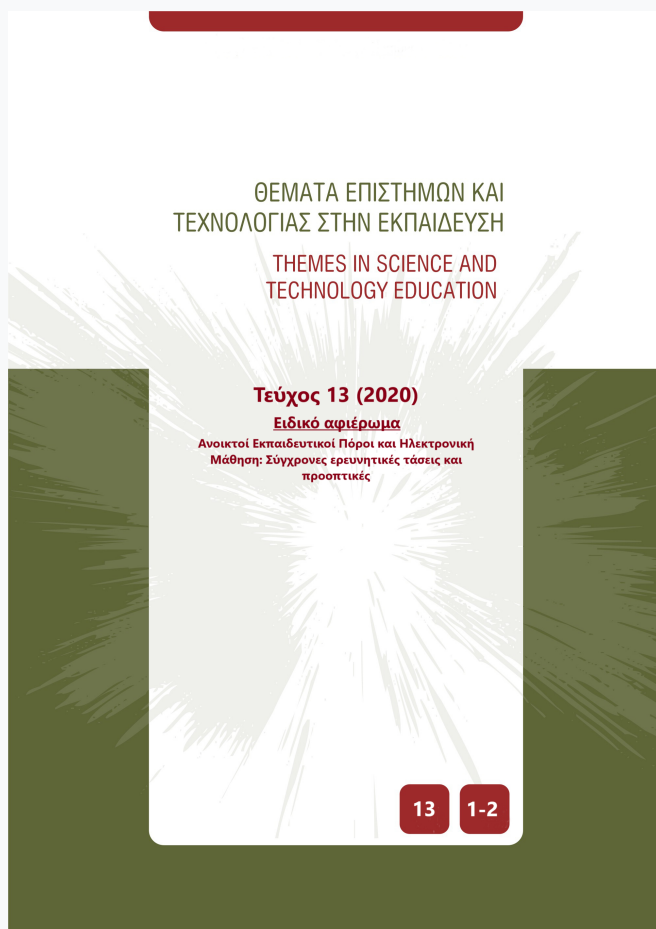


## Θέματα Επιστημών και Τεχνολογίας στην Εκπαίδευση

Τόμ. 13, Αρ. 1/2 (2020)

Ανοικτοί Εκπαιδευτικοί Πόροι και Ηλεκτρονική Μάθηση: Σύγχρονες ερευνητικές τάσεις και προοπτικές



**Σχεδιασμός και ανάπτυξη διαδικτυακής πλατφόρμας μάθησης και αναγνώρισης της συναισθηματικής κατάστασης μαθητή κατά την επίλυση προβλημάτων με κλάσματα**

*Δημήτριος Μαστοροδήμος, Αθανάσιος Τζιμογιάννης, Σάββας Χατζηχριστοφής*

doi: [10.12681/thete.39963](https://doi.org/10.12681/thete.39963)

### Βιβλιογραφική αναφορά:

Μαστοροδήμος Δ., Τζιμογιάννης Α., & Χατζηχριστοφής Σ. (2020). Σχεδιασμός και ανάπτυξη διαδικτυακής πλατφόρμας μάθησης και αναγνώρισης της συναισθηματικής κατάστασης μαθητή κατά την επίλυση προβλημάτων με κλάσματα. *Θέματα Επιστημών και Τεχνολογίας στην Εκπαίδευση*, 13(1/2), 7-32.  
<https://doi.org/10.12681/thete.39963>

# Σχεδιασμός και ανάπτυξη διαδικτυακής πλατφόρμας μάθησης και αναγνώρισης της συναισθηματικής κατάστασης μαθητή κατά την επίλυση προβλημάτων με κλάσματα

Δημήτριος Μαστοροδήμος<sup>1</sup>, Αθανάσιος Τζιμογιάννης<sup>2</sup>, Σάββας Α. Χατζηχριστοφής<sup>1</sup>  
d.mastorodimos@nup.ac.cy, ajimoyia@uop.gr, s.chatzichristofis@nup.ac.cy

<sup>1</sup> Τμήμα Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Νεάπολις Πάφου

<sup>2</sup> Τμήμα Κοινωνικής και Εκπαιδευτικής Πολιτικής, Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου

**Περίληψη.** Τις τελευταίες δεκαετίες έχει καταγραφεί μεγάλο ερευνητικό και εκπαιδευτικό ενδιαφέρον για την ανάπτυξη και εφαρμογή ψηφιακών εκπαιδευτικών περιβαλλόντων για τη διδασκαλία και τη μάθηση εννοιών των μαθηματικών. Ειδικότερα, η βιβλιογραφία δείχνει ότι οι μαθητές του δημοτικού σχολείου συναντούν πολλές δυσκολίες κατά την επίλυση προβλημάτων με κλάσματα, οι οποίες συχνά τους ακολουθούν και στις επόμενες εκπαιδευτικές βαθμίδες. Η μελέτη που παρουσιάζεται στην εργασία αυτή αφορά τον σχεδιασμό και την ανάπτυξη ενός ηλεκτρονικού περιβάλλοντος μάθησης για τη διδασκαλία των κλασμάτων, το οποίο αξιοποιεί την αναγνώριση συναισθημάτων του μαθητή κατά την επίλυση προβλημάτων με κλάσματα. Παρουσιάζεται αναλυτικά η μεθοδολογία ανάπτυξης του συγκεκριμένου περιβάλλοντος μάθησης, η οποία βασίστηκε α) στην επισκόπηση των ανοικτών συστημάτων και περιβαλλόντων μάθησης και β) στη μελέτη των απόψεων μιας ομάδας εστίασης εμπειρών εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης με στόχο την ανάδειξη σημαντικών παραγόντων σχεδιασμού μέσα από την πολύχρονη εμπειρία τους με την διδασκαλία των κλασμάτων. Γίνεται παρουσίαση της δομής και των λειτουργικών χαρακτηριστικών του διαδικτυακού συστήματος μάθησης και αναγνώρισης συναισθημάτων του μαθητή. Τέλος, συζητούνται μελλοντικοί σχεδιασμοί και προτάσεις που μπορούν να συμβάλουν στην ενίσχυση των μαθησιακών αποτελεσμάτων των μαθητών κατά την επίλυση προβλημάτων με κλάσματα.

**Λέξεις κλειδιά:** Ανοιχτά περιβάλλοντα μάθησης, διδασκαλία κλασμάτων, αναγνώριση συναισθημάτων

## Εισαγωγή

Τα Μαθηματικά είναι το γνωστικό αντικείμενο στο οποίο οι μαθητές συναντούν τις μεγαλύτερες δυσκολίες. Ο σημαντικότερος παράγοντας δυσκολιών στην κατανόηση των Μαθηματικών οφείλεται στις αφηρημένες έννοιες (abstractions) που πρέπει να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές για την επίλυση προβλημάτων (Ferrari, 2003· Hakim, Alghadari & Widodo, 2019). Συχνά οι δυσκολίες αυτές των μαθητών μετασχηματίζονται σε φόβο για τα Μαθηματικά που ονομάζεται αριθμοφοβία ή μαθηματικοφοβία (Φιλίππου & Χρίστου, 1998· Βούργιας & Χρυσοστόμου-Βούργιας, 2006). Μάλιστα η ανάπτυξη αρνητικών συναισθημάτων και στάσεων για το μάθημα των Μαθηματικών μπορεί να οδηγήσει σε καταστάσεις αποχής από τα Μαθηματικά, ακόμη και σε διαρροή των μαθητών από το σχολείο, σε κάποιες περιπτώσεις. Άλλες έρευνες έχουν δείξει ότι κατά την διάρκεια της διδασκαλίας των Μαθηματικών, οι μαθητές έχουν μια ανησυχία και αισθάνονται πως δεν θα πετύχουν (Reys et al., 2015). Επιπλέον, αυτό το άγχος που έχουν στα Μαθηματικά τους οδηγεί σε χαμηλές επιδόσεις (Zakaria & Nordin, 2008) ενώ φαίνεται ότι, όσο αυξάνεται το άγχος των μαθητών, μειώνονται οι επιδόσεις και το κίνητρο στα Μαθηματικά.

Η έννοια του κλάσματος αποτελεί μια από τις μεγαλύτερες δυσκολίες για τους μαθητές. Από την μελέτη της βιβλιογραφίας προκύπτει ότι τα κλάσματα αποτελούν ένα δύσκολο

αντικείμενο για τους μαθητές του δημοτικού (Boulet 1998· Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007· Davis et al., 1993· Kara & Incikabi, 2018· Sartono & Karso, 2020). Η ελλιπής κατανόηση των κλασμάτων δημιουργεί σοβαρά μακροπρόθεσμα προβλήματα στους μαθητές (Jordan et al., 2013). Η πράξη της διαίρεσης αποτελεί επίσης μια δύσκολη περιοχή των Μαθηματικών (Hasemann, 1981· Sartono & Karso, 2020) που αφορά πολλούς μαθητές (Chinnappan & Desplat, 2012). Επειδή τα κλάσματα αφορούν ουσιαστικά διαίρεση ακεραίων αριθμών, πολλές από τις δυσκολίες των μαθητών στη διαίρεση μεταφέρονται και στην εφαρμογή της στα κλάσματα.

Η έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών έχει προτείνει διάφορους εναλλακτικούς τρόπους και αναπαραστατικά αντικείμενα για τα κλάσματα (π.χ. κυκλικός δίσκος, παραλληλόγραμμο, αριθμογραμμή) σε σχέση με τους ακεραίους (αριθμογραμμή). Αυτό δημιουργεί πρόβλημα στους μαθητές, αφού χρειάζεται να μάθουν νέους αλγορίθμους σύμφωνα με την Southwell (όπως αναφ. στους Φιλίππου & Χρίστου, 2002, σελ. 321). Η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων για τα κλάσματα αποτελεί καθιερωμένη διδακτική στρατηγική (Kara & Incikabi, 2018· Rau, Alevén & Rummel, 2009· Tunç-Pekkan, 2015· Wyberg et al., 2012). Στην πράξη γίνεται τόσο με τη χρήση φυσικών χειριστηρίων (physical manipulatives), όσο και με την χρήση εικονικών χειριστηρίων (virtual manipulatives). Η δυναμική ανάπτυξη των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και των Επικοινωνιών (ΤΠΕ) οδήγησε, τα τελευταία χρόνια, στη δημιουργία ψηφιακών εκπαιδευτικών περιβαλλόντων, εκπαιδευτικών λογισμικών και ψηφιακών εργαλείων για τη διδασκαλία και την μάθηση εννοιών στα Μαθηματικά, όπως τα Fractions Tutor (Rau, Alevén & Rummel, 2013), Fractions Lab (Grawemeyer et al., 2015b), EjsS για τη δημιουργία προσομοιώσεων (Dormido et al., 2005) κ.α.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να παρουσιάσει το πλαίσιο σχεδίασης και ανάπτυξης του διαδικτυακού περιβάλλοντος μάθησης για τα κλάσματα SKAFOS (Student's Knowledge and Affective level for Fractions in an Open System), το οποίο αξιοποιεί την αναγνώριση συναισθημάτων του μαθητή κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων με κλάσματα. Παρουσιάζεται αναλυτικά η μεθοδολογία ανάπτυξης του συγκεκριμένου περιβάλλοντος μάθησης, η οποία βασίστηκε: α) στην επισκόπηση των ανοιχτών συστημάτων και περιβαλλόντων μάθησης και β) στη μελέτη των απόψεων μιας ομάδας εστίασης έμπειρων εκπαιδευτικών Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης με στόχο την ανάδειξη σημαντικών παραγόντων σχεδιασμού μέσα από την πολύχρονη εμπειρία τους με τη διδασκαλία των κλασμάτων.

Τα περισσότερα ανοιχτά συστήματα και περιβάλλοντα μάθησης που εμφανίζονται στην βιβλιογραφία και αφορούν τα κλάσματα φαίνεται να περιορίζονται στην παροχή πολλαπλών αναπαραστάσεων για την προώθηση της γνωστικής εμπλοκής του μαθητή, ενώ δεν παρέχουν ανατροφοδότηση στον εκπαιδευτικό που αφορούν την γνωστική και μαθησιακή πορεία του μαθητή για το αντικείμενο, έτσι ώστε να μπορέσει να βοηθήσει κατάλληλα τον μαθητή. Από την άλλη, όσα συστήματα για κλάσματα παρέχουν ανατροφοδότηση βασίζονται σε διαλόγους με οδηγίες προς το μαθητή, χωρίς την αναγνώριση της τρέχουσας συναισθηματικής κατάστασης του η οποία είναι πολλές φορές καθοριστική για την ολοκλήρωση μιας μαθησιακής δραστηριότητας. Η βιβλιογραφία δείχνει ότι η αναγνώριση συναισθημάτων είναι πολύ σημαντική για το σχεδιασμό της μαθησιακής υποστήριξης του μαθητή, αφού τα συναισθήματα μπορεί να έχουν επίδραση στα μαθησιακά επιτεύγματα (Pekrun, 1992· Pekrun et al., 2011· Trigwell, Ellis & Han, 2012· Postareff et al., 2017· Asikainen, Hailikari & Mattsson, 2018· Perander et al., 2020). Για το λόγο αυτό, το προτεινόμενο σύστημα για τα κλάσματα περιλαμβάνει ένα Συνελκτικό Νευρωνικό Δίκτυο (Convolutional Neural Network - CNN) που έχει ως στόχο να αναγνωρίσει την συναισθηματική κατάσταση των μαθητών κατά την επίλυση προβλημάτων με κλάσματα, αλλά και να αποτυπώνει πληροφορίες για την στάση των μαθητών απέναντι σε κάποιες αναπαραστάσεις κλασμάτων (π.χ. κείμενο, πίτα, αριθμογραμμή). Η πρωτοτυπία του προτεινόμενου συστήματος είναι να αναγνωρίζει τη

διάθεση του μαθητή, κατά την διάρκεια επίλυσης ασκήσεων με κλάσματα, στοιχείο που μπορεί στη συνέχεια να αξιοποιηθεί ο εκπαιδευτικός, σε συνδυασμό με άλλα εργαλεία, ώστε να βοηθήσει κάθε μαθητή με εναλλακτικούς τρόπους.

Η εργασία διαρθρώνεται ως εξής: Αρχικά παρουσιάζεται η βιβλιογραφική επισκόπηση ανοιχτών συστημάτων για κλάσματα. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα κύρια ευρήματα μιας έρευνας που πραγματοποιήθηκε μέσω ομάδας εστίασης εκπαιδευτικών για τις διδακτικές πρακτικές, τις απόψεις και τις προτάσεις τους για τη διδασκαλία των κλασμάτων. Ακολουθεί ο σχεδιασμός του ηλεκτρονικού περιβάλλοντος μάθησης για τα κλάσματα, που αξιοποίησε τόσο τη βιβλιογραφία όσο και στοιχεία της έρευνας ομάδας εστίασης. Αναλύεται ο σχεδιασμός, τα βήματα και η αρχιτεκτονική κάθε βασικού τμήματος του νέου συστήματος. Ακολουθεί η παρουσίαση των βασικών τμημάτων και χαρακτηριστικών οθονών του συστήματος. Τέλος, παρουσιάζονται τα συμπεράσματα και οι μελλοντικές κατευθύνσεις της έρευνας.

## **Επισκόπηση ανοιχτών συστημάτων για τη διδασκαλία των κλασμάτων**

Για τον εντοπισμό ψηφιακών συστημάτων και πλατφορμών σχετικά με την διδασκαλία των κλασμάτων έγινε αναζήτηση στις ηλεκτρονικές βάσεις δεδομένων (Scopus, Google Scholar) αλλά και στις διαδικτυακές μηχανές αναζήτησης (Google Search, Bing). Ακολούθως, η έρευνα περιορίστηκε στα συστήματα που έχουν σχεδιαστεί αποκλειστικά για διδασκαλία και εξάσκηση στα κλάσματα ενώ ταυτόχρονα υπήρχε βιβλιογραφική τεκμηρίωση και αναφορά γι' αυτά. Εντοπίστηκαν συστήματα που είναι αυτόνομες εφαρμογές που εκτελούνται τοπικά στον υπολογιστή, ή διαδικτυακές εφαρμογές.

