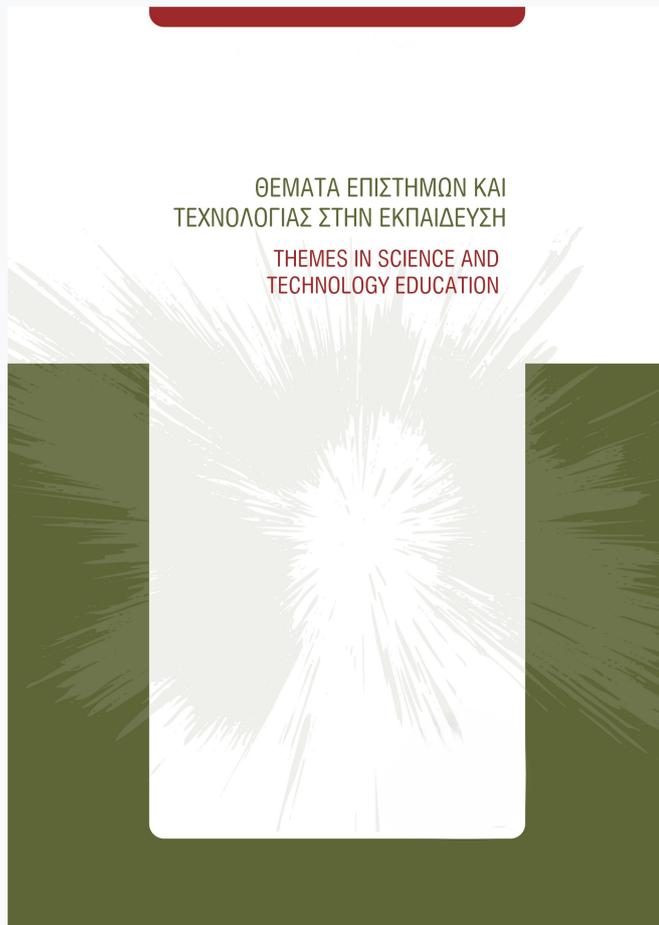


## Themes in Science and Technology Education

Vol 6, No 1-2 (2013)



### Μη γραμμικά δυναμικά συστήματα στη διδασκαλία των Φυσικών Επιστημών

Δημήτρης Σταύρου

#### To cite this article:

Σταύρου Δ. (2013). Μη γραμμικά δυναμικά συστήματα στη διδασκαλία των Φυσικών Επιστημών. *Themes in Science and Technology Education*, 6(1-2), 49–66. Retrieved from <https://ejournals.epublishing.ekt.gr/index.php/thete/article/view/44532>

# Μη γραμμικά δυναμικά συστήματα στη διδασκαλία των Φυσικών Επιστημών

Δημήτρης Σταύρου  
[dstavrou@edc.uoc.gr](mailto:dstavrou@edc.uoc.gr)

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Κρήτης

**Περίληψη:** Στην παρούσα εργασία γίνεται μια συνοπτική παρουσίαση ερευνών που υλοποιήθηκαν στο πλαίσιο του προγράμματος «Διδακτική Αναδόμηση μη Γραμμικών Δυναμικών Συστημάτων». Στόχο των ερευνών αυτών αποτελεί η διερεύνηση της δυνατότητας να διδαχθούν βασικές ιδέες ντετερμινιστικού χάους, αυτοοργάνωσης και φράκταλ και η καταγραφή των αντίστοιχων διαδικασιών μάθησης. Τα ερευνητικά δεδομένα είναι ενθαρρυντικά για τη διδασκαλία μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων και παρέχουν κατευθυντήριες γραμμές, που μπορούν να αξιοποιηθούν σε μια ενδεχόμενη εισαγωγή μια τέτοιας θεματικής στη διδασκαλία των Φυσικών Επιστημών.

