' τάξης (Pearson's $r=,275$, $p<.05$) όσο και για τα παιδιά της Στ' τάξης (Pearson's $r=,333$, $p<.01$). Με άλλα λόγια, όσα παιδιά παρουσίασαν μεγάλη επιτυχία στις δοκιμασίες εκτίμησης έτειναν να εμφανίζουν μεγάλη επιτυχία και στις δοκιμασίες επίλυσης προβλήματος και το αντίστροφο. Επιπρόσθετα, μόνο για τα παιδιά της Στ' τάξης, υψηλά θετικά συσχετίζεται η επιτυχία στο Έργο 1, που ήταν και το πιο απαιτητικό έργο, με την επιτυχία τόσο στο σύνολο των δύο έργων μαθηματικών ικανοτήτων (Pearson's $r=,286$, $p<.05$) όσο και στο έργο της επίλυσης προβλήματος (Pearson's $r=,349$, $p<.01$). Καμία συσχέτιση δεν βρέθηκε ανάμεσα στις εκτιμήσεις και την εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων (βλ. Πίνακα 5), στοιχείο που δείχνει ότι η επιτυχία στις εκτιμήσεις δεν συσχετίζεται απαραίτητα με τη σωστή εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων, καθώς όσοι συμμετέχοντες πραγματοποιούσαν επιτυχείς εκτιμήσεις εκτελούσαν σε παρόμοιο βαθμό σωστά ή λανθασμένα τις αριθμητικές πράξεις στο Έργο 4.

Συμπεράσματα

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν αφενός η εξέταση της ικανότητας παιδιών Ε' και Στ' τάξης του δημοτικού σχολείου για πραγματοποίηση εκτιμήσεων της θέσης δεκαδικών αριθμών πάνω σε αριθμογραμμή και αφετέρου η διερεύνηση της σχέσης ανάμεσα σε αυτή την

ικανότητα και την επιτυχία τους σε μαθηματικά έργα. Τέσσερα είναι τα κύρια ευρήματα όπως προέκυψαν από την ανάλυση των αποτελεσμάτων.

Πίνακας 5. Συσχετίσεις ανάμεσα στις εκτιμήσεις και τις μαθηματικές ικανότητες για κάθε ηλικιακή ομάδα

	Μαθηματικές Ικανότητες (Σύνολο)		Επίλυση Προβλήματος (Έργο 3)		Εκτέλεση Αριθμητικών Πράξεων (Έργο 4)	
	Ε' τάξη	Στ' τάξη	Ε' τάξη	Στ' τάξη	Ε' τάξη	Στ' τάξη
Εκτιμήσεις (Σύνολο)	,213	,255*	,275*	,333**	,037	,019
1) Έργο NP (Έργο 1)	,233	,286*	,255	,349**	,101	,053
2) Έργο PN (Έργο 2)	,142	,140	,230	,212	-,036	-,026

Στατιστική σημαντικότητα: * $p < .05$, ** $p < .01$

Πρώτον, ιδιαίτερα ικανοποιητική ήταν η επίδοση των παιδιών της Ε' και της Στ' τάξης στις εκτιμήσεις με δεκαδικούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή, χωρίς να διαφοροποιείται σημαντικά μεταξύ των δύο ηλικιακών ομάδων. Οι απαιτήσεις των έργων εκτίμησης σε αριθμογραμμή, ιδιαίτερα με δύσκολους αριθμούς όπως είναι οι δεκαδικοί αριθμοί που εξετάστηκαν στην παρούσα εργασία, είναι υψηλές, δεδομένου ότι είναι απαραίτητη η εννοιολογική διαχείριση των αριθμών. Ωστόσο, φαίνεται πως ακόμα και τα 11-χρονα παιδιά ήταν σε θέση να τις πραγματοποιήσουν με αρκετά μεγάλη επιτυχία, εύρημα που συμφωνεί με ευρήματα που δείχνουν πως όσο τα παιδιά μεγαλώνουν τόσο περισσότερες επιτυχίες εκτιμήσεις πραγματοποιούν με φυσικούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή (Siegler & Opfer, 2003). Είναι πιθανόν το ίδιο να ισχύει και στην πραγματοποίηση εκτιμήσεων με δεκαδικούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή. Το γεγονός ότι η διαφορά στην ηλικία των δύο ομάδων των συμμετεχόντων ήταν πολύ μικρή πιθανότατα εξηγεί την απουσία σημαντικών διαφορών στις επιδόσεις τους.