Από την αναζήτηση προέκυψαν τέσσερα ανοιχτά συστήματα για τη διδασκαλία των κλασμάτων: α) Fractions Lab, β) Fractions Tutor, γ) Physics Education Technology (PhET) και δ) WolframAlpha. Τα δύο πρώτα είναι συστήματα που έχουν αναπτυχθεί μόνο για τα κλάσματα, ενώ τα άλλα δύο υποστηρίζουν επίσης και άλλες ενότητες των Μαθηματικών, καθώς και εφαρμογές των Φυσικών Επιστημών και της Τεχνολογίας. Στα συστήματα αυτά προστέθηκε και το Φωτόδεντρο, το Αποθετήριο Εκπαιδευτικού Περιεχομένου του Υπουργείου Παιδείας και Θρησκευμάτων της Ελλάδας, που περιλαμβάνει πλούσιο υλικό για διάφορα επιστημονικά πεδία και για τα Μαθηματικά. Από αυτό μελετήθηκαν Μαθησιακά Αντικείμενα (MA) για την ενότητα των κλασμάτων.

Στις παρακάτω ενότητες παρουσιάζονται τα βασικά χαρακτηριστικά και οι δυνατότητες κάθε εκπαιδευτικού λογισμικού και συστήματος για την διδασκαλία των κλασμάτων. Για την αξιολόγησή των συστημάτων αυτών χρησιμοποιήθηκαν πέντε κριτήρια (Περιεχόμενο, Παιδαγωγικός σχεδιασμός, Διαδραστικότητα, Τεχνικός σχεδιασμός, Εκπαιδευτική χρήση) και οι συναφείς με αυτά παράγοντες (Τζιμογιάννης, 2019). Τα κριτήρια αυτά έχουν προταθεί, με βάση τη βιβλιογραφία, για τη δημιουργία ενός πλαισίου αξιολόγησης μαθησιακών αντικειμένων και παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.

### **Fractions Lab**

Το Fractions Lab (2019) είναι ένα διαδικτυακό περιβάλλον μάθησης για τα κλάσματα που φιλοξενείται που αναπτύχθηκε από μια σύμπραξη ακαδημαϊκών ιδρυμάτων και ιδιωτικών φορέων στο πλαίσιο ενός ευρωπαϊκού έργου FP7 με τίτλο iTalk2Learn (Holmes et al., 2015). Πρόκειται για πλήρως διαδικτυακή εφαρμογή, η οποία εκτελείται σε οποιοδήποτε φυλλομετρητή, δεν απαιτεί εγκατάσταση ενώ διαθέτει δυνατότητα ομιλίας. Είναι ένα περιβάλλον με διεπιστημονικά χαρακτηριστικά, καθώς συγκεντρώνει εμπειρογνωμοσύνη από τη μηχανική μάθηση, τη μοντελοποίηση χρηστών, τα ευφυή συστήματα διδασκαλίας, την

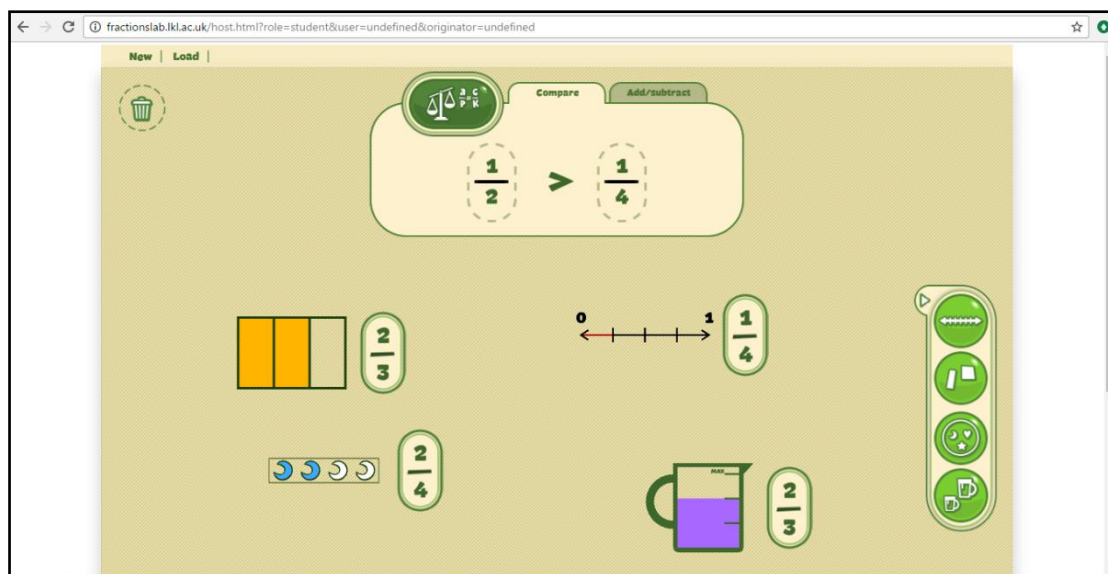
επεξεργασία φυσικής γλώσσας, την εκπαιδευτική ψυχολογία και τη διδακτική των μαθηματικών.

Στο Σχήμα 1 παρουσιάζεται μία οθόνη του περιβάλλοντος Fractions Lab όπου φαίνονται τα εργαλεία και οι αναπαραστάσεις που διαθέτει. Το περιβάλλον υποστηρίζει τη σύγκριση, την πρόσθεση και την αφαίρεση δύο κλασμάτων. Ο μαθητής έχει στη διάθεσή του για πειραματισμό και εξάσκηση τέσσερις αναπαραστάσεις: αριθμογραμμή, ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, σύνολα αντικειμένων και μέτρηση υγρών (Holmes et al., 2015).

Για παράδειγμα, για να συγκρίνει ένας μαθητής δύο κλάσματα, το  $1/2$  και το  $1/4$ , αρχικά κατασκευάζει τα δύο κλάσματα επιλέγοντας όποιον τύπο αναπαράστασης θέλει από τους τέσσερις διαθέσιμους. Στη συνέχεια μεταφέρει στο πάνω μέρος της οθόνης της εφαρμογής, στο χώρο της σύγκρισης, τα δύο κλάσματα με την κίνηση σύρω-αφήνω. Τότε αυτόματα εμφανίζεται ο τελεστής σύγκρισης (μικρότερο, μεγαλύτερο ή ίσο) και δείχνεται η σχέση μεταξύ των δύο κλασμάτων ( $1/2 > 1/4$ ), όπως στο Σχήμα 1.

**Πίνακας 1. Πλαίσιο αξιολόγησης μαθησιακών αντικειμένων**

<b>Κριτήρια</b>	<b>Παράγοντες</b>
Περιεχόμενο	Ακρίβεια-ποιότητα πληροφοριών Ισορροπία-όγκος πληροφοριών Έμφαση σε σημαντικές έννοιες Χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων Πολυτροπική δομή, πολυμέσα
Παιδαγωγικός σχεδιασμός	Σύνδεση με τους μαθησιακούς στόχους του Προγράμματος Σπουδών Παιδαγωγική φιλοσοφία Διαφορετικές στρατηγικές χρήσης Δυνατότητες πολλαπλών χρήσεων Αναμενόμενα οφέλη για τους μαθητές σε σχέση με άλλα μέσα
Διαδραστικότητα	Έλεγχος χρήστη (οδηγίες) Υποστήριξη χρήστη, ανατροφοδότηση ενεργειών Προσαρμοσμένο περιεχόμενο Μοντελοποίηση δράσεων χρήστη
Τεχνικός σχεδιασμός	Ευχρηστία, ευκολία χρήσης Πλοήγηση-προσανατολισμός Ποιότητα γραφικών Γενικότερη αισθητική Τεχνικά θέματα ή προβλήματα εκτέλεσης
Εκπαιδευτική χρήση	Κίνητρο μάθησης Βαθμός ενεργού συμμετοχής μαθητών Μαθησιακά αποτελέσματα Προστιθέμενη αξία σε σχέση με άλλα μέσα



Σχήμα 1. Στιγμιότυπο με τις αναπαραστάσεις που διαθέτει το Fractions Lab

Η διαδικτυακή πλατφόρμα Fractions Lab πληροί τα περισσότερα κριτήρια αξιολόγησης που αναφέρονται στον Πίνακα 1. Συγκεκριμένα:

**Περιεχόμενο:** Το περιβάλλον χρησιμοποιεί πολλαπλές αναπαραστάσεις των κλασμάτων (ορθογώνιο, αριθμογραμμή, σύνολα, βαθμονομημένο δοχείο) και πολυτροπική δομή. Η δημιουργία ενός κλάσματος γίνεται από τον μαθητή χρησιμοποιώντας τα βέλη επάνω/κάτω. Για παράδειγμα το  $\frac{2}{3}$  θα σχηματιστεί ένα παραλληλόγραμμο χωρισμένο σε τρία ίσα μέρη και τα δύο του είναι χρωματισμένα πορτοκαλί, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Επιπλέον έχει ισορροπία στον όγκο των πληροφοριών, αφού δεν έχει περιττά στοιχεία πέραν των οδηγιών που εμφανίζονται στο κάτω μέρος της οθόνης σε ένα πλαίσιο. Το Fractions Lab υποστηρίζει τρεις από τις σημαντικότερες πράξεις των κλασμάτων: την σύγκριση, την πρόσθεση και την αφαίρεση.

**Παιδαγωγικός σχεδιασμός:** Υπάρχει σύνδεση με τους μαθησιακούς στόχους του Προγράμματος Σπουδών, δεδομένου ότι οι τρεις πράξεις που προσφέρει η εφαρμογή είναι στην ύλη του δημοτικού. Φαίνεται να χρησιμοποιείται η διερευνητική μέθοδος αφού δίνεται η δυνατότητα να πειραματιστεί ο μαθητής μέχρι να αποκτήσει την απαραίτητη γνώση. Επίσης παρέχει διαφορετικές στρατηγικές χρήσης, αφού μπορεί η εφαρμογή να χρησιμοποιηθεί ως εργαλείο εξάσκησης και διδασκαλίας των κλασμάτων. Τα αναμενόμενα οφέλη για τους μαθητές σε σχέση με άλλα μέσα είναι ότι αναπτύσσει την κριτική σκέψη μέσα από την διερευνητική μέθοδο, ενώ παρέχει δυνατότητα δυναμικής οπτικοποίησης ενός κλάσματος με πολλαπλές αναπαραστάσεις.

**Διαδραστικότητα:** Υπάρχει έλεγχος του χρήστη, αφού μπορεί να κατασκευάσει τα κλάσματα που επιθυμεί με δυναμικό τρόπο και επιπλέον παρέχεται υποστήριξη με οδηγίες στο κάτω μέρος της οθόνης για την σωστή χρήση της εφαρμογής. Μάλιστα μπορεί ο μαθητής να εξερευνήσει τις τέσσερις αναπαραστάσεις που προσφέρει και να τις χειριστεί ανάλογα το πρόβλημα που καλείται να επιλύσει (αλλαγή, σύγκριση πρόσθεση ή αφαίρεση) (Holmes et al., 2015). Επίσης το σύστημα παρέχει ανατροφοδότηση (Grawemeyer et al., 2015a) σύμφωνα με την συναισθηματική κατάσταση του μαθητή, η οποία αναγνωρίζεται από τη φωνή του μαθητή και την αλληλεπίδρασή του με το περιβάλλον μάθησης (Grawemeyer et al., 2017).

**Τεχνικός σχεδιασμός:** Η εφαρμογή είναι εύχρηστη, χωρίς ιδιαίτερες δυσκολίες και έχει εύκολη πλοήγηση ανάμεσα στις δύο βασικές καρτέλες (σύγκριση, πρόσθεση/αφαίρεση), αλλά και στα αντικείμενα της οθόνης. Η ποιότητα των γραφικών είναι πολύ καλή και γενικότερα

έχει μια πολύ καλή αισθητική, κατάλληλη για την συγκεκριμένη ηλικία. Υπάρχουν όμως μερικά τεχνικά ζητήματα, όσον αφορά την εκτέλεση της εφαρμογής, που έχουν να κάνουν με τις συνεχόμενες αναβαθμίσεις των συστατικών της εφαρμογής που δεν υποστηρίζονται πλήρως από τους φυλλομετρητές, επειδή η εφαρμογή έχει αναπτυχθεί χρησιμοποιώντας τεχνολογίες όπως Java, Javascript, Flash.

**Εκπαιδευτική χρήση:** Η εφαρμογή είναι ευχάριστη και αποτελεί κίνητρο μάθησης για τους μαθητές. Μάλιστα το γεγονός ότι προσφέρει τέσσερις διαφορετικές αναπαραστάσεις των κλασμάτων της δίνει την προστιθέμενη αξία σε σχέση με άλλα μέσα.

### Fractions Tutor

Το Mathtutor είναι ένα διαδικτυακό διαδραστικό σύστημα για τα Μαθηματικά, το οποίο αναπτύχθηκε από ακαδημαϊκά ιδρύματα στις ΗΠΑ. Ενσωματώνει το Fractions Tutor (Mathtutor, 2019), μια ξεχωριστή πλατφόρμα μόνο για κλάσματα, η οποία αναβαθμίζεται συστηματικά (τελευταία αναβάθμιση έγινε τον Δεκέμβριο του 2019). Η εφαρμογή παρέχει τη δυνατότητα στους μαθητές να αλληλεπιδράσουν με το περιβάλλον της, να κάνουν δοκιμές και να ελέγξουν λάθη, να ζητήσουν βοήθεια από το σύστημα και να δουν τη λύση στα προβλήματά τους.

Ο μαθητής έχει τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσει το Fractions Tutor είτε ελεύθερα είτε μέσω κωδικού, ώστε να μπορεί να παρακολουθήσει ο εκπαιδευτικός την πρόοδό του. Η ενότητα της σύγκρισης κλασμάτων περιλαμβάνει ένα σύνολο δέκα δραστηριοτήτων: ονομασία κλασμάτων, κατασκευή κλασμάτων, ανακατασκευή μονάδας, ονομασία, ονομασία καταχρηστικών κλασμάτων, κατασκευή καταχρηστικών κλασμάτων, εννοιολογική ισοδυναμία κλασμάτων, διαδικασία ισοδυναμίας κλασμάτων, σύγκριση κλασμάτων, πρόσθεση κλασμάτων και αφαίρεση κλασμάτων. Στο Σχήμα 2 παρουσιάζεται μια οθόνη δραστηριότητας με τρεις ενότητες που αφορά τη σύγκριση κλασμάτων. Στην πρώτη ενότητα υπάρχουν τρεις ερωτήσεις και ο μαθητής καλείται να απαντήσει με διαδραστικό τρόπο. Μάλιστα υπάρχει καθοδήγηση για τις ενέργειες του μαθητή και για να εμφανιστεί η επόμενη ερώτηση πρέπει να απαντηθεί σωστά η προηγούμενη.

The screenshot shows the Fractions Tutor interface. The main content area is titled "Fraction Comparison" and is divided into two parts, A and B. Part A is titled "Let's use benchmarks to compare two fractions!" and shows two rectangles representing  $\frac{1}{5}$  and  $\frac{2}{3}$ . Below the rectangles, there is a question: "Are they equivalent?" with a dropdown menu showing "no". Part B is titled "What did we learn about comparing fractions?" and shows three steps: 1.  $\frac{2}{3}$  is larger than  $\frac{1}{2}$ . 2.  $\frac{1}{5}$  is smaller than  $\frac{1}{2}$ . 3. Therefore,  $\frac{1}{5}$  is smaller than  $\frac{2}{3}$ . A "Wonderful!" message is displayed in a blue box with a starburst. The interface also includes a "Hint" button and a "continue" button. The bottom of the screen shows the Mathtutor version and copyright information.

Σχήμα 2. Στιγμιότυπο με την ολοκλήρωση της πρώτης άσκησης στην σύγκριση κλασμάτων

Στη δεύτερη ενότητα ο μαθητής έχει πάλι τρεις ερωτήσεις και γράφει στο συγκεκριμένο πλαίσιο ή επιλέγει από λίστα κάθε φορά την απάντησή του. Και σε αυτή την ενότητα υπάρχει καθοδήγηση και για να εμφανιστεί μια ερώτηση πρέπει να έχει απαντηθεί σωστά η προηγούμενη. Στην τρίτη ενότητα εμφανίζονται οδηγίες, συμβουλές και μηνύματα επιβράβευσης.