**Λέξεις κλειδιά:** Ντετερμινιστικό χάος, αυτοοργάνωση, φράκταλ, σύγχρονη φυσική, διαδικασίες μάθησης

## Εισαγωγή

Στο φυσικό κόσμο ερχόμαστε συχνά αντιμέτωποι με μια σειρά φαινομένων που χαρακτηρίζονται από υψηλή πολυπλοκότητα. Την τελευταία πενήνταετία πολλά από τα φαινόμενα αυτά περιγράφηκαν με τη χρήση μη γραμμικών εξισώσεων. Δημιουργήθηκε έτσι ένα νέο, διεπιστημονικό κατά βάση, πεδίο έρευνας, των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων, που πρόσφερε σημαντικές γνώσεις για τον τρόπο που λειτουργεί ο κόσμος γύρω μας. Γενικότερα η μελέτη μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων περιλαμβάνει διαδικασίες και φαινόμενα που συνοψίζονται κάτω από τους τίτλους «ντετερμινιστικό χάος» και «αυτοοργάνωση». Τόσο στο ντετερμινιστικό χάος όσο και σε συστήματα αυτοοργάνωσης εμφανίζονται ενίοτε δομές που παρουσιάζουν μια φράκταλ μορφή. Υπό την έννοια αυτή ντετερμινιστικό χάος, αυτοοργάνωση και φράκταλ μπορούν να θεωρηθούν ως όψεις των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων.

Η έρευνα στη Διδακτική των Φυσικών Επιστημών έχει αναγνωρίσει τη σημαντική συνεισφορά των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων στον επιστημονικό γραμματισμό (Σταύρου & Ασημόπουλος, 2011). Με τη διδασκαλία μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων φαίνεται να ικανοποιείται μια σειρά από στόχους της διδασκαλίας των φυσικών επιστημών, που σχετίζονται κυρίως με την εκμάθηση όψεων της φύσης της επιστήμης (Komorek & Duit, 2004). Πιο συγκεκριμένα, με βάση τα αποτελέσματα μιας έρευνας με ερωτηματολόγιο για την εκπαιδευτική αξία των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων, στην οποία συμμετείχαν 35 ειδικοί (experts) στον τομέα μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων που προέρχονταν από την εκπαιδευτική πράξη, τη διδακτική των φυσικών επιστημών αλλά και από περιοχές της επιστήμης όπως Φυσική, Χημεία κ.λ.π. η διδασκαλία μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων μπορεί να συνεισφέρει στον επιστημονικό γραμματισμό των μαθητευομένων με τους παρακάτω τρόπους (Komorek, Wendorff & Duit, 2002):

- Συμβάλλει στη διαμόρφωση μιας σύγχρονης κοσμοαντίληψης, η οποία περιλαμβάνει την πολυπλοκότητα και τη συστημική θεώρηση

- Ενισχύει τη γνωστική ανάπτυξη, η οποία συμβάλλει στη επεξεργασία μιας γνωστικής βάσης στις φυσικές επιστήμες, στον προσανατολισμό στην κοινωνία της γνώσης και στην ικανότητα επίλυσης πολύπλοκων προβλημάτων
- Επιτρέπει την ενασχόληση με βασικές έννοιες, αρχές, τρόπους σκέψης και μεθοδολογίες των σύγχρονων φυσικών επιστημών
- Επιτρέπει στους μαθητές να έρθουν σε επαφή με τους τρόπους εργασίας, τις δυνατότητες και τα όρια της επιστήμης και έτσι να αποκτούν γνώσεις για τη φύση των επιστημών
- Δίνει τη δυνατότητα για διαθεματική διδασκαλία εξαιτίας της εγγενούς διεπιστημονικής προσέγγισης του πεδίου.

Έτσι από τη δεκαετία κυρίως του 1990 υπάρχει ένα αυξανόμενο ενδιαφέρον των ερευνητών της Διδακτικής των Φυσικών Επιστημών για τη διδασκαλία βασικών ιδεών μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων. Η έρευνα αυτή περιλαμβάνει (Komorek, 2005): α) επιστημονική πληροφόρηση της εκπαιδευτικής κοινότητας για θέματα ντετερμινιστικού χάους, αυτοοργάνωσης και φράκταλ δομών, όπου συμπεριλαμβάνονται και οι επιπτώσεις της έρευνας στα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα στην εικόνα μας για τις Φυσικές Επιστήμες και τη λειτουργία του κόσμου (Hedrich, 1999; Kuhn, 1994; Schlichting, 1993), β) ανάπτυξη εκπαιδευτικών πειραμάτων (Nordmeier & Schlichting, 1997; Strizhak & Menzinger, 1996; van Hook & Schatz, 1997) και γ) σχεδιασμός και υλοποίηση διδασκαλίας (Adams & Russ, 1992; Bae, 2009; Chacón, Batres & Cuadros, 1992; Laws, 2004; Vacc, 1999). Οι παραπάνω έρευνες παρόλο που έχουν σημαντική συνεισφορά στο πεδίο της Διδασκαλίας μη γραμμικών Δυναμικών Συστημάτων, δεν λαμβάνουν εξίσου υπόψη το επιστημονικό αντικείμενο και τις ανάγκες των μαθητευομένων κατά το διδακτικό μετασχηματισμό που πραγματοποιούν. Η διδακτική ανάλυση που πραγματοποιείται βασίζεται κατά κύριο λόγο στο επιστημονικό περιεχόμενο από το οποίο προκύπτουν οι βασικές διαστάσεις του περιεχομένου, τα πειράματα και ο σχεδιασμός διδασκαλίας.