Δεύτερον, η ικανότητα των παιδιών να πραγματοποιούν εκτιμήσεις με δεκαδικούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή φάνηκε πως διαφοροποιήθηκε από το είδος του έργου εκτίμησης. Πιο συγκεκριμένα, οι επιδόσεις των συμμετεχόντων και των δύο ηλικιακών ομάδων ήταν περισσότερο επιτυχίες στις δοκιμασίες που απαιτούσαν τον κατά προσέγγιση προσδιορισμό της τιμής ενός δεκαδικού αριθμού σε συγκεκριμένη θέση της αριθμογραμμής (Έργο PN) σε σχέση με τις δοκιμασίες εύρεσης της θέσης ενός δεκαδικού αριθμού πάνω στην αριθμογραμμή (Έργο NP). Τα παραπάνω ευρήματα διαφοροποιούνται από τα αποτελέσματα άλλων ερευνών που εξέταζαν τις εκτιμήσεις με κλάσματα σε αριθμογραμμή (Δεσλή & Τριανταφύλλου, 2022· Iuculano & Butterworth, 2011) αλλά και τις εκτιμήσεις με φυσικούς αριθμούς σε αριθμογραμμή (Slusser & Barth, 2017), στις οποίες οι επιδόσεις των παιδιών στα έργα NP ήταν καλύτερες, πιθανότατα γιατί τέτοιου είδους έργα συχνά αξιοποιούνται στα πλαίσια της διδασκαλίας των φυσικών αριθμών και των κλασμάτων. Ωστόσο, στην έρευνά τους οι Iuculano και Butterworth (2011) βρήκαν πως το είδος του έργου δεν επηρέασε σημαντικά την ικανότητα δεκάχρονων παιδιών να πραγματοποιούν εκτιμήσεις με δεκαδικούς αριθμούς σε αριθμογραμμή από το 0 έως το 1. Η διαφορά αυτή ανάμεσα στα ευρήματα της παρούσας εργασίας και των αποτελεσμάτων των Iuculano και Butterworth

(2011) αναφορικά με τις εκτιμήσεις με δεκαδικούς αριθμούς πιθανότατα έγκειται σε δύο λόγους, αφενός στο γεγονός ότι τα παιδιά στην παρούσα έρευνα είναι μεγαλύτερης ηλικίας και άρα περισσότερο εξοικειωμένα με τους δεκαδικούς αριθμούς και αφετέρου στο γεγονός ότι στην έρευνα των Iuculano και Butterworth (2011) οι δεκαδικοί αριθμοί που χρησιμοποιήθηκαν ήταν μικροί (μικρότεροι της μονάδας). Σε κάθε περίπτωση, το ζήτημα των διαφορετικών γνωστικών απαιτήσεων που τα δύο έργα εκτίμησης σε αριθμογραμμή θέτουν στα άτομα, όταν πραγματοποιούν εκτιμήσεις με δεκαδικούς αριθμούς, χρήζει περαιτέρω μελέτης.