Η ανάλυση της διαδικτυακής εφαρμογής Fractions Tutor σε σχέση με τα κριτήρια του Πίνακα 1 έχει ως εξής:

**Περιεχόμενο:** Έχει ακρίβεια πληροφοριών και η δημιουργία ενός κλάσματος εμφανίζεται με την σωστή μορφή. Υπάρχει ισορροπία στον όγκο πληροφοριών και κάθε φορά για να εμφανιστεί το επόμενο βήμα ολοκληρώνεται πρώτα το προηγούμενο και έτσι ο μαθητής δεν βλέπει περιττές πληροφορίες. Παρέχεται η δυνατότητα στο μαθητή να επιλέξει προβλήματα για την κλασματική μονάδα, τη σύγκριση, την πρόσθεση και την αφαίρεση κλασμάτων. Επιπλέον κάνει χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων για τα κλάσματα όπως η αριθμογραμμή και μοντέλα επιφάνειας (κυκλικός δίσκος, ορθογώνιο παραλληλόγραμμο). Επίσης έχει πολυτροπική δομή με χρήση πολυμέσων, αφού εμφανίζει ένα κλάσμα τόσο με κείμενο όσο και με διαδραστική γραφική αναπαράσταση.

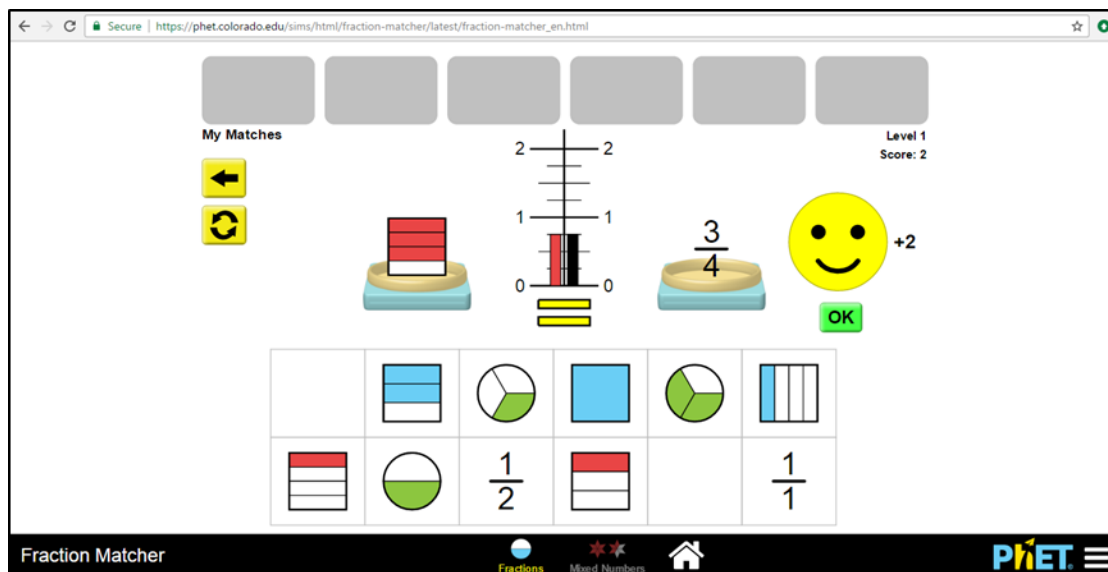
**Παιδαγωγικός σχεδιασμός:** Υπάρχει σύνδεση με τους μαθησιακούς στόχους του Προγράμματος Σπουδών, δεδομένου ότι πράξεις που προσφέρει η εφαρμογή είναι στην ύλη του δημοτικού. Η παιδαγωγική μέθοδος που ακολουθεί είναι η ανακαλυπτική μέθοδος, αφού μέσα από μια σειρά βημάτων προσπαθεί ο μαθητής να ανακαλύψει την σύγκριση δύο κλασμάτων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2. Επιπλέον παρέχει διαφορετικές στρατηγικές χρήσης, για διδασκαλία και εξάσκηση των κλασμάτων. Επιπρόσθετα παρέχει δυνατότητες πολλαπλών χρήσεων, τόσο για χρήση του προγράμματος χωρίς σύνδεση όσο και για σύνδεση ώστε να μπορεί να παρακολουθεί ο εκπαιδευτικός την εξέλιξη του μαθητή στα κλάσματα. Τα αναμενόμενα οφέλη για τον μαθητή βασίζονται στη δυνατότητα δραστηριοτήτων διαφορετικού επιπέδου δυσκολίας και πολλαπλών αναπαραστάσεων.

**Διαδραστικότητα:** Υπάρχει έλεγχος του χρήστη, αφού μπορεί να κατασκευάσει τα κλάσματα που επιθυμεί με δυναμικό τρόπο. Επίσης παρέχεται υποστήριξη στο μαθητή με οδηγίες για τη σωστή χρήση της εφαρμογής. Υπάρχει διαβάθμιση δυσκολίας στο περιεχόμενο για τους μαθητές, με την έννοια ότι εάν δεν ολοκληρώσουν για παράδειγμα την πρώτη δραστηριότητα (όπως φαίνεται στο Σχήμα 2) τότε δεν μπορούν να πάνε στην δεύτερη. Επιπλέον παρέχεται μοντελοποίηση δράσεων χρήστη, αλλά θα πρέπει να συνδεθεί ο μαθητής στην εφαρμογή με τους κωδικούς του.

**Τεχνικός σχεδιασμός:** Η εφαρμογή είναι εύχρηστη, χωρίς δυσκολίες στην πλοήγηση. Η ποιότητα των γραφικών είναι αρκετά καλή, όμως η αναπαράσταση των κλασμάτων χρειάζεται να είναι μεγαλύτερη σε μέγεθος. Η γενικότερη αισθητική της εφαρμογής είναι κατάλληλη για τους μαθητές που απευθύνεται. Το μόνο τεχνικό πρόβλημα που εντοπίσαμε είναι ότι το Mathtutor είναι κατασκευασμένο με την πλατφόρμα Adobe Flash, η οποία αναμένεται να σταματήσει να υποστηρίζεται μετά το τέλος του 2020.

**Εκπαιδευτική χρήση:** Η συγκεκριμένη εφαρμογή είναι ευχάριστη και αναμένεται να προωθεί το κίνητρο μάθησης των μαθητών. Η προστιθέμενη αξία της είναι ότι υποστηρίζει διαφοροποιημένη μάθηση (διαφορετικά είδη και βαθμός δυσκολίας ασκήσεων για την κατανόηση της ίδιας έννοιας) και ο κάθε μαθητής μπορεί να επιλέξει αυτό στο οποίο μπορεί να ανταποκριθεί καλύτερα. Επιπλέον η δυνατότητα παρακολούθησης της προόδου του μαθητή από τον εκπαιδευτικό είναι ένα ακόμα πλεονέκτημα της εφαρμογής.





Σχήμα 3. Στιγμιότυπο της εφαρμογής Fraction Matcher του PhET

### PhET

Το PhET (2019), ακρωνύμιο του Physics Education Technology, είναι ένα αποθετήριο εκπαιδευτικού υλικού που περιλαμβάνει αυτόνομες διαδραστικές εκπαιδευτικές προσομοιώσεις για έννοιες των Φυσικών Επιστημών και των Μαθηματικών, οι οποίες διατίθενται ελεύθερα. Η ανάπτυξη του ξεκίνησε το 2002 από τον Carl Edwin Wieman στο Πανεπιστήμιο Colorado Boulder. Σήμερα περιλαμβάνει ένα μεγάλο αριθμό διαδραστικών εκπαιδευτικών προσομοιώσεων σε Java, Flash ή HTML 5. Στο αποθετήριο PhET υπάρχει συνεχής αναβάθμιση και προσθήκη νέων αντικειμένων. Για τα Μαθηματικά υπάρχουν 42 διαδραστικές προσομοιώσεις και για τα κλάσματα υπάρχουν πέντε εφαρμογές: «Build a Fraction», «Fractions: Intro», «Fractions: Equality», «Fractions: Mixed Numbers» και «Fraction Matcher».

Μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή για τη σύγκριση κλασμάτων είναι το «Fraction Matcher», η οποία διαθέτει οκτώ επίπεδα δυσκολίας με διαφορετικές αναπαραστάσεις ανά επίπεδο. Επίσης διαθέτει επιλογή ενεργοποίησης χρόνου, ήχου, δυνατότητα επανάληψης των ασκήσεων και αποτελέσματος σωστών απαντήσεων. Στο αποθετήριο υπάρχουν γενικές πληροφορίες για την προσομοίωση αλλά δεν διατίθενται οδηγίες για την εκπαιδευτική αξιοποίηση ή συμβουλές κατά την εκτέλεση των ασκήσεων από τους μαθητές. Στο Σχήμα 3 παρουσιάζεται μια οθόνη με το πρώτο επίπεδο της εφαρμογής, στην έκδοση HTML5.

Βάζοντας δύο αντικείμενα στις δύο ζυγαριές μπορεί να πραγματοποιήσει την σύγκριση. Εάν ήταν ίσα τότε προσθέτει δύο βαθμούς στη βαθμολογία στη συγκεκριμένη άσκηση, εάν όχι τότε η εφαρμογή του δίνει την δυνατότητα να δει την σωστή απάντηση. Υπάρχει δυνατότητα επιστροφής στο αρχικό μενού ή συνέχισης των ασκήσεων μέχρι και το όγδοο επίπεδο. Όταν ολοκληρώνεται κάθε επίπεδο ο μαθητής επιβραβεύεται με επευφημίες και σχήματα με κίνηση, γεγονός που δημιουργεί καλό κλίμα για τον μαθητή να συνεχίσει στο επόμενο επίπεδο.

Στο διαδικτυακό αποθετήριο PhET, οι εφαρμογές που αναφέρονται στα κλάσματα, πληρούν πολλά από τα κριτήρια αξιολόγησης που αναφέρονται στον Πίνακα 1. Συγκεκριμένα:

**Περιεχόμενο:** Έχει ακρίβεια πληροφοριών και η δημιουργία των αντικειμένων που αναπαριστούν τα κλάσματα εμφανίζονται με τη σωστή μορφή. Υπάρχει ισορροπία στον όγκο πληροφοριών και επιλογή στο βαθμό δυσκολίας. Οι προσομοιώσεις που παρέχονται αφορούν στη δημιουργία και κατανόηση της κλασματικής μονάδας και της σύγκρισης κλασμάτων. Τα κλάσματα εμφανίζονται με πολλαπλές αναπαραστάσεις (αριθμογραμμή, κυκλικός δίσκος,

ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και διάφορα άλλα σχήματα). Επιπλέον έχει πολυτροπική δομή με χρήση πολυμέσων, αφού εμφανίζει ένα κλάσμα τόσο με κείμενο όσο και με γραφική αναπαράσταση.

**Παιδαγωγικός σχεδιασμός:** Υπάρχει σύνδεση με τους μαθησιακούς στόχους του Προγράμματος Σπουδών, δεδομένου ότι πράξεις που προσφέρονται είναι στην ύλη του δημοτικού. Παρέχει προσομοιώσεις που μπορεί να αποτελέσουν εργαλεία για την διδασκαλία, αλλά και εξάσκηση των μαθητών στα κλάσματα. Τα αναμενόμενα οφέλη είναι αρκετά για τον μαθητή, αφού παρέχονται πολλές ασκήσεις σε διαφορετικά επίπεδα, με πολλαπλές αναπαραστάσεις για την κατανόηση βασικών εννοιών των κλασμάτων.

**Διαδραστικότητα:** Υπάρχει έλεγχος του χρήστη, αφού μπορεί να εκτελέσει όποια προσομοίωση επιθυμεί, να επιλέξει ανάμεσα από πολλά επίπεδα δυσκολίας των ασκήσεων και να ρυθμίσει όπως θέλει την εφαρμογή (ήχο, χρόνο, επίπεδο δυσκολίας). Υπάρχει περιορισμένη ανατροφοδότηση με τον μαθητή, αφού δεν παρέχονται οδηγίες ή συμβουλές για την καλύτερη κατανόηση των εννοιών που εξετάζονται. Υπάρχει μόνο στο τέλος κάθε προσομοίωσης η επιβράβευση εάν ο μαθητής έχει ολοκληρώσει σωστά την συγκεκριμένη άσκηση. Το περιεχόμενο είναι προσαρμοσμένο και δεν υπάρχει μοντελοποίηση δράσεων χρήστη.

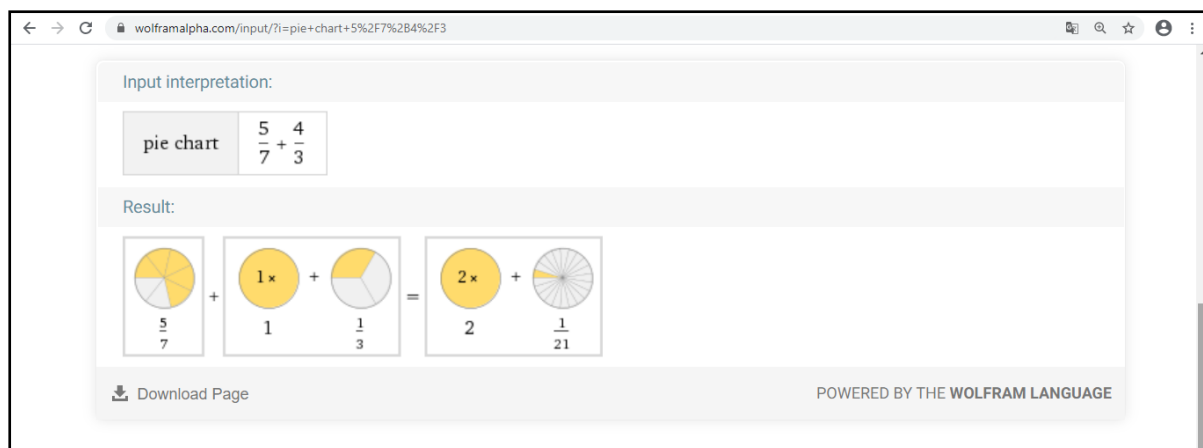
**Τεχνικός σχεδιασμός:** Οι προσομοιώσεις που διατίθενται είναι εύχρηστες, χωρίς δυσκολίες με εύκολη πλοήγηση. Η ποιότητα των γραφικών είναι πολύ καλή και η γενικότερη αισθητική είναι σε πολύ καλό επίπεδο. Ίσως θα μπορούσαν να είναι λίγο μεγαλύτερα τα αντικείμενα που αναπαριστούν τα κλάσματα. Οι προσομοιώσεις για τα κλάσματα έχουν σχεδιαστεί σε HTML5 ώστε να μπορούν να τρέχουν χωρίς πρόβλημα σε όλους τους γνωστούς φυλλομετρητές ιστοσελίδων, αλλά υπάρχουν και προσομοιώσεις που είναι γραμμένες σε Java και Flash.

**Εκπαιδευτική χρήση:** Οι προσομοιώσεις είναι ευχάριστες, εύχρηστες, με καλό σχεδιασμό και μπορεί να αποτελέσουν κίνητρο μάθησης για το μαθητή. Υπάρχει ενεργή συμμετοχή των μαθητών σε μεγάλο βαθμό, αφού οι ίδιοι θα πρέπει να δημιουργήσουν τα κλάσματα ή να τα σύρουν και να αφήσουν στην κατάλληλη θέση. Οι διαδραστικές αναπαραστάσεις, η απλότητα χωρίς περιττά στοιχεία και η δυνατότητα εκτέλεσης χωρίς προβλήματα στους γνωστούς φυλλομετρητές ιστοσελίδων δίνουν προστιθέμενη αξία στο συγκεκριμένο αποθετήριο προσομοιώσεων.

### **WolframAlpha**

Η πλατφόρμα WolframAlpha είναι ένα διαδικτυακό διαδραστικό σύστημα για πολλά γνωστικά αντικείμενα. Συγκεκριμένα είναι μια δωρεάν ηλεκτρονική μηχανή υπολογιστικής γνώσης που παράγει απαντήσεις σε ερωτήσεις σε πραγματικό χρόνο, πραγματοποιώντας υπολογισμούς στην δικιά της τεράστια εσωτερική βάση γνώσεων (WolframAlpha, 2020). Στο πεδίο των Μαθηματικών και ειδικά στα κλάσματα, δίνει τη δυνατότητα οι μαθητές να ασχοληθούν με όλες τις βασικές πράξεις (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση) τόσο με τον κλασικό τρόπο αναπαράστασης των κλασμάτων αλλά και με τη χρήση αναπαραστάσεων μέσα από χειριστήρια (manipulatives) όπως είναι οι πίτες. Στο Σχήμα 4 (πρόσβαση τον Μάρτιο 2020) φαίνεται η πρόσθεση δύο κλασμάτων χρησιμοποιώντας κυκλικούς δίσκους.

Η διαδικτυακή πλατφόρμα WolframAlpha, το τμήμα που αφορά τα κλάσματα, πληροί πολλά από τα κριτήρια αξιολόγησης που αναφέρονται στον Πίνακα 1. Συγκεκριμένα:



Σχήμα 4. Στιγμιότυπο πρόσθεσης κλασμάτων με χρήση της αναπαράστασης κυκλικού δίσκου

**Περιεχόμενο:** Έχει ακρίβεια πληροφοριών και η δημιουργία ενός κλάσματος εμφανίζεται σωστά. Υπάρχει ισορροπία στον όγκο πληροφοριών και δίνει έμφαση σε σημαντικές έννοιες των κλασμάτων παρέχοντας την κλασματική μονάδα, την σύγκριση, την πρόσθεση, την αφαίρεση, τον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση. Παρέχεται η δυνατότητα αναπαράστασης των κλασμάτων με αριθμογραμμή και κυκλικό δίσκο, αλλά θα πρέπει ο μαθητής να πληκτρολογήσει την αντίστοιχη εντολή. Επίσης έχει πολυτροπική δομή παρουσιάζοντας ένα κλάσμα με αριθμούς αλλά και με γραφικές αναπαραστάσεις.

**Παιδαγωγικός σχεδιασμός:** Υπάρχει σύνδεση με τους μαθησιακούς στόχους του Προγράμματος Σπουδών, δεδομένου ότι πράξεις που προσφέρει η πλατφόρμα είναι στην ύλη του δημοτικού. Δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να παρακολουθήσουν βήμα-βήμα την επίλυση ασκήσεων παρέχοντάς κάθε φορά τις απαραίτητες οδηγίες. Επίσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για διδασκαλία και εξάσκηση. Τα αναμενόμενα οφέλη για τους μαθητές σε σχέση με άλλα μέσα είναι ότι παρέχει τη δυνατότητα να γίνονται ερωτήσεις (στα αγγλικά) όπως σε ένα δάσκαλο, π.χ. “is  $3/4$  bigger than  $1/2$ ”.

**Διαδραστικότητα:** Υπάρχει έλεγχος του χρήστη όσον αφορά την αρχική κατασκευή των κλασμάτων πληκτρολογώντας τα αντίστοιχα κλάσματα, αλλά μετά δεν μπορεί να επέμβει και να τροποποιήσει την γραφική αναπαράσταση. Υπάρχει ανατροφοδότηση, παρέχοντας τη δυνατότητα στον μαθητή να βλέπει βήμα-βήμα την εκτέλεση των πράξεων και δίνοντας του οδηγίες για την επίλυση των ασκήσεων.

**Τεχνικός σχεδιασμός:** Η εφαρμογή είναι εύχρηστη, όμως ο μαθητής μερικές φορές πρέπει να πληκτρολογήσει εντολές για να δει την αναπαράσταση των κλασμάτων. Η ποιότητα των γραφικών είναι καλή, όμως είναι μικρά σε μέγεθος τα σχήματα. Η γενικότερη αισθητική της εφαρμογής είναι καλή, αν και μερικές φορές ο μαθητής χρειάζεται να μετακινήσει προς τα κάτω την οθόνη για να δει ολόκληρη την απάντηση. Δεν υπάρχουν τεχνικά θέματα ή προβλήματα εκτέλεσης.

**Εκπαιδευτική χρήση:** Η συγκεκριμένη εφαρμογή είναι ευχάριστη, παρέχοντας τη δυνατότητα στο μαθητή να κάνει ερωτήσεις απλές ερωτήσεις όπως στον δάσκαλο. Ο βαθμός ενεργού συμμετοχής των μαθητών είναι περιορισμένος, αφού πέραν της αρχικής πληκτρολόγησης των κλασμάτων δεν έχουν άλλη συμμετοχή. Η προστιθέμενη αξία της πλατφόρμας είναι ότι παρέχει απαντήσεις σε ερωτήσεις σε πραγματικό χρόνο.

### Φωτόδεντρο

Το «Φωτόδεντρο» είναι ο εθνικός συσσωρευτής ανοικτού εκπαιδευτικού περιεχομένου όπου διατίθενται ελεύθερα όλοι οι ψηφιακοί εκπαιδευτικοί πόροι που έχουν αναπτυχθεί για την

πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση στο πλαίσιο εθνικών και ευρωπαϊκών έργων. Ειδικό ενδιαφέρον παρουσιάζει το αποθετήριο μαθησιακών αντικειμένων (Φωτόδεντρο, 2019) που ξεκίνησε να αναπτύσσεται στο πλαίσιο της δράσης Ψηφιακό Σχολείο (2010-2015). Η αναζήτηση στο Φωτόδεντρο μαθησιακών αντικειμένων σχετικά με «κλάσματα» εμφάνισε 114 αποτελέσματα (Μάρτιος 2020). Από αυτά επιλέχθηκε ένα μαθησιακό αντικείμενο για την σύγκριση κλασμάτων με τίτλο «Ποιος έφαγε περισσότερη πίτσα;-Σύγκριση κλασμάτων», το οποίο απευθύνεται σε μαθητές δημοτικού σχολείου και ενσωματώνει χαρακτηριστικά διερευνητικής μάθησης και επίλυσης προβλήματος.

Το συγκεκριμένο ΜΑ έχει αναπτυχθεί με το λογισμικό GeoGebra και μπορεί να εκτελεστεί σε όλους τους γνωστούς φυλλομετρητές. Περιλαμβάνει τρεις δραστηριότητες. Στην πρώτη δραστηριότητα, οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να συγκρίνουν ομώνυμα κλάσματα, έχοντας στην διάθεσή τους έναν κυκλικό δίσκο που μπορούν να αλλάζουν δυναμικά τόσο τον αριθμητή, όσο και τον παρονομαστή. Στη δεύτερη δραστηριότητα, έχουν τη δυνατότητα να συγκρίνουν τόσο ομώνυμα όσο και ετερόνυμα κλάσματα, έχοντας στη διάθεσή τους δύο κυκλικούς δίσκους (Σχήμα 5). Στη συνέχεια, στην τρίτη δραστηριότητα, έχουν την δυνατότητα να συγκρίνουν ομώνυμα και ετερόνυμα κλάσματα, χρησιμοποιώντας ίδια διαμέριση και στους δύο κυκλικούς δίσκους, έτσι ώστε να μπορούν οπτικά να κάνουν ευκολότερη την σύγκριση, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6. Επιπλέον παρέχονται οδηγίες σε περίπτωση που ο μαθητής συναντήσει κάποια δυσκολία, με την εμφάνιση ενός πλαισίου κειμένου.

Εφαρμόζοντας τα κριτήρια αξιολόγησης του Πίνακα 1, προκύπτει ότι το ΜΑ του Φωτόδεντρου που παρουσιάστηκε παραπάνω, πληροί τα περισσότερα από αυτά:

**Περιεχόμενο:** Έχει ακρίβεια πληροφοριών. Υπάρχει ισορροπία μεταξύ του όγκου πληροφοριών, δηλαδή μεταξύ κειμένου και σχημάτων. Μόνο στην τρίτη δραστηριότητα φαίνεται το κείμενο να υπερτερεί των σχημάτων. Δίνεται έμφαση σε βασικές έννοιες, όπως η διαμέριση. Δεν γίνεται χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων, αφού όλες οι αναπαραστάσεις των κλασμάτων είναι με χρήση κυκλικού δίσκου. Παρέχει πολυτροπική δομή, αφού υπάρχει κείμενο, εικόνες και δημιουργία δυναμικών σχημάτων.

Ποιος έφαγε περισσότερη πίτσα; - Σύγκριση κλασμάτων

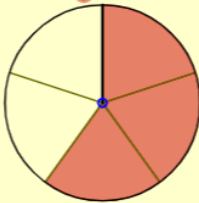
Πέντε φίλοι παρήγγειλαν τις δύο ίδιες πίτσες που φαίνονται στο σχήμα.

Δραστηριότητες  1η  2η  3η

Ο Δημοσθένης και ο Διονύσης έφαγαν από διαφορετικές πίτσες ίδιο αριθμό κομματιών αλλά η συνολική ποσότητα που έφαγε ο καθένας είναι διαφορετική. Πώς μπορεί να έγινε αυτό; Δώστε μία εξήγηση.

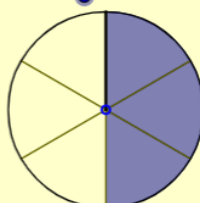
Οδηγίες

αριθμητής<sub>1</sub> = 3  
παρονομαστής<sub>1</sub> = 5



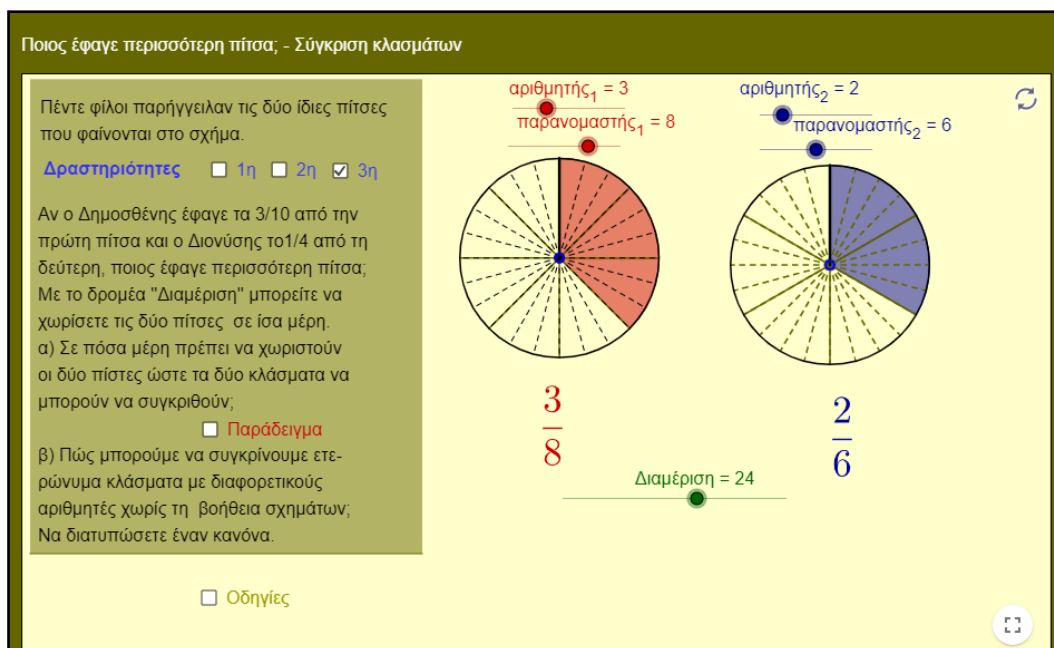
$\frac{3}{5}$

αριθμητής<sub>2</sub> = 3  
παρονομαστής<sub>2</sub> = 6



$\frac{3}{6}$

Σχήμα 5. Οθόνη της δραστηριότητας σύγκρισης ετερόνυμων κλασμάτων με ίδιο αριθμητή



Σχήμα 6. Οθόνη της δραστηριότητας σύγκρισης ετερόνομων κλασμάτων

**Παιδαγωγικός σχεδιασμός:** Υπάρχει σύνδεση με τους μαθησιακούς στόχους του Προγράμματος Σπουδών, δεδομένου ότι οι πράξεις που προσφέρει η εφαρμογή είναι στην ύλη του δημοτικού. Η παιδαγωγική μέθοδος που ακολουθεί είναι η διερευνητική μέθοδος, μέσω του πειραματισμού αλλά και η επίλυση προβλήματος. Παρέχει διαφορετικές στρατηγικές χρήσης, για την διδασκαλία και εξάσκηση των κλασμάτων. Τα οφέλη για τους μαθητές είναι η ανάπτυξη της κριτικής σκέψης μέσα από τη διερευνητική μέθοδο, αλλά και επαναχρησιμοποίησης του ΜΑ από την αρχή.

**Διαδραστικότητα:** Υπάρχει έλεγχος του χρήστη, αφού μπορεί να κατασκευάσει τα κλάσματα που επιθυμεί με δυναμικό τρόπο. Υπάρχει υποστήριξη στον μαθητή με οδηγίες για την σωστή χρήση του ΜΑ. Δεν παρέχει προσαρμοσμένο περιεχόμενο και δεν γίνεται μοντελοποίηση δράσεων χρήστη.

**Τεχνικός σχεδιασμός:** Το ΜΑ είναι πολύ εύκολο στη χρήση και πολύ εύχρηστο, χωρίς δυσκολίες και έχει εύκολη πλοήγηση. Η ποιότητα των γραφικών είναι πολύ καλή, όπως άλλωστε και η γενικότερη αισθητική. Το ΜΑ έχει αναπτυχθεί με το GeoGebra και το μόνο τεχνικό πρόβλημα που παρατηρήθηκε είναι ότι οι κυκλικοί δίσκοι μπορούν να μετακινηθούν και σε χώρο όπου καλύπτουν το κείμενο.

**Εκπαιδευτική χρήση:** Το συγκεκριμένο ΜΑ είναι πολύ ευχάριστο και αποτελεί κίνητρο μάθησης για τους μαθητές. Ο βαθμός ενεργού συμμετοχής των μαθητών είναι μεγάλος αφού θα πρέπει οι ίδιοι να κατασκευάσουν δυναμικά τα κλάσματα με τη μορφή κυκλικού δίσκου. Η προστιθέμενη αξία του συγκεκριμένου ΜΑ είναι ότι γίνεται επίλυση προβλήματος με την διερευνητική μέθοδο και παρέχεται η δυνατότητα διαμέρισης.

## Μελέτη ομάδας εστίασης εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης

Η δεύτερη φάση της εργασίας είχε ως στόχο να διερευνηθούν οι διδακτικές προσεγγίσεις και τεχνικές, τα μέσα και οι αναπαραστάσεις που επιλέγουν και χρησιμοποιούν έμπειροι εκπαιδευτικοί δημοτικού για τη διδασκαλία των κλασμάτων και των σχετικών εννοιών (π.χ. κλασματική μονάδα, σύγκριση, πράξεις κλασμάτων κ.λπ.). Η υπόθεση που οδήγησε τον

ερευνητικό μας σχεδιασμό ήταν ότι η πολύχρονη διδακτική εμπειρία των συγκεκριμένων εκπαιδευτικών και μπορεί να αναδείξει σημαντικούς παράγοντες, οι οποίοι ενισχύουν τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθητών στα κλάσματα και θα μπορούσαν να αξιοποιηθούν για το σχεδιασμό του δικού μας συστήματος.

Τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν ήταν:

- Ποιες είναι οι στρατηγικές που ακολουθούν οι δάσκαλοι για τη διδασκαλία των κλασμάτων;
- Ποιες αναπαραστάσεις των κλασμάτων θεωρούν οι δάσκαλοι ότι βοηθούν τους μαθητές;
- Ποιες δυσκολίες συναντούν οι μαθητές κατά την διδασκαλία των κλασμάτων;
- Ποια χαρακτηριστικά πιστεύουν οι δάσκαλοι ότι θα μπορούσε να έχει μια εκπαιδευτική διαδικτυακή εφαρμογή για τα κλάσματα;

Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήσαμε τη μέθοδο ομάδα εστίασης (focus group) εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Η μέθοδος αυτή προσφέρεται για τη διερεύνηση των απόψεων μιας ομάδας με κοινά χαρακτηριστικά (εκπαιδευτικοί) και των διδακτικών στρατηγικών που χρησιμοποιούν στην τάξη τους για τη διδασκαλία των κλασμάτων (Wilson, 1997). Το κύριο πλεονέκτημα μιας ομάδας εστίασης είναι ότι, με τη βοήθεια ενός συντονιστή-ερευνητή, επιτυγχάνεται ανοικτή συζήτηση και δυναμική αλληλεπίδραση μεταξύ των μελών. Η διαδικασία αυτή επιτρέπει να έρθουν στην επιφάνεια ιδέες και απόψεις που δεν θα μπορούσαν να αναδειχθούν μέσω ατομικής συνέντευξης, πολύ περισσότερο δε μέσω ερωτηματολογίου. Επιπλέον, οι συμμετέχοντες έχουν χαλαρή διάθεση και αυτό βοηθάει στο να μοιραστούν απόψεις και εμπειρίες, να σχολιαστούν ελεύθερα τις απόψεις συναδέλφων, να διατυπώσουν διαφορετικές απόψεις, αντιλήψεις ή εκπαιδευτικές επιλογές σε ένα ανοικτό πλαίσιο συζήτησης (Bostan, 2015).