Τρίτον, η παρουσία των σημείων αναφοράς στις αριθμογραμμές επηρέασε θετικά τις επιδόσεις των παιδιών. Όσα παιδιά εργάστηκαν με αριθμογραμμές που είχαν, πέρα από τα σημεία εκκίνησης και τέλους (0 και 5), επιπλέον σημεία αναφοράς σε κάθε τεταρτημόριο της αριθμογραμμής, πραγματοποίησαν περισσότερες επιτυχίες εκτιμήσεις (90%) συγκριτικά με τα παιδιά που είδαν αριθμογραμμές μόνο με το αρχικό και το τελικό άκρο χωρίς επιπλέον σημεία αναφοράς (71%). Το εύρημα αυτό μάλιστα βρέθηκε να ισχύει και για τις δύο ηλικιακές ομάδες αλλά και για τα δύο έργα εκτίμησης. Όπως επισημαίνουν οι Peeters et al. (2017), η χρήση των επιπλέον σημείων αναφοράς συμβάλλει ιδιαίτερα στην επιτυχία των εκτιμήσεων με φυσικούς αριθμούς σε αριθμογραμμή, γεγονός που τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας επιβεβαιώνουν και για τις εκτιμήσεις με δεκαδικούς αριθμούς. Η θετική επίδραση των πρόσθετων σημείων αναφοράς στην πραγματοποίηση εκτιμήσεων πάνω στην αριθμογραμμή ενδεχομένως εξηγείται από την άποψη ερευνητών (Barth & Paladino, 2011· Slusser & Barth, 2017) που υποστηρίζουν πως οι εκτιμήσεις σε αριθμογραμμή προϋποθέτουν τη γνώση αναλογικών σχέσεων, απαραίτητων για τη σύνδεση του αριθμητικού μεγέθους που ζητείται να εκτιμηθεί με τα σημεία εκκίνησης και τέλους της αριθμογραμμής και, κατ' επέκταση, με τα ενδιάμεσα σημεία αναφοράς. Επίσης, είναι πιθανόν να εξηγείται από τη μεγαλύτερη εξοικείωση των παιδιών με δραστηριότητες από τα σχολικά εγχειρίδια, στις οποίες παρουσιάζονται συχνά οι αριθμογραμμές με επιπλέον, περισσότερα των δύο, σημεία αναφοράς.

Το μέγεθος των αριθμών βρέθηκε, επίσης, να επηρεάζει τις εκτιμήσεις που πραγματοποιήθηκαν στην αριθμογραμμή. Ωστόσο, η επίδραση του μεγέθους των αριθμών εντοπίστηκε μόνο στα παιδιά της Ε' τάξης, η επίδοση των οποίων ήταν υψηλότερη στις δοκιμασίες εκτίμησης που περιείχαν δεκαδικούς αριθμούς μικρότερους της μονάδας συγκριτικά με τις δοκιμασίες που περιείχαν αριθμούς μεγαλύτερους της μονάδας. Για τα παιδιά της Στ' τάξης, όμως, το μέγεθος των αριθμών δεν αποτέλεσε σημαντικό παράγοντα για την επιτυχία στις εκτιμήσεις τους με δεκαδικούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή, καθώς η επίδοσή τους ήταν παρόμοια είτε το μέγεθος των αριθμών ήταν μικρότερο είτε ήταν μεγαλύτερο της μονάδας. Το εύρημα αυτό επιβεβαιώνει αντίστοιχο εύρημα των Siegler et al. (2011) οι οποίοι, όταν εξέτασαν την ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων για τη θέση κλασματικών αριθμών πάνω σε αριθμογραμμή σε μαθητές ηλικίας 11 και 13 ετών, βρήκαν ότι η επίδοση των εντεκάχρονων παιδιών ήταν υψηλότερη στις δοκιμασίες εκτίμησης που περιελάμβαναν κλασματικούς αριθμούς μικρότερους της μονάδας σε σχέση με τις δοκιμασίες εκτίμησης που περιελάμβαναν κλασματικούς αριθμούς μεγαλύτερους της μονάδας, ενώ η επίδοση των δεκατριάχρονων μαθητών ήταν υψηλή ανεξάρτητα από το μέγεθος των εμπλεκόμενων κλασματικών αριθμών. Έχει ενδιαφέρον επίσης να επισημανθεί ότι στην παρούσα εργασία οι εκτιμήσεις των παιδιών στις δοκιμασίες εύρεσης της τιμής ενός δεκαδικού αριθμού σε συγκεκριμένη θέση της αριθμογραμμής (Έργο PN) δεν επηρεάστηκε από το μέγεθος των αριθμών. Αντίθετα, στο πιο δύσκολο έργο, το έργο εύρεσης της θέσης ενός δεκαδικού αριθμού πάνω στην αριθμογραμμή (Έργο NP), η επιτυχία των εκτιμήσεων επηρεάστηκε από το μέγεθος των αριθμών, με τους μικρότερους της μονάδας δεκαδικούς αριθμούς να ευνοούν την επιτυχία.