### Συμμετέχοντες

Στην έρευνα πήραν μέρος έξι εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (τρεις άντρες και τρεις γυναίκες), με πολύ μεγάλη διδακτική εμπειρία (Μ.Ο. υπηρεσίας στην τάξη 27,7). Στη συζήτηση πήρε μέρος ένας ερευνητής έχοντας το ρόλο του συντονιστή. Οι εκπαιδευτικοί υπηρετούσαν σε σχολεία της ευρύτερης περιοχής της Αττικής και είχαν όλοι τους πιστοποίηση στις ΤΠΕ. Στον Πίνακα 2 παρουσιάζονται τα δημογραφικά στοιχεία των εκπαιδευτικών που συμμετείχαν στην ομάδα εστίασης.

Πίνακας 2. Προφίλ εκπαιδευτικών της ομάδας εστίασης

Εκπαιδευτικός	Φύλο	Ηλικία	Επιμόρφωση ΤΠΕ	Έτη υπηρεσίας
E1	Άντρας	51	Ναι	25
E2	Άντρας	58	Ναι	36
E3	Γυναίκα	49	Ναι	21
E4	Άντρας	47	Ναι	21
E5	Γυναίκα	50	Ναι	30
E6	Γυναίκα	53	Ναι	33

## **Διαδικασία**

Η συνάντηση πραγματοποιήθηκε σε χώρο μακριά από το χώρο του σχολείου, ώστε να μην επηρεάζονται οι συμμετέχοντες από συναισθηματισμούς με το σχολείο. Η συζήτηση διεξήχθη σε ένα πολύ φιλικό και χαλαρό κλίμα. Διήρκησε μιάμιση ώρα και ηχογραφήθηκε.

Οι εκπαιδευτικοί ενημερώθηκαν από τον ερευνητή για το σκοπό της συνάντησης καθώς και για τον τρόπο που θα πραγματοποιούνταν. Παρουσιάστηκε ο βασικός σκοπός της καθώς και ο τρόπος συμμετοχής στη συζήτηση και ανταλλαγής απόψεων. Διευκρινίστηκε ο ρόλος του συντονιστή της συζήτησης και ότι θα παρέμβαινε μόνο όταν κρινόταν απαραίτητο ή η συζήτηση ξέφευγε από το θέμα.

Οι βασικοί άξονες της συζήτησης των συμμετεχόντων ήταν:

1. Στρατηγικές διδασκαλίας βασικών εννοιών των κλασμάτων
2. Μορφές αναπαράστασης των κλασμάτων που χρησιμοποιούν στη διδασκαλία
3. Κύριες δυσκολίες των μαθητών στα κλάσματα
4. Διδακτικές για την σύγκριση κλασμάτων
5. Προτάσεις στοιχείων και λειτουργικών χαρακτηριστικών για τον σχεδιασμό μιας διαδικτυακής εκπαιδευτικής εφαρμογής για τα κλάσματα.

## **Ανάλυση υλικού**

Η επεξεργασία των ποιοτικών δεδομένων της συζήτησης με την ομάδα εστίασης, έγινε με τη μέθοδο της θεματικής ανάλυσης, για τη συστηματική αναγνώριση, οργάνωση και κατανόηση των εννοιολογικών σχημάτων σε ένα μεγάλο σύνολο ποιοτικών δεδομένων (Braun & Clarke, 2012). Ακολουθήθηκαν πέντε βήματα της θεματικής ανάλυσης (Τσιώλης, 2017): α) μετεγγραφή, β) εντοπισμός-οργάνωση αποσπασμάτων που αντιστοιχούν σε νοήματα σχετικά με τα ερευνητικά ερωτήματα, γ) κωδικοποίηση, δ) οργάνωση κωδικών σε θέματα και ε) ερμηνεία και παρουσίαση ευρημάτων.

## **Αποτελέσματα**

### **Στρατηγικές εισαγωγής των μαθητών στα κλάσματα**

Οι εκπαιδευτικοί ανέφεραν ότι χρησιμοποιούν παραδείγματα από την καθημερινή ζωή, όπως φρούτα ή αντικείμενα που έρχονται σε επαφή συχνά. Συγκεκριμένα, η παρουσίαση της κλασματικής μονάδας γίνεται με αναφορά σε αντικείμενα, όπως μήλα, πορτοκάλια, πίτσα, ή σοκολάτα.

Ενδεικτικά είναι τα παρακάτω αποσπάσματα:

E1: *«Πρέπει να υπάρχει ένας πρακτικός τρόπος, να έχεις ένα πορτοκάλι, να το κόψεις και μετά να πάνε στα θεωρητικά».*

E6: *«Και εγώ το μήλο.».*

E5: *«Με ένα πορτοκάλι, το κόβω στη μέση για να δούμε.».*

Η αναφορά στο πορτοκάλι μας έκανε εντύπωση. Όπως αναφέρθηκε από έναν εκπαιδευτικό αυτό έχει νόημα γιατί το πορτοκάλι, όταν κοπεί στη μέση, επιτρέπει την περαιτέρω διαμέριση σε φέτες.

Οι εκπαιδευτικοί ανέφεραν ότι έχουν εντοπίσει μεγάλη δυσκολία των μαθητών στην κατανόηση της κλασματικής μονάδας. Εφόσον οι μαθητές επιτύχουν να κατανοήσουν την

κλασματική μονάδα, τότε προχωρούν πιο εύκολα στις επόμενες έννοιες (π.χ. πρόσθεση). Οι επόμενες δυσκολίες αφορούν την σύγκριση κλασμάτων και τα ισοδύναμα κλάσματα.

Ένας άλλος δάσκαλος ανέφερε το εξής:

E2: «Για την κατανόηση της κλασματικής μονάδας μπορείς να έχεις και μια σακούλα με είκοσι καραμέλες. Στη συνέχεια μπορείς να τις μοιράσεις ισόποσα σε πέντε σακουλάκια, ώστε το κάθε παιδί να έχει το ένα πέμπτο. Το ίδιο είχα κάνει και με κάστανα από αγριοκαστανιές.»

Δύο εκπαιδευτικοί, ο E1 και ο E2, υποστήριξαν ότι η χρήση λογισμικών στον υπολογιστή βοηθάει τους μαθητές στην κατανόηση της κλασματικής μονάδας, μέσα από την δύναμη της εικόνας και της κίνησης που παρέχει ο υπολογιστής. Με την άποψη αυτή όμως διαφώνησε μια εκπαιδευτικός.

E5: «Σίγουρα η εφαρμογή θα βοηθήσει, όμως το πρακτικό τα ενθουσιάζει. Τα παιδιά τα βλέπουνε μπροστά τους, και τα καταλαβαίνουν καλύτερα. Τους αρέσει καλύτερα.»

### **Μορφές αναπαράστασης κλασμάτων**

Από τη συζήτηση αναδείχθηκαν δύο μορφές αναπαράστασης που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί και θεωρούν ότι συμβάλλουν στη σκέψη των μαθητών για τα κλάσματα: ο κυκλικός δίσκος (πίτα ή πίτσα) και η στήλη-ράβδος.

Οι εκπαιδευτικοί ανέφεραν ότι κάποιες αναπαραστάσεις κλασμάτων βοηθούν περισσότερο τους μαθητές σε σχέση με κάποιες άλλες, όπως η πίτσα και το δοχείο με διαβάθμιση που γεμίζει.

E1: «Υπάρχουν διάφορες μορφές αναπαράστασης που βοηθάνε τους μαθητές. Είναι το δοχείο που έχει διαγράμμιση επάνω. Βέβαια, η πίτσα είναι το πιο κλασικό.»

E2: «Ένα μπουκάλι με υγρό, βλέπεις τα  $3/5$ , τα  $4/5$  τα διαβαθμίζεις.»

E5: «Η αναπαράσταση των κλασμάτων είναι πιο δύσκολη με αριθμογραμμή. Εγώ βλέπω τους μπερδεύει η αριθμογραμμή.»

E1: «Δεν μπορούν να φτιάξουν ένα αντικείμενο, δεν μπορούν να το σχηματοποιήσουν.»

Η εκπαιδευτικός E6 σημείωσε ότι οι αναπαραστάσεις που έχουν εμφανή τα ίσα μέρη βοηθούν περισσότερο τους μαθητές. Φαίνεται ότι οι αναπαραστάσεις με χρήση αναλογιών-μοντέλων επιφάνειας ή όγκου βοηθάει περισσότερο τους μαθητές σε σχέση με την αριθμογραμμή, επειδή μπορούν να σχηματοποιήσουν πιο εύκολα την εικόνα στο μυαλό τους.

### **Κύριες δυσκολίες των μαθητών στα κλάσματα**

Όλοι οι εκπαιδευτικοί της ομάδας εστίασης συμφώνησαν ότι η έννοια της κλασματικής μονάδας είναι πολύ σημαντική και ότι οι δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές στην οικοδόμηση της μεταφέρονται στη συνέχεια. Για παράδειγμα, οι δυσκολίες στην σύγκριση κλασμάτων, στα ισοδύναμα κλάσματα, στον πολλαπλασιασμό και στη διαίρεση, έχουν ως αφετηρία την ελλιπή κατανόηση της κλασματικής μονάδας.

E3: «Η δυσκολία που έχουν οι μαθητές είναι η έννοιας της κλασματικής μονάδας, γιατί εάν κατανοήσουν αυτό, προχωράνε σιγά σιγά στα υπόλοιπα.»

E4: «Οι συγκρίσεις, γιατί πρέπει να κάνουν αλγόριθμο.»

E2: «Πρώτα θα δυσκολευτούν στην έννοια της κλασματικής μονάδας. Αν την ξεπεράσουν μετά θα κολλήσουν στα ισοδύναμα. Πως θα φτιάξουν ισοδύναμα; Πως θα καταλάβουν ότι το  $2/4$  είναι το ίδιο με το  $4/8$ ;.»



E6: «Εγώ βλέπω ότι οι μαθητές δυσκολεύονται στις διαιρέσεις και τον πολλαπλασιασμό και όχι τόσο πολύ στα βασικά.».

Ο εκπαιδευτικός E1 ανέφερε «Οι μαθητές δεν έχουν κατανοήσει, ότι το κλάσμα είναι διαίρεση. Το  $\frac{3}{4}$  σημαίνει διαίρεση. Διαιρεί, το 3 με το 4, δηλαδή 0,75 ή τα 75% της μονάδας».

Ένας εκπαιδευτικός αναφέρθηκε στις εγγενείς δυσκολίες που έχουν τα προβλήματα των κλασμάτων, λέγοντας χαρακτηριστικά:

E2: «Τα προβλήματα θέλουν προσοχή, ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση είναι τα πιο δύσκολα. ... Και εμείς έχουμε δυσκολευτεί.».

Επίσης ανέφερε «... οι μαθητές δεν μπορούν να φανταστούν τα κλάσματα σαν εικόνα στο μυαλό τους. Δεν μπορούν να φτιάξουν ένα αντικείμενο, δεν μπορούν να το σχηματοποιήσουν. Εγώ προσπαθώ να το ζωγραφίσω. Και αυτό το πράγμα είναι που δεν μπορούν να σκεφτούν, τι είναι αυτό που πραγματικά ζητάει το πρόβλημα. Την έννοια.».

Ένα άλλο τμήμα που δυσκολεύει τους μαθητές είναι να κατανοήσουν τι δείχνει ο αριθμός που βρήκαν ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ κλασμάτων. Να εκτιμήσουν δηλαδή το μέγεθος του αριθμού. Όπως ανέφερε χαρακτηριστικά ο εκπαιδευτικός E2 «... κάνουν πρόσθεση, ας πούμε, ομώνυμων κλασμάτων και το αποτέλεσμα δείχνει ο αριθμητής είναι πάρα πολύ μεγάλος αριθμός σε σχέση με τον παρονομαστή. Δεν μπορούν να πουν σε ποιον ακέραιο είναι αυτός ο αριθμός».

Επιπλέον, οι μαθητές δυσκολεύονται όταν έχουν να αναπαραστήσουν το κλάσμα με τη μορφή δεκαδικού ή μεικτού αριθμού. Η μετατροπή των αριθμών από μια μορφή σε μια άλλη δυσκολεύει τους μαθητές.

E2: «Ένα άλλο πρόβλημα είναι πώς να γράφεις το κλάσμα με διαφορετικές μορφές, δηλαδή και σαν δεκαδικό και σαν μεικτό. Πώς μετατρέπεις τους αριθμούς, πώς κάνεις την μετατροπή;».

E3: «Η κορύφωση πιστεύω ότι είναι οι αλλαγές των αριθμών, δηλαδή από την μια μορφή στην άλλη και ειδικά στα κλάσματα.».

### **Στρατηγικές σύγκρισης κλασμάτων**

Όπως προέκυψε από την συζήτηση στην ομάδα, για την σύγκριση κλασμάτων οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν τεχνικές γραφικής αναπαράστασης και οπτικοποίησης στον πίνακα. Χρησιμοποιούν πιο συχνά την αναπαράσταση της κυκλικής επιφάνειας. Η χρήση του κυκλικού δίσκου είναι πιο συχνή μιας και τα παιδιά έχουν από την καθημερινότητά τους εικόνες σχετικές με την αναπαράσταση, αυτή. Για παράδειγμα, πίτσα, πίτα ή τούρτα.

E3: «Ο κύκλος είναι πιο εύχρηστος».

E2: «Ο κύκλος βολεύει πιο πολύ.».

E5: «Ναι, ναι. Είναι πιο εύκολο σχήμα. Πιο σύνθητες».

Επιπλέον οι εκπαιδευτικοί συμφωνούν ότι ο συνδυασμός δύο το πολύ αναπαραστάσεων ταυτόχρονα μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές, για παράδειγμα κύκλος και ραβδόγραμμα.

E5: «Μέχρι δύο το πολύ, όχι παραπάνω».

E2: «Παραπάνω μπορεί να μπερδεύει. Θεωρώ πιθανότερο να μπερδεύει».

Συνήθως ξεκινούν με την σύγκριση της κλασματικής μονάδας. Συνεχίζουν με την σύγκριση κλασμάτων που έχουν τον ίδιο παρονομαστή και, τέλος, προχωρούν στην σύγκριση κλασμάτων με τον ίδιο αριθμητή.

E3: «Όταν έχω να διδάξω σύγκριση κλασμάτων, εγώ ξεκινάω από το να έχουν πρώτα τους ίδιους παρονομαστές και μετά αυτά που έχουν τον ίδιο αριθμητή.».

E5: «Και εγώ με την ίδια σειρά ξεκινάω, πρώτα να έχουν ίδιους παρονομαστές.»

E1: «Εγώ νομίζω για την σύγκριση κλασμάτων καλό θα ήταν να ξεκινάμε με οπτικοποίηση. Να βλέπουν κανονικά οι μαθητές τι συγκρίνουν.»

E2: «Η σειρά είναι συγκρίνω την κλασματική μονάδα, μετά αυτά που έχουν τον ίδιο παρονομαστή, μετά αυτά που έχουν τον ίδιο αριθμητή. Εμείς είναι πως παρουσιάζουμε το ζήτημα. Εγώ πάντα την πίτσα έχω σαν εργαλείο, να την κόψω σε τέσσερα κομμάτι και να την κόψω και σε οκτώ. Ποιο είναι το πιο μεγάλο; Τι σας συμφέρει να φάτε το  $1/4$  ή το  $1/8$ ; Γιατί αν δεν κάνω αναπαράσταση θα πούνε το  $1/8$  είναι πιο μεγάλο. Άρα θα πω προτιμάτε να την μοιραστούμε 8 άτομα ή τέσσερις».

Σε περίπτωση που υπάρχει δυσκολία κατανόησης, η εκπαιδευτικός E6 χρησιμοποιεί την επανάληψη ως μέθοδο αντιμετώπισης των δυσκολιών των μαθητών στα κλάσματα. Η E5 για την κατανόηση της σύγκρισης κλασμάτων χρησιμοποιήσει την επανάληψη και την αναπαράσταση με διαφορετικές μορφές. Επιπλέον, η E5 ζωγραφίζει τα κλάσματα στον πίνακα και τα αναπαριστά ταυτόχρονα το ένα δίπλα στο άλλο.

Επίσης κάποιοι εκπαιδευτικοί θεωρούν ότι όταν υπάρχει πρόβλημα στην σύγκριση κλασμάτων, τότε ίσως οι μαθητές δεν έχουν κατανοήσει την σύγκριση ακεραίων ή δεκαδικών.