Τέλος, τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν πως υπάρχει ισχυρή σχέση ανάμεσα στην ικανότητα πραγματοποίησης εκτιμήσεων με δεκαδικούς αριθμούς πάνω σε αριθμογραμμή και τις μαθηματικές ικανότητες. Πιο συγκεκριμένα, οι συμμετέχοντες που παρουσίασαν υψηλά ποσοστά επιτυχίας στο σύνολο των δοκιμασιών εκτίμησης έτειναν να παρουσιάζουν υψηλά ποσοστά και στις δοκιμασίες επίλυσης προβλήματος. Το εύρημα αυτό συνάδει με προηγούμενα ευρήματα (π.χ., Gunderson & Hildebrand, 2021· Schneider et al., 2018· Xing et al., 2021· Zhu et al., 2017), τα οποία ανέδειξαν τη σχέση ανάμεσα στις επιτυχίες εκτιμήσεις με φυσικούς και κλασματικούς αριθμούς πάνω σε αριθμογραμμή και την επιτυχία στα μαθηματικά. Αξίζει επίσης να επισημανθεί πως η ικανότητα πραγματοποίησης εκτίμησης με δεκαδικούς αριθμούς δεν βρέθηκε να σχετίζεται με την ικανότητα εκτέλεσης αριθμητικών πράξεων. Αυτό ενδεχομένως φανερώνει πως η εκτίμηση είναι μια διαδικασία που προϋποθέτει εννοιολογική κατανόηση και δεν πραγματοποιείται με διαδικαστικές πρακτικές, καθώς προέκυψε πως όσοι είναι καλοί λύτες προβλημάτων είναι και καλοί εκτιμητές, ενώ όσοι είναι καλοί στην εκτέλεση αριθμητικών πράξεων δεν είναι απαραίτητα και καλοί εκτιμητές. Με άλλα λόγια, η επιτυχής εκτέλεση τυποποιημένων αλγορίθμων δεν συνδέεται απαραίτητα με την ικανότητα πραγματοποίησης επιτυχών εκτιμήσεων πάνω σε αριθμογραμμή.

Είναι πιθανόν η βάση στη δυνατή σχέση ανάμεσα στην ικανότητα για εκτιμήσεις σε αριθμογραμμή και τις αριθμητικές και τις μαθηματικές ικανότητες να αποτελεί το γεγονός ότι οι αναπαραστάσεις των αριθμητικών μεγεθών είναι θεμελιώδεις και απαραίτητες για μεγάλο εύρος μαθηματικών ικανοτήτων (Δεσλή, 2021). Στην περίπτωση της εκτέλεσης υπολογισμών, για παράδειγμα, ενεργοποιούνται οι αναπαραστάσεις αριθμητικού μεγέθους. Προτού τα παιδιά είναι σε θέση να λύνουν αριθμητικά προβλήματα ανακαλώντας τα αποτελέσματα των αριθμητικών πράξεων, χρειάζεται αρχικά να κατανοήσουν τα αριθμητικά μεγέθη ως προς τις εμπλεκόμενες πράξεις (δηλαδή, για παράδειγμα, να κατανοήσουν τους όρους σε μία πρόσθεση) και στη συνέχεια να προχωρήσουν στον υπολογισμό και την εκτέλεση της αριθμητικής πράξης (π.χ., την πρόσθεση). Έτσι, όσο πιο ακριβείς είναι οι αναπαραστάσεις ενός αριθμητικού μεγέθους τόσο πιο επιτυχής είναι η χρήση τους στο πλαίσιο ενός υπολογισμού.

Τόσο η ικανότητα για εκτίμηση σε αριθμογραμμή όσο και η ικανότητα επίλυσης προβλήματος θεωρούνται πολύ σημαντικές, καθώς η μεν πρώτη μπορεί να βοηθήσει τα παιδιά να αναπτύξουν αναπαραστάσεις για τους αριθμούς (Fazio et al., 2016· Georges & Schiltz, 2021), ενώ η δεύτερη για να μάθουν τα παιδιά πώς να εφαρμόζουν τις μαθηματικές γνώσεις που αποκτούν στο σχολείο προκειμένου να λύνουν προβλήματα στην καθημερινή τους ζωή (De Corte et al., 2000). Η δυνατή σχέση των δύο, όπως αναδείχθηκε και στην παρούσα εργασία, εξηγεί το μεγάλο ενδιαφέρον των ερευνητών για την ανάπτυξη και την καλλιέργεια της ικανότητας για πραγματοποίηση εκτιμήσεων σε αριθμογραμμή αλλά και για την πραγματοποίηση εκτιμήσεων γενικότερα. Συνεπώς, αναδεικνύεται η ανάγκη για μεγαλύτερη ένταξη των εκτιμήσεων αριθμογραμμής στο σχολικό πρόγραμμα των μαθηματικών του δημοτικού σχολείου, προκειμένου να αναπτυχθεί η ικανότητα των παιδιών για εκτιμήσεις πριν από την εστίαση στους υπολογισμούς με ακρίβεια και τη διδασκαλία των αλγορίθμων.

Αναφορές

- Bailey, D.H., Siegler, R.S., & Geary, D.C. (2014). Early predictors of middle school fraction knowledge. *Developmental Science*, 17(5), 775-785.
- Barth, H.C., & Paladino, A.M. (2011). The development of numerical estimation: Evidence against a representational shift. *Developmental Science*, 14(1), 125-135.
- Booth, J.L., & Newton, K.J. (2012). Fractions: Could they really be the gatekeeper's domain? *Contemporary Educational Psychology*, 37(4), 247-253.