### **Προτάσεις για το σχεδιασμό εκπαιδευτικών λογισμικών για τα κλάσματα**

Από την συζήτηση στην ομάδα, αναδείχθηκαν χρήσιμα στοιχεία για την χρήση των ΤΠΕ στην διδασκαλία των κλασμάτων. Ο εκπαιδευτικός E1 πιστεύει ότι τα λογισμικά που αναφέρονται σε κλάσματα είναι απαραίτητα αφού μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να τα κατανοήσουν. Σε αυτό συμφώνησαν και οι άλλοι εκπαιδευτικοί.

Μάλιστα μπορούν να χρησιμοποιήσουν εναλλακτικά τα λογισμικά για την διδασκαλία των κλασμάτων όταν οι μαθητές μπερδεύονται με τους παραδοσιακούς τρόπους διδασκαλίας.

E1: «Η αριθμογραμμή μπερδεύει τους μαθητές. Όμως εάν είναι σε λογισμικό μπορεί να μην είναι τόσο δύσκολο για αυτούς.»

Επίσης όλοι οι εκπαιδευτικοί συμφωνούν ότι η χρήση με λογισμικό που θα είχε κίνηση και αναπαράσταση μέχρι δύο κλάσματα για σύγκριση στην ίδια θέση, θα βοηθούσε πάρα πολύ τους μαθητές στην κατανόηση της συγκεκριμένης έννοιας.

Μάλιστα όταν υπάρχει σχεδιοκίνηση (animation) και φαίνεται σαν παιχνίδι κεντρίζει περισσότερο το ενδιαφέρον των μαθητών.

E2: «Τα λογισμικά στα Μαθηματικά είναι πολύ απαραίτητα. Πάντα φάχνω να δείξω εικόνες, παιχνίδι όταν οι μαθητές δεν καταλαβαίνουν τις έννοιες. Αναζητούσα πάντα να βρω παιχνίδια. Η κίνηση κεντρίζει και όχι η στατικότητα.»

E5: «Αυτό είναι ακόμη καλύτερο, να έχεις εικόνα που έχει κίνηση.»

E1: «Ναι, συμφωνώ. Μπορείς και μόνος σου να φτιάξεις μια παρουσίαση που να βγάζει στο τέλος ένα χειροκρότημα ή να βγάζει προτεχνήματα.»

Επίσης, δύο εκπαιδευτικοί υποστήριξαν ότι η χρήση εφαρμογών μέσω ηλεκτρονικού υπολογιστή θα ήταν μια καλή λύση και ότι για την αισθητοποίηση του κλάσματος υπάρχουν διαδικτυακά προγράμματα που το δείχνουν με παιγνιώδη τρόπο.

E1: «Πάντως η οπτικοποίηση είναι πολύ δύσκολη αλλά μπορείς να την κάνεις και με εφαρμογές».

E2: «Σε ένα εκπαιδευτικό παιχνίδι με κλασματικές μονάδες υπάρχει ένας άνθρωπος που πρέπει να περάσει στην απέναντι όχθη ενός ποταμιού. Υπάρχουν τρεις ερωτήσεις για να απαντήσει. Σε κάθε σωστή απάντηση κάνει ένα βήμα επάνω σε ένα βραχάκι. Εάν απαντήσει σωστά και στις τρεις ερωτήσεις, τότε περνάει στην απέναντι όχθη.»

Οι εκπαιδευτικοί ανέφεραν μια σειρά από στοιχεία που θα μπορούσε να έχει ένα λογισμικό για την διδασκαλία και εξάσκηση των κλάσμάτων. Ενδεικτικές είναι οι προτάσεις για τα στοιχεία που θα έπρεπε να έχει ένα τέτοιο λογισμικό.

Τα κλάσματα να εμφανίζονται με γεωμετρικά σχήματα που να μπορούν να κόβονται εύκολα, όπως για παράδειγμα κυκλικός δίσκος, ορθογώνιο παραλληλόγραμμο/μπάρα.

E1: «Ο κύκλος είναι ο πιο εύχρηστος».

E5: «Είναι πιο εύκολο σχήμα ο κύκλος».

Η αναπαράσταση των κλασμάτων να γίνεται με σχήματα που να μπορούν να έχουν σχεδιοκίνηση (animation).

E1: «Να έχει ενδιαφέροντες τρόπους αναπαράστασης των κλασμάτων.».

E5: «Πολύ εικόνα. Σχήματα που να έχουν αναπαράσταση.».

E2: «Εικόνα, κίνηση, σχήματα γεωμετρικά που να μοιράζονται εύκολα.».

Επιπλέον το λογισμικό να μπορεί να παρέχει ασκήσεις με διαφορετικό βαθμό δυσκολίας.

E2: «Εξειδικευμένες ασκήσεις για τον καθένα.».

E5: «Βαθμό δυσκολίας ένα, δύο, τρία, σίγουρα θα βοηθήσει.».

Να μπορεί να παρέχει κάποιο είδος βοήθειας στον μαθητή.

E5: «Να δίνει καθοδήγηση. Για παράδειγμα να του λέει μήπως τώρα πρέπει να ελέγξεις αν είναι ετερόνομα τα κλάσματα, ήταν τα κάνεις ομόνομα. Να δίνει συμβουλές.».

E3: «Αν μετά από κάποιο χρόνο το παιδί μένει ανενεργό να το σπρώχνει λίγο.».

E2: «Ναι για να μην τα παρατήσει. Ναι το χρειάζεται. Στα επαναλαμβανόμενα λάθη να του λέει πρόσεξε αυτό ή κάτι άλλο.».

### **Συζήτηση ευρημάτων**

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων της ομάδας εστίασης εκπαιδευτικών, προέκυψε ότι οι μαθητές συναντούν αρκετές δυσκολίες στα κλάσματα (κλασματική μονάδα, σύγκριση, ισοδύναμα, πολλαπλασιασμός, διαίρεση). Οι εκπαιδευτικοί θεωρούν αποτελεσματικά και επιλέγουν να χρησιμοποιούν στη διδασκαλία τους μοντέλα επιφάνειας (κυκλικός δίσκος, παραλληλόγραμμο) και παραδείγματα από την πραγματική ζωή όπως είναι η πίτσα, τα πορτοκάλια και η σοκολάτα. Επιβεβαιώνοντας τα ευρήματα έρευνας σε μαθητές δημοτικού (Tunc-Pekkan, 2015), φαίνεται ότι χρήση των αναπαραστάσεων του κυκλικού δίσκου και του παραλληλόγραμμου βοηθάει τους μαθητές στην κατανόηση της έννοιας του κλάσματος ως μέρος του όλου. Η χρήση παραδειγμάτων από την καθημερινότητα των μαθητών, όπως η πίτσα και το κέικ, φαίνεται να χρησιμοποιείται ευρύτερα από τους εκπαιδευτικούς στην διδασκαλία της έννοιας του κλάσματος (Choy, 2014).

Οι εκπαιδευτικοί της παρούσας έρευνας δεν χρησιμοποιούν την αναπαράσταση της αριθμογραμμής γιατί είναι δύσκολη για τους μαθητές και έρχεται σε συμφωνία με ευρήματα έρευνας που έγινε σε 656 μαθητές Δ και Ε΄ τάξης δημοτικού στις Η.Π.Α. ότι μαθητές δεν τα καταφέρνουν σε προβλήματα κλασμάτων με μέσο αναπαράστασης την αριθμογραμμή (Tunc-Pekkan, 2015). Ανάλογες δυσκολίες στη χρήση της αριθμογραμμής για την κατανόηση των κλασμάτων εμφανίζονται και σε άλλες μελέτες (Behr et al., 1983· Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007· Van de Walle, Karp & Bay-Williams, 2015).

Όσον αφορά τη συνδυασμένη χρήση αναπαραστάσεων κλασμάτων, οι συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί θεωρούν ότι είναι χρήσιμες μέχρι δύο αναπαραστάσεις και, κυρίως, με την

μορφή σχήματος κυκλικού δίσκου (πίτσα) ή παραλληλογράμμου (δοχείο). Αυτό συμφωνεί με έρευνα που δείχνει ότι οι πολλαπλές αναπαραστάσεις κλασμάτων στον πολλαπλασιασμό βοηθούν τους μαθητές (Wyberg et al., 2012) και, ειδικότερα, να οικοδομήσουν καλύτερα τις μαθηματικές ιδέες όταν αυτές αναπαρίσταται με πολλαπλούς τρόπους (Yeh & Nason, 2008). Επίσης οι εκπαιδευτικοί που πήραν μέρος στην έρευνα πιστεύουν ότι η σχεδιοκίνηση κεντρίζει το ενδιαφέρον των μαθητών και λογισμικά με σχεδιοκίνηση θα βοηθούσαν σίγουρα τους μαθητές στην κατανόηση της κλασματικής μονάδας και των άλλων βασικών εννοιών των κλασμάτων. Εξάλλου έρευνα δείχνει ότι η αναπαράσταση κλασμάτων μέσα από εφαρμογές με τα εικονικά χειριστήρια βοηθάει τους μαθητές στην εννοιολογική αλλά και διαδικαστική γνώση των κλασμάτων (Reimer & Moyer, 2005).

Επίσης οι εκπαιδευτικοί θεωρούν ότι οι ενότητες των κλασμάτων που συναντούν σημαντικές δυσκολίες οι μαθητές είναι η έννοια της κλασματικής μονάδας, η σύγκριση κλασμάτων, τα ισοδύναμα κλάσματα, ο πολλαπλασιασμός κλασμάτων και η διαίρεση κλασμάτων. Τα ευρήματα αυτά επιβεβαιώνουν προηγούμενες έρευνες που δείχνουν ότι οι μαθητές δυσκολεύονται στη σύγκριση κλασμάτων (Yang & Tsai, 2010), στη διαίρεση κλασμάτων (Chinnappan & Desplat, 2012· Sartono & Karso, 2020), τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων (Sartono & Karso, 2020), και στον πολλαπλασιασμό και διαίρεση με αριθμό μικρότερο από την μονάδα (Siegler & Lortie-Forgues, 2015). Επίσης οι εκπαιδευτικοί της παρούσας έρευνας πιστεύουν ότι η ερμηνεία του αποτελέσματος ενός προβλήματος κλασμάτων δυσκολεύει τους μαθητές καθώς και η αναπαράσταση των κλασμάτων με τη μορφή δεκαδικού ή μεικτού αριθμού. Αυτό συμφωνεί με έρευνα (Sartono & Karso, 2020) ότι οι μαθητές συναντούν δυσκολία όταν λύνουν ασκήσεις μεικτών αριθμών.

Όσον αφορά τις διδακτικές στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί για την σύγκριση κλασμάτων είναι η γραφική αναπαράσταση στον πίνακα με κυκλικούς δίσκους, κυρίως με σχεδίαση αντικειμένων όπως η πίτσα. Εφαρμόζουν την επανάληψη όταν υπάρχει δυσκολία κατανόησης και δεν χρησιμοποιούν την αριθμογραμμή. Για κάποιους μαθητές, οι δυσκολίες στα κλάσματα ενδέχεται να οφείλονται σε αδυναμίες σύγκρισης ακεραίων και δεκαδικών αριθμών, καθώς η μετάβαση από τους ακέραιους αριθμούς στα κλάσματα θεωρείται εξαιρετικά πολύπλοκη διαδικασία (Tall, 2004).

Τέλος, οι εκπαιδευτικοί θεωρούν ότι η χρήση κατάλληλου λογισμικού με αναπαραστάσεις των κλασμάτων μπορεί να βοηθήσει σημαντικά στην διδασκαλία των κλασμάτων. Επιπλέον, προτείνουν τη χρήση στον υπολογιστή μέχρι δύο αναπαραστάσεις ταυτόχρονα, καθώς έτσι θα μπορούσαν να βοηθηθούν αποτελεσματικά οι μαθητές. Τα χαρακτηριστικά που προτείνουν να έχει ένα εκπαιδευτικό λογισμικό για τα κλάσματα είναι α) η χρήση αναπαράστασης-μοντέλων επιφάνειας, β) χρήση σχεδιοκίνησης, γ) κατάλληλα παράδειγμα από την καθημερινότητα, δ) ασκήσεις διαβαθμισμένης δυσκολίας και ε) παροχή κατάλληλης βοήθειας, υποστήριξης και ανατροφοδότησης προς τους μαθητές κατά την επίλυση προβλημάτων με κλάσματα.

## Σχεδιασμός και ανάπτυξη διαδικτυακού περιβάλλοντος SKAFOS

Για την σχεδίαση του συστήματος λήφθηκαν υπόψη κάποια χαρακτηριστικά τόσο από την μελέτη της βιβλιογραφίας που παρουσιάστηκε, όσο και από τις συνεντεύξεις των εκπαιδευτικών που παρουσιάστηκαν. Συγκεκριμένα:

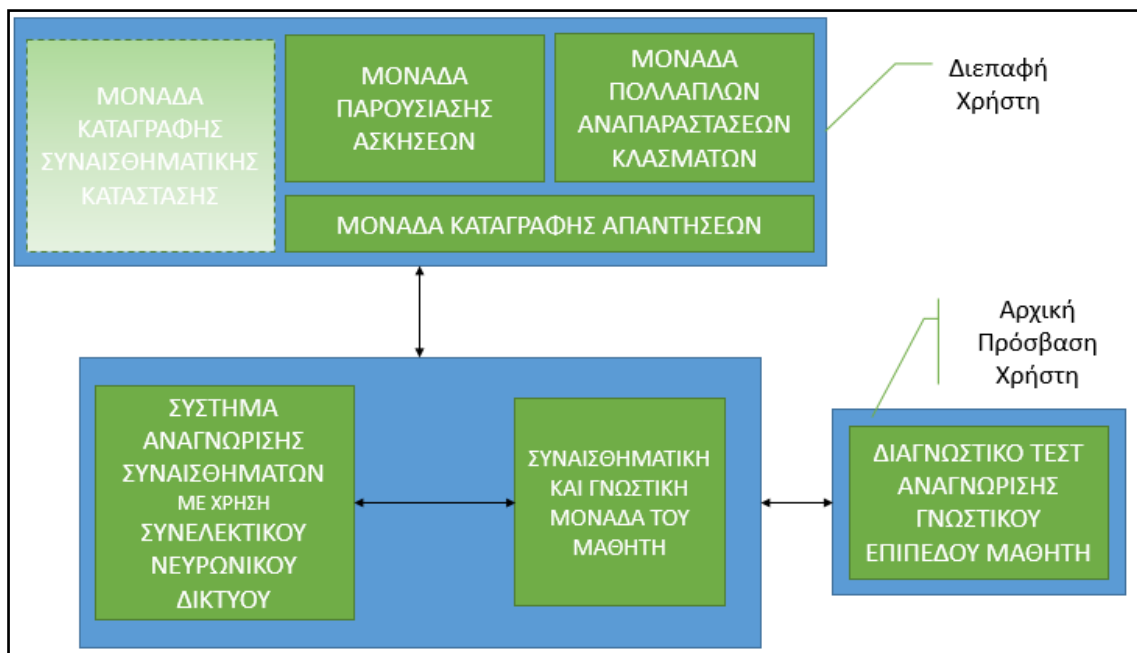
- Από την επισκόπηση των ανοιχτών συστημάτων για την διδασκαλία των κλασμάτων μελετήθηκε ο τρόπος που παρουσιάζονται τα κλάσματα καθώς και οι δραστηριότητες σε αυτά. Έτσι αξιοποιήθηκαν το περιεχόμενο που παρουσίαζαν τα ανοιχτά συστήματα για τα

κλάσματα, ο τρόπος διαδραστικότητά τους καθώς και ο τεχνικός σχεδιασμός αυτών των συστημάτων.