- Booth, J.L., & Siegler, R.S. (2006). Developmental and individual differences in pure numerical estimation. *Developmental Psychology, 42*(1), 189-201.
- Bryman, A. (2017). *Μέθοδοι κοινωνικής έρευνας* (Α. Αϊδίνης, Επιστ. επιμ.). Gutenberg.
- Cowan, R., & Powell, D. (2014). The contributions of domain-general and numerical factors to third-grade arithmetic skills and mathematical learning disability. *Journal of Educational Psychology, 106*(1), 214-229.
- Daker, R.J., & Lyons, I.M. (2018). Numerical and non-numerical predictors of first graders' number-line estimation ability. *Frontiers in Psychology, 9* (Article 2336).
- De Corte, E., Verschaffel, L., & Greer, B. (2000). Connecting mathematics problem solving to the real world. In *Proceedings of the International Conference on Mathematics Education into the 21st century: Mathematics for living* (pp. 66-73). Amman, Jordan: National Center for Human Resource Development.
- DeWolf, M., Bassok, M., & Holyoak, K.J. (2015). From rational numbers to algebra: Sparable contributions of decimal magnitude and relational understanding of fractions. *Journal of Experimental Psychology, 133*, 72-84.
- Dietrich, J.F., Huber, S., Dackermann, T., Moeller, K., & Fischer, U. (2016). Place-value understanding in number line estimation predicts future arithmetic performance. *British Journal of Developmental Psychology, 34*(4), 502-517.
- Δεσλή, Δ. (2021). *Οι εκτιμήσεις στη μαθηματική εκπαίδευση*. Gutenberg.
- Δεσλή, Δ., Τριανταφύλλου, Ε. (2022). Εκτιμήσεις πάνω σε αριθμογραμμή: Η περίπτωση των κλασμάτων και των δεκαδικών αριθμών. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών, 16*, 5-25.
- Fazio, L.K., Kennedy, C.A., & Siegler, R.S. (2016). Improving children's knowledge of fraction magnitudes. *PLoS One, 11*(10), e0165243.
- Friso-van den Bos, I., Kroesbergen, E.H., van Luit, J.E.H., Xenidou-Dervou, I., Jonkman, L.M., van der Schoot, M., & van Lieshout, E.C.D.M. (2015). Longitudinal development of number line estimation and mathematics performance in primary school children. *Journal of Experimental Psychology, 134*, 12-29.
- Fuchs, L.S., Geary, D., Compton, D.L., Fuchs, D., Hamlett, C.L., & Bryant, J.D. (2010). The contributions of numerosity and domain-general abilities to school readiness. *Child Development, 81*(5), 1520-1533.
- Georges, C., & Schiltz, C. (2021). Number line tasks and their relation to arithmetics in second to fourth graders. *Journal of Numerical Cognition, 7*(1), 20-41.
- Gunderson, E.A., & Hildebrand, L. (2021). Relations among spatial skills, number line estimation, and exact and approximate calculation in young children. *Journal of Experimental Child Psychology, 212* (Article 105251).
- Huber, S., Moeller, K., & Nuerk, H.-C. (2014). Dissociating number line estimations from underlying numerical representations. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology, 67*(5), 991-1003.
- Iuculano, T., & Butterworth, B. (2011). Understanding the real value of fractions and decimals. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology, 64*(11), 2088-2098.
- Link, T., Nuerk, H.-C., & Moeller, K. (2014). On the relation between the mental number line and arithmetic competencies. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology, 67*(8), 1597-1613.
- Ouyang, X., Yang, Y., Zhang, X., & Zhang, Q. (2021). Longitudinal relations between the approximate number system and symbolic number skills in preschool children. *Journal of Experimental Child Psychology, 212* (Article 105254).
- Patalano, A.L., Zax, A., Williams, K., Mathias, L., Cordes, S., & Barth, H. (2020). Intuitive symbolic magnitude judgments and decision making under risk in adults. *Cognitive Psychology, 118* (Article 101273).
- Peeters, D., Degrande, T., Ebersbach, M., Verschaffel, L., & Luwel, K. (2016). Children's use of number line estimation strategies. *European Journal of Psychology of Education, 31*(2), 117-134.
- Peeters, D., Sekeris, E., Verschaffel, L., & Luwel, K. (2017). Evaluating the effect of labeled benchmarks on children's number line estimation performance and strategy use. *Frontiers in Psychology, 8* (Article 1082).
- Schneider, M., Merz, S., Stricker, J., De Smedt, B., Torbeyns, J., Verschaffel, L., & Luwel, K. (2018). Associations of number line estimation with mathematical competence: A meta-analysis. *Child Development, 89*(5), 1467-1484.
- Sekeris, E., Verschaffel, L., & Luwel, K. (2019). Measurement, development, and stimulation of computational estimation abilities in kindergarten and primary education: A systematic literature review. *Educational Research Review, 27*(1), 1-14.
- Siegler, R.S., & Opfer, J.E. (2003). The development of numerical estimation: Evidence for multiple representations of numerical quantity. *Psychological Science, 14*(3), 237-243.
- Siegler, R.S., & Ramani, G.B. (2008). Playing linear numerical board games promotes low-income children's numerical development. *Developmental Science, 11*(5), 655-661.
- Siegler, R.S., Thompson, C.A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology, 62*(4), 273-296.
- Simms, V., Clayton, S., Cragg, L., Gilmore, C., & Johnson, S. (2016). Explaining the relationship between number line estimation and mathematical achievement: The role of visuomotor integration and visuospatial skills. *Journal of Experimental Psychology, 145*, 22-33.
- Slusser, E., & Barth, H. (2017). Intuitive proportion judgement in number-line estimation: Converging evidence from multiple tasks. *Journal of Experimental Child Psychology, 162*, 181-198.
- Torbeyns, J., Schneider, M., Xin, Z., & Siegler, R.S. (2015). Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents. *Learning and Instruction, 37*, 5-13.

- Xing, C., Zax, A., George, E., Taggart, J., Bass, I., & Barth, H. (2021). Numerical estimation strategies are correlated with math ability in school-aged children. *Cognitive Development, 60* (Article 101089).
- Zhu, M., Cai, D., & Leung, A. W. S. (2017). Number line estimation predicts mathematical skills: Difference in grades 2 and 4. *Frontiers in Psychology, 8* (Article 1576).

Αναφορά στο άρθρο ως: Δεσλή, Δ., Γρίβα, Σ. (2023). Εκτιμήσεις με δεκαδικούς αριθμούς πάνω σε αριθμογραμμή και η σχέση τους με τις μαθηματικές ικανότητες σε παιδιά Ε' και Στ' τάξης Δημοτικού. *Θέματα Επιστημών Αγωγής, 2(2)*, 1-16.

<https://ejournals.epublishing.ekt.gr/index.php/thea>