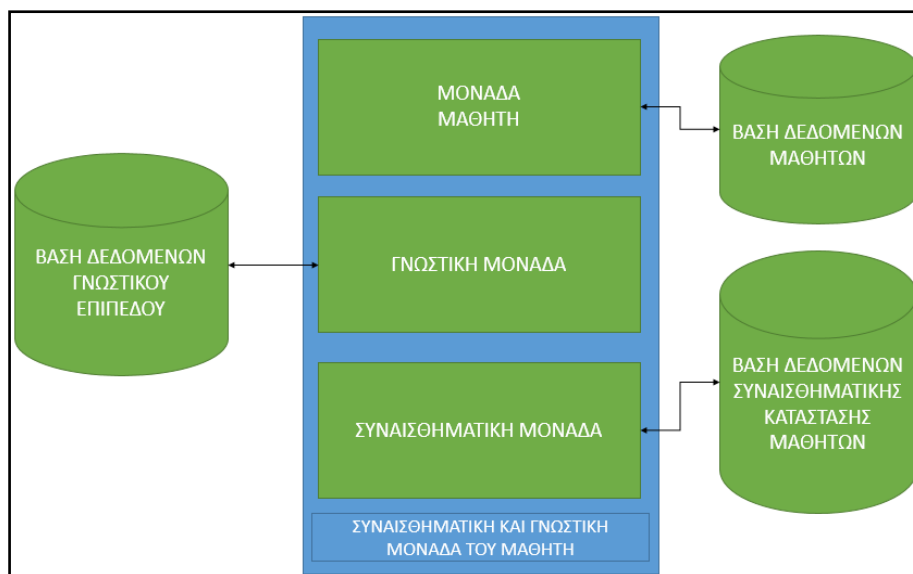
- Από ανάλυση της συζήτησης με τους εκπαιδευτικούς της ομάδας εστίασης αξιοποιήθηκαν σημαντικές πληροφορίες και ενσωματώθηκαν στα λειτουργικά χαρακτηριστικά του συστήματος. Συγκεκριμένα, η κλασματική μονάδα και η σύγκριση κλασμάτων, δύο εκ των δυσκολιών που συναντούν οι μαθητές, υλοποιήθηκαν με αναπαραστάσεις σε λογισμικό. Επίσης οι κυκλικοί δίσκοι και τα παραλληλόγραμμα που ανέφεραν σαν τρόπο διδασκαλίας ήταν από τους βασικούς τρόπους αναπαράστασης των κλασμάτων στο προτεινόμενο σύστημα. Επιπλέον από τις προτάσεις των εκπαιδευτικών για την χρήση λογισμικού για τα κλάσματα, υιοθετήθηκαν οι περισσότερες από τις προτάσεις τους (χρήση μοντέλων επιφάνειας, σχεδιοκίνηση, ασκήσεις διαβαθμισμένης δυσκολίας).

Η τρίτη φάση περιλαμβάνει το σχεδιασμό του διαδικτυακού περιβάλλοντος μάθησης για τα κλάσματα SKAFOS. Το προτεινόμενο σύστημα ακολουθεί την αρχιτεκτονική ενός τυπικού Ευφυούς Συστήματος Διδασκαλίας (Intelligent Tutoring System, ITS) και περιλαμβάνει (Nkambou, Mizoguchi & Bourdeau, 2010): α) το γνωσιακό/γνωστικό μοντέλο, β) το μοντέλο μαθητή, γ) το μοντέλο διδασκαλίας, και δ) το μοντέλο διεπαφής χρήστη.

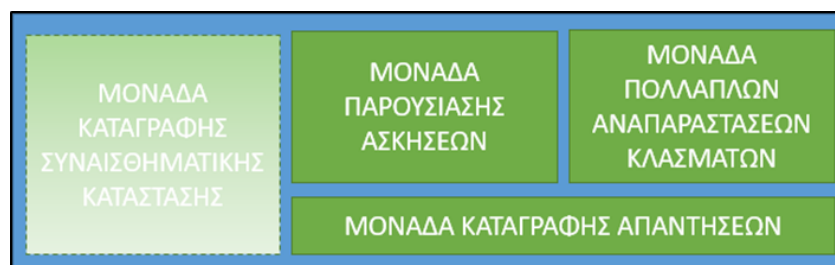
Στο Σχήμα 7 παρουσιάζεται η αρχιτεκτονική του διαδικτυακού περιβάλλοντος μάθησης SKAFOS. Ειδικότερα, το σύστημα αποτελείται από τρεις βασικές μονάδες, τη Μονάδα Μαθητή, τη Γνωστική Μονάδα και την Συναισθηματική Μονάδα. Αυτές οι τρεις μονάδες αποτελούν την μονάδα AKUS (Affective and Knowledge Unit of Student). Κάθε μια από τις τρεις συνιστώσες μονάδες συνεργάζεται με τη βάση δεδομένων που περιέχει τις αντίστοιχες πληροφορίες ανά μονάδα. Όταν εισέλθει ο μαθητής για πρώτη φορά στο σύστημα, γίνεται καταγραφή του επιπέδου γνώσης στα κλάσματα, μέσα από ένα διαγνωστικό τεστ κλασμάτων και στη συνέχεια αποθηκεύονται τα σχετικά δεδομένα στην κατάλληλη μονάδα του AKUS.



Σχήμα 7. Αρχιτεκτονική του διαδικτυακού περιβάλλοντος μάθησης SKAFOS



Σχήμα 8. Η μονάδα AKUS



Σχήμα 9. Το Μοντέλο Διεπαφής Χρήστη του προτεινόμενου συστήματος SKAFOS

Στο Σχήμα 8 φαίνεται η μονάδα AKUS, που αποτελείται από τη Μονάδα Μαθητή, τη Γνωστική Μονάδα και τη Συναισθηματική Μονάδα. Η Μονάδα Μαθητή, που είναι ουσιαστικά το Μοντέλο Μαθητή, επεξεργάζεται πληροφορίες για τα στοιχεία που αναφέρονται στο γνωστικό του επίπεδο στα κλάσματα, καθώς και την συναισθηματική του κατάσταση για τις πολλαπλές αναπαραστάσεις των κλασμάτων αλλά και για τα κλάσματα γενικότερα. Η Γνωστική Μονάδα περιλαμβάνει τις διάφορες ασκήσεις των κλασμάτων που παρέχει το σύστημα. Τέλος, η Συναισθηματική Μονάδα καταγράφει και παρέχει δεδομένα για τη συναισθηματική κατάσταση των μαθητών, μετά την ολοκλήρωση των ασκήσεων και των προβλημάτων.

Το Σχήμα 9 δείχνει το Μοντέλο Διεπαφής Χρήστη του συστήματος SKAFOS, το οποίο αποτελείται από τέσσερις μονάδες: α) τη Μονάδα Παρουσίασης Δραστηριοτήτων β) τη Μονάδα Πολλαπλών Αναπαραστάσεων των κλασμάτων, γ) τη Μονάδα Καταγραφής Απαντήσεων και δ) τη Μονάδα Καταγραφής Συναισθηματικής Κατάστασης του μαθητή. Η Μονάδα Παρουσίασης Ασκήσεων είναι υπεύθυνη για την εμφάνιση στο μαθητή των ασκήσεων που καλείται να επιλύσει. Στην Μονάδα Πολλαπλών Αναπαραστάσεων Κλασμάτων εμφανίζονται οι διαθέσιμες αναπαραστάσεις κάθε κλάσματος, έτσι ώστε να μπορεί ο μαθητής να τις αξιοποιήσει κατά την επίλυση κάθε άσκησης. Στην Μονάδα Καταγραφής Απαντήσεων, η οποία επικοινωνεί με την μονάδα AKUS, γίνεται καταγραφή των απαντήσεων του μαθητή στη συγκεκριμένη άσκηση.

Τέλος, υπάρχει η Μονάδα Καταγραφής Συναισθηματικής Κατάστασης του μαθητή όπου, με τη βοήθεια της κάμερας του ηλεκτρονικού υπολογιστή, αποστέλλονται για επεξεργασία και καταγράφονται δεδομένα σχετικά με τα συναισθήματα του μαθητή κατά την ενασχόλησή του

με την συγκεκριμένη άσκηση και την συγκεκριμένη αναπαράσταση κλάσματος. Η αναγνώριση των συναισθημάτων του μαθητή γίνεται με την βοήθεια ενός Συνελκτικού Νευρωνικού Δικτύου, το οποίο αναγνωρίζει επτά διαφορετικά συναισθήματα: θυμό, δυσαρέσκεια, φόβο, ευτυχία, θλίψη, έκπληξη και ουδέτερο συναίσθημα. Η αρχιτεκτονική του Συνελκτικού Νευρωνικού Δικτύου δείχνεται στο Σχήμα 10.

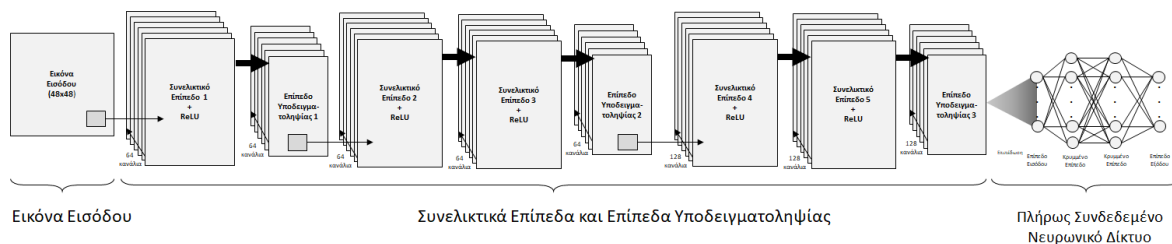
Το CNN είναι μια τροποποιημένη έκδοση των παραδοσιακών Νευρωνικών Δικτύων. Ταξινομεί τις εικόνες σύμφωνα με τα συναισθήματα που αναγνωρίζει αναλύοντας μια εικόνα προσώπου. Το μοντέλο CNN χωρίζεται σε τρία μέρη: α) το τμήμα εισόδου, όπου ένας πίνακας 48x48 με το πρόσωπο σε ασπρόμαυρη μορφή χρησιμοποιείται ως είσοδος για το σύστημα, β) τα Συνελκτικά επίπεδα (convolutional layers) και τα επίπεδα συγκέντρωσης (pooling layers) και γ) το πλήρως συνδεδεμένο Νευρωνικό Δίκτυο, που χρησιμοποιείται από το σύστημα για να ταξινομεί τα εξαγόμενα χαρακτηριστικά.

Η ανάπτυξη του συστήματος παρουσίασης και αναπαράστασης κλασμάτων έγινε σε Javascript. Η αναγνώριση συναισθημάτων του CNN έγινε με εφαρμογή που αναπτύχθηκε στη γλώσσα προγραμματισμού Python. Τέλος, η ενσωμάτωση των επιμέρους συστημάτων και η ανάπτυξη του όλου διαδικτυακού συστήματος έγινε σε HTML5 και PHP.

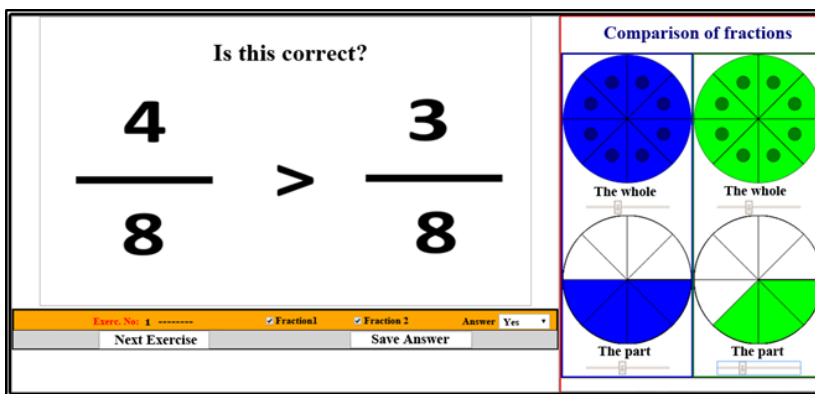
### Λειτουργικά χαρακτηριστικά και αναπαραστάσεις του συστήματος SKAFOS

Αρχικά ζητείται από το μαθητή να κάνει εγγραφή στο σύστημα, όταν εισέρχεται για πρώτη φορά. Τα στοιχεία που ζητούνται είναι το όνομα χρήστη, ένας λογαριασμός ηλεκτρονικού ταχυδρομείου και ένας κωδικός εισόδου. Από την στιγμή που θα καταχωρηθούν τα στοιχεία του μαθητή στην βάση δεδομένων του συστήματος, ο μαθητής μπορεί να χρησιμοποιεί το σύστημα ελεύθερα. Όταν ο μαθητής εισέρχεται για πρώτη φορά στο σύστημα θα πρέπει να απαντήσει σε ένα διαγνωστικό τεστ που αφορά το επίπεδο των γνώσεων του στα κλάσματα. Στη συνέχεια, ο μαθητής εισέρχεται στο σύστημα και ανάλογα με το επίπεδο γνώσεων του εκτελεί τις δραστηριότητες στα κλάσματα που επιλέγονται από μια βάση διαβαθμισμένων ασκήσεων. Το σύστημα παρέχει τη δυνατότητα στους μαθητές να επιλύσουν προβλήματα με διάφορες αναπαραστάσεις κλασμάτων. Στην παρούσα φάση το σύστημα υποστηρίζει μόνο την σύγκριση δύο κλασμάτων με πέντε διαφορετικές αναπαραστάσεις. Στο μέλλον πρόκειται να ενσωματωθούν οι τέσσερις πράξεις (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση) με πολλαπλές αναπαραστάσεις κλασμάτων.

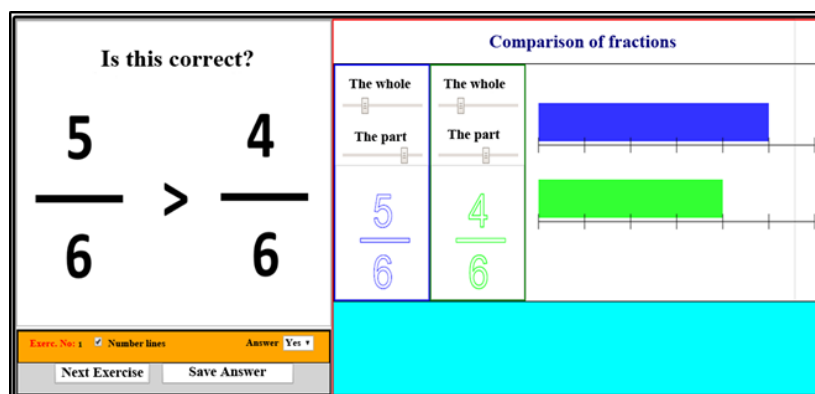
Αρχικά το πρόβλημα δίνεται μόνο σε μορφή κειμένου, χωρίς χρήση άλλης αναπαράστασης κλάσματος για βοήθεια. Με επιλογή του μαθητή, κάθε άσκηση μπορεί να υποστηρίζεται με διαφορετικές αναπαραστάσεις. Στο Σχήμα 11 δείχνεται μια οθόνη του συστήματος με τη διατύπωση του προβλήματος και τις αντίστοιχες αναπαραστάσεις των κλασμάτων σε μορφή κυκλικών δίσκων και μερών των κυκλικών δίσκων. Στο Σχήμα 12 δείχνεται η αναπαράσταση κλασμάτων σε μορφή ραβδογράμματος.



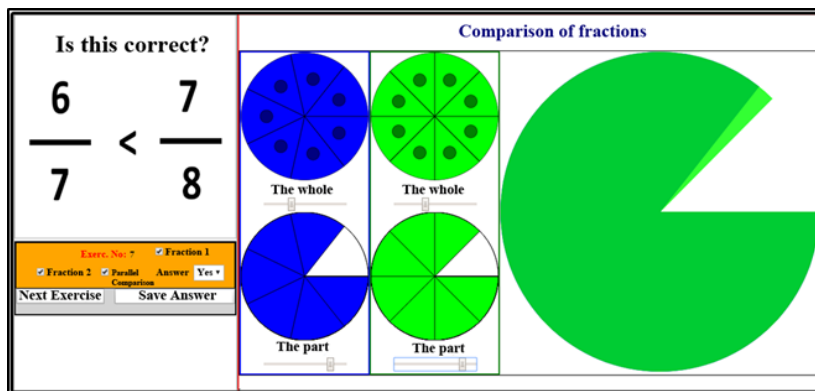
Σχήμα 10. Η αρχιτεκτονική του Συνελκτικού Νευρωνικού Δικτύου για την αναγνώριση συναισθημάτων



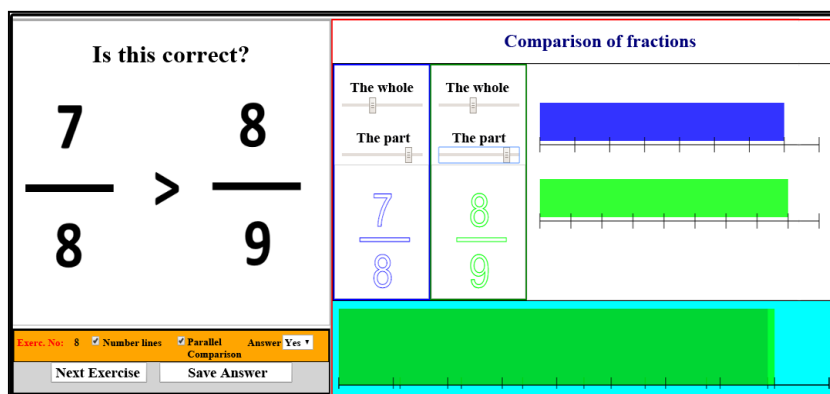
Σχήμα 11. Οθόνη του συστήματος με τη σύγκριση κλασμάτων σε μορφή κυκλικών δίσκων



Σχήμα 12. Οθόνη του συστήματος με τη σύγκριση κλασμάτων σε μορφή ραβδογράμματος



Σχήμα 13. Σύγκριση κλασμάτων με χρήση αναπαράστασης δίσκου



Σχήμα 14. Σύγκριση με χρήση αναπαράστασης ραβδογράμματος



Επιπλέον, δίνεται η δυνατότητα σύγκρισης δύο κλασμάτων με την ταυτόχρονη εμφάνισή τους στο ίδιο πλαίσιο με την μορφή κυκλικών δίσκων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 13. Τέλος, δίνεται η δυνατότητα σύγκρισης των δύο κλασμάτων με ταυτόχρονη εμφάνιση στο ίδιο πλαίσιο σε μορφή ραβδογράμματος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 14.

## Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται ο σχεδιασμός και η ανάπτυξη του διαδικτυακού περιβάλλοντος SKAFOS για την υποστήριξη και εξάσκηση μαθητών του δημοτικού στα κλάσματα. Η μεθοδολογία ανάπτυξης του συγκεκριμένου περιβάλλοντος μάθησης βασίστηκε αρχικά στην επισκόπηση ανοικτών συστημάτων και περιβαλλόντων μάθησης της βιβλιογραφίας, τα οποία παρουσιάστηκαν αναλυτικά και αξιολογήθηκαν με βάση συγκεκριμένα κριτήρια. Στη συνέχεια, αξιοποιήθηκαν τα αποτελέσματα της μελέτης μιας ομάδας εστίασης έμπειρων εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης που αφορούν τις απόψεις, τις διδακτικές πρακτικές και τις μεθόδους που χρησιμοποιούν για τη διδασκαλία των κλασμάτων. Από την ανάλυση της συζήτησης των εκπαιδευτικών αναδείχθηκαν σημαντικές πληροφορίες για τους παράγοντες σχεδιασμού και τις αναπαραστάσεις που υιοθετήθηκαν, τελικά, για την ανάπτυξη μιας σειράς ασκήσεων σύγκρισης κλασμάτων που εντάχθηκαν στη νέα διαδικτυακή πλατφόρμα υποστήριξης των μαθητών.

Τα βασικά χαρακτηριστικά του συστήματος είναι ότι είναι διαδικτυακό και μπορεί να εκτελεστεί σε οποιονδήποτε από τους γνωστούς φυλλομετρητές. Το σύστημα υποστηρίζει τέσσερις διαφορετικούς τύπους αναπαράστασης κλασμάτων (κυκλικός δίσκος, ραβδόγραμμα και ταυτόχρονη εμφάνισή τους στο ίδιο πλαίσιο) που αναμένεται αν ενισχύσουν τους μαθητές για την κατανόηση της κλασματικής μονάδας και την επίλυση προβλημάτων σύγκρισης κλασμάτων. Επίσης, παρέχει στους μαθητές κατάλληλες οδηγίες κατά την επίλυση ασκήσεων.

Το σύστημα αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως διδακτικό εργαλείο. Οι εκπαιδευτικοί έχουν τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουν συγκεκριμένα παραδείγματα ως μέσο επίδειξης ή υποστήριξης των δραστηριοτήτων των μαθητών τους, κατά την διδασκαλία των κλασμάτων στην τάξη. Επίσης, μπορούν να σχεδιάσουν κατάλληλες παρεμβάσεις για συγκεκριμένες δυσκολίες των μαθητών.

Όμως το δυναμικό του συστήματος SKAFOS μπορεί να αξιοποιηθεί στον μέγιστο βαθμό όταν χρησιμοποιείται από τους ίδιους τους μαθητές, ως γνωστικό-μαθησιακό εργαλείο που υποστηρίζει τον πειραματισμό, τη διερεύνηση και την οικοδόμηση βασικών εννοιών και διαδικασιών επίλυσης προβλημάτων στα κλάσματα. Σε αυτό αναμένεται να συμβάλλουν τόσο η χρήση των πολλαπλών αναπαραστάσεων όσο και το σύστημα αναγνώρισης των συναισθημάτων του μαθητή κατά την διαδικασία επίλυσης ασκήσεων ή προβλημάτων. Στην παρούσα φάση σχεδιάζεται η εφαρμογή του συστήματος σε πραγματικές συνθήκες τάξης και η μελέτη του τρόπου που οι μαθητές προσεγγίζουν προβλήματα σύγκρισης κλασμάτων και των μαθησιακών αποτελεσμάτων που επιτυγχάνουν.

Στα μελλοντικά μας ερευνητικά σχέδια είναι η ενσωμάτωση στην πλατφόρμα και άλλων βασικών πράξεων κλασμάτων (όπως η πρόσθεση και η αφαίρεση) και ο εμπλουτισμός με περισσότερες ασκήσεις. Επιπλέον, ζητήματα όπως η βελτίωση της διεπαφής χρήστη ώστε να είναι φιλικότερη, η βελτίωση της πληροφορίας αναγνώρισης συναισθημάτων, η δυνατότητα παρακολούθησης των επιδόσεων των μαθητών είναι θέματα και άξονες μελλοντικών βελτιώσεων του συστήματος SKAFOS.

## Αναφορές

- Asikainen, H., Hailikari, T., & Mattsson, M. (2018). The interplay between academic emotions, psychological flexibility and self-regulation as predictors of academic achievement. *Journal of Further and Higher Education*, 42(4), 439-453.
- Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 91-125). New York, NY: Academic Press.
- Bostan, C. G. (2015). Focus-group research on modern techniques and multimedia tools implementation in teaching practice. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 180, 1444-1450.
- Boulet, G. (1998). Didactical Implications of Children's Difficulties in Learning the Fraction Concept. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20(4), 19-34.
- Braun, V., & Clarke, V. (2012). Thematic analysis. In H. Cooper (Ed.), *APA Handbook of Research Methods in Psychology* (pp. 51-77). Washington, DC: American Psychological Association.
- Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understanding of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 64(3), 293-316.
- Chinnappan, M., & Desplat, B. (2012). Contextualisation of fractions: Teachers' pedagogical and mathematical content knowledge for teaching. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia*, 35(1), 43-59.
- Choy, B. H. (2014). Teachers' productive mathematical noticing during lesson preparation. In C. Nikol, P. Liljedahl, S. Oesterle & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 2, pp. 297-304). Vancouver, Canada: PME.
- Davis, G., Hunting, R. P., & Pearn, C. (1993). What might a fraction mean to a child and how would a teacher know?. *The Journal of Mathematical Behavior*, 12(1), 63-76.
- Dormido, S., Esquembre, F., Farias, G., & Sanchez, J. (2005). Adding interactivity to existing Simulink models using Easy Java Simulations. *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control* (pp. 4163-4168). Seville, Spain: IEEE.
- Ferrari, P. L. (2003). Abstraction in mathematics. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B: Biological Sciences*, 358, 1225-1230. doi:10.1098/rstb.2003.1316.
- Fraction Lab (2019). *About Fractions Lab*. Ανακτήθηκε στις 10 Δεκεμβρίου 2019, από <http://fractionslab.lkl.ac.uk>
- Grawemeyer, B., Holmes, W., Gutiérrez-Santos, S., Hansen, A., Loibl, K., & Mavrikis, M. (2015a). Light-bulb moment? Towards adaptive presentation of feedback based on students' affective state. *Proceedings of the 20th International Conference on Intelligent User Interfaces* (pp. 400-404). New York, NY: Association for Computing Machinery.
- Grawemeyer, B., Mavrikis, M., Holmes, W., Gutiérrez-Santos, S., Wiedmann, M., & Rummel, N. (2017). Affective learning: improving engagement and enhancing learning with affect-aware feedback. *User Modeling and User-Adapted Interaction*, 27(1), 119-158.
- Grawemeyer, B., Mavrikis, M., Holmes, W., Hansen, A., Loibl, K., & Gutiérrez-Santos, S. (2015b). Affect matters: Exploring the impact of feedback during mathematical tasks in an exploratory environment. In C. Conati, N. Heffernan, A. Mitrovic & M. Verdejo (Eds.), *Artificial Intelligence in Education (AIED 2015), Lecture Notes in Computer Science* (Vol. 9112, pp. 595-599). Cham, Switzerland: Springer International Publishing.
- Hakim, L. L., Alghadari, F., & Widodo, S. A. (2019). Virtual manipulatives media in mathematical abstraction. *Journal of Physics: Conference Series*, 1315(1), 1-6.
- Hasemann, K. (1981). On difficulties with fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 71-87.
- Holmes W., Mavrikis M., Hansen A., & Grawemeyer B. (2015). Purpose and Level of Feedback in an Exploratory Learning Environment for Fractions. In C. Conati, N. Heffernan, A. Mitrovic & M. Verdejo (Eds.), *Proceedings of the 17th International Conference "Artificial Intelligence in Education"* (pp. 620-623), Madrid, Spain: Springer, Cham.
- Jordan, N. C., Hansen, N., Fuchs, L. S., Siegler, R. S., Gersten, R., & Micklos, D. (2013). Developmental predictors of fraction concepts and procedures. *Journal of Experimental Child Psychology*, 116(1), 45-58.
- Kara, F., & Incikabi, L. (2018). Sixth grade students' skills of using multiple representations in addition and subtraction operations in fractions. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 10(4), 463-474.
- Mathtutor (2019). *Fractions Tutor: Learning with graphical representations*. Ανακτήθηκε στις 7 Απριλίου 2020, από <https://mathtutor.web.cmu.edu/alternate>
- Nkambou, R., Mizoguchi, R., & Bourdeau, J. (2010). *Advances in Intelligent Tutoring Systems*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
- Pekrun, R. (1992). The impact of emotions on learning and achievement: Towards a theory of cognitive/motivational mediators. *Applied Psychology*, 41(4), 359-376.
- Pekrun, R., Goetz, T., Frenzel, A. C., Barchfeld, P., & Perry, R. P. (2011). Measuring emotions in students' learning and performance: The Achievement Emotions Questionnaire (AEQ). *Contemporary Educational Psychology*, 36(1), 36-48.
- Perander, K., Londen, M., Holm, G., & Tiihonen, S. (2020). Becoming a university student: An emotional rollercoaster. *Högre Utbildning*, 10(1), 1-12.
- PhET (2019). *Physics Education Technology*. Ανακτήθηκε στις 10 Απριλίου 2020, από <https://phet.colorado.edu>

- Postareff, L., Mattsson, M., Lindblom-Ylänne, S., & Hailikari, T. (2017). The complex relationship between emotions, approaches to learning, study success and study progress during the transition to university. *Higher Education*, 73(3), 441-457.
- Rau, M. a., Aleven, V., & Rummel, N. (2009). Intelligent tutoring systems with multiple representations and self-explanation prompts support learning of fractions. In V. Dimitrova, R. Mizoguchi & B. du Boulay (Eds.), *Proceedings of the 14th International Conference on Artificial Intelligence in Education* (pp. 441- 448). Amsterdam, the Netherlands: IOS Press.
- Rau, M. A., Aleven, V., & Rummel, N. (2013). Interleaved practice in multi-dimensional learning tasks: Which dimension should we interleave?. *Learning and Instruction*, 23, 98-114.
- Reimer, K., & Moyer, P. S. (2005). Third-graders learn about fractions using virtual manipulatives: A classroom study. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 24(1), 5-25.
- Reys, R., Lindquist, M., Lambdin, D. V., & Smith, N. L. (2015). *Helping Children Learn Mathematics* (11th edition). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
- Sartono, S., & Karso, K. (2020). Are the fractions difficult? A case study at Elementary School 033 Asmi. *Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Conference on Elementary Education "Global Perspective on 21<sup>st</sup> Elementary Education"* (Vol. 2, No. 1, pp. 1029-1043). Bandung, Indonesia: UPI PRESS.
- Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2015). Conceptual knowledge of fraction arithmetic. *Journal of Educational Psychology*, 107(3), 909-918.
- Tall, D. (2004). Thinking through three worlds of mathematics. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 281-288.
- Trigwell, K., Ellis, R. A., & Han, F. (2012). Relations between students' approaches to learning, experienced emotions and outcomes of learning. *Studies in Higher Education*, 37(7), 811-824.
- Tunç-Pekkan, Z. (2015). An analysis of elementary school children's fractional knowledge depicted with circle, rectangle, and number line representations. *Educational Studies in Mathematics*, 89(3), 419-441.
- Van de Walle, J. A., Karp, K., & Bay-Williams, J. M. (2015). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally* (9th ed.). Boston, MA: Pearson Education Limited.
- Wilson, V. (1997). Focus groups: a useful qualitative method for educational research?. *British Educational Research Journal*, 23(2), 209-224.
- WolframAlpha (2020). *WolframAlpha for Educators*. Ανακτήθηκε στις 15 Απριλίου 2020, από <https://www.wolframalpha.com/educators>
- Wyberg, T., Whitney, S. R., Cramer, K. A., Monson, D. S., & Leavitt, S. (2012). Unfolding fraction multiplication. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 17(5), 288-294.
- Yang, D. C., & Tsai, Y. F. (2010). Promoting sixth graders' number sense and learning attitudes via technology-based environment. *Journal of Educational Technology & Society*, 13(4), 112-125.
- Yeh, A., & Nason, R. A. (2008). Mixing colours: An ICT tool based on a semiotic framework for mathematical meaning-making about ratio and fractions. In M. Goos, R. Brown & K. Makar (Eds.), *Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 2, pp. 605-611). Sydney, Australia: MERGA Inc.
- Zakaria, E., & Nordin, N. M. (2008). The effects of mathematics anxiety on matriculation students as related to motivation and achievement. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 4(1), 27-30.
- Βούργιας, Χ., & Χρυστοστόμου-Βούργια, Σ. (2006). Στάσεις και απόψεις των μαθητών και των γονιών για το μάθημα των μαθηματικών: Αρωγός ή τροχοπέδη;. Στο Ε. Φτιάκα, Α. Γαγάτσης, Ι. Ηλία & Μ. Μοδέστου (επιμ.), *Πρακτικά ΙΧ Παγκόπριου Συνεδρίου Παιδαγωγικής Εταιρείας Κύπρου & Κυπριακού Ομίλου Εννιαίας Εκπαίδευσης* (σ. 135-144). Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου.
- Τζιμογιάννης, Α. (2019). *Ψηφιακές Τεχνολογίες και Μάθηση του 21<sup>ου</sup> Αιώνα*. Αθήνα: Κριτική.
- Τσιώλης, Γ. (2017). *Θεματική Ανάλυση Ποιοτικών Δεδομένων*. Πάτρα: Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο.
- Φιλίππου, Γ., & Χρίστου, Κ. (1998). Συναισθηματικός τομέας, αριθμοφοβία και διδασκαλία των μαθηματικών. Στο Μ. Καϊλα (επιμ.), *Η σχολική αποτυχία. Από την οικογένεια του σχολείου στο σχολείο της οικογένειας* (σ. 75-152). Αθήνα: Ελληνικά γράμματα.
- Φιλίππου, Γ., & Χρίστου, Κ. (2002). *Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Εκδόσεις Γ. Δαρδανός.
- Φωτόδεντρο (2019). *Μαθησιακά Αντικείμενα*. Ανακτήθηκε στις 14 Απριλίου 2020, <http://photodentro.edu.gr/lor>

Αναφορά στο άρθρο ως: Μαστοροδήμος, Δ., Τζιμογιάννης, Α. & Χατζηχριστοφής, Σ. Α. (2020). Σχεδιασμός και ανάπτυξη διαδικτυακής πλατφόρμας μάθησης και αναγνώρισης της συναισθηματικής κατάστασης μαθητή κατά την επίλυση προβλημάτων με κλάσματα. *Θέματα Επιστημών και Τεχνολογίας στην Εκπαίδευση*, 13(1/2), 7-32.

<http://earthlab.uoi.gr/thete/index.php/thete>