Έρευνες, στις οποίες το επιστημονικό αντικείμενο και οι μαθητευόμενοι λαμβάνονται εξίσου υπόψη έχουν πραγματοποιηθεί στο πλαίσιο του προγράμματος "Διδακτική Αναδόμηση Μη Γραμμικών Δυναμικών Συστημάτων" που υλοποιήθηκαν στο Ινστιτούτο Παιδαγωγικής των Φυσικών Επιστημών και Μαθηματικών (IPN) στο Κίελο Γερμανίας, στο οποίο συμμετείχε και ο συγγραφέας. Οι ερευνητικές κατευθύνσεις στα πλαίσια του προγράμματος αυτού συμπεριλαμβάνουν την ανάλυση της δομής του επιστημονικού περιεχομένου, την ανάλυση της εκπαιδευτικής του αξίας, εμπειρικές έρευνες των ιδεών και διαδικασιών μάθησης μαθητών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σε πειραματικές συνθήκες καθώς και την ανάπτυξη, σχεδιασμό και αξιολόγηση πιλοτικών διδακτικών ενοτήτων σε συνθήκες τάξης από τους ερευνητές αλλά και από εκπαιδευτικούς σε συνεργασία με τους ερευνητές (Bell, 2004; Duit & Komorek, 1997; Duit, Komorek & Wilbers, 1997; Komorek et al., 2001; Komorek, Stavrou & Duit, 2003; Stavrou, Duit & Komorek, 2008; Stavrou & Duit, 2013). Βασίζόμενοι στα δεδομένα του προγράμματος αυτού διερευνήθηκαν επίσης διαδικασίες μάθησης σχετικές με βασικές ιδέες ντετερμινιστικού χάους σε μελλοντικούς δασκάλους πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στον ελλαδικό χώρο (Stavrou, Assimopoulos & Skordoulis, 2013; Ασημόπουλος, Σταύρου & Σκορδούλης, 2009; Σκορδούλης, 2013).

Οι έρευνες στο πλαίσιο του προαναφερόμενου προγράμματος χρησιμοποιούν ως μεθοδολογικό πλαίσιο το "Μοντέλο Διδακτικής Αναδόμησης" (Duit et al., 2012). Το μοντέλο αυτό έχει αναπτυχθεί ως ένα θεωρητικό πλαίσιο για έρευνες που εξετάζουν τη δυνατότητα να διδαχθούν βασικές έννοιες, ιδέες και αρχές των φυσικών επιστημών. Ο κύριος στόχος του είναι η ανάπτυξη διδακτικών μαθησιακών σειρών φέρνοντας σε «ισορροπία» τη δομή του επιστημονικού περιεχομένου και τις ανάγκες των μαθητευομένων (π.χ. προϋπάρχουσες

αντιλήψεις, ενδιαφέροντα, μαθησιακές διαδικασίες κλπ). Στο μοντέλο αυτό η διασάφηση και η ανάλυση του επιστημονικού περιεχομένου, η διερεύνηση απόψεων και διαδικασιών μάθησης των εκπαιδευομένων καθώς και ο σχεδιασμός και η αξιολόγηση των μαθησιακών περιβαλλόντων συνδέονται στενά μεταξύ τους (Σχήμα 1). Αυτό σημαίνει ότι η διαδικασία της Διδακτικής Αναδόμησης βασίζεται στη στενή αλληλεπίδραση και επανατροφοδότηση μεταξύ των συστατικών μερών του μοντέλου (Σταύρου, 2006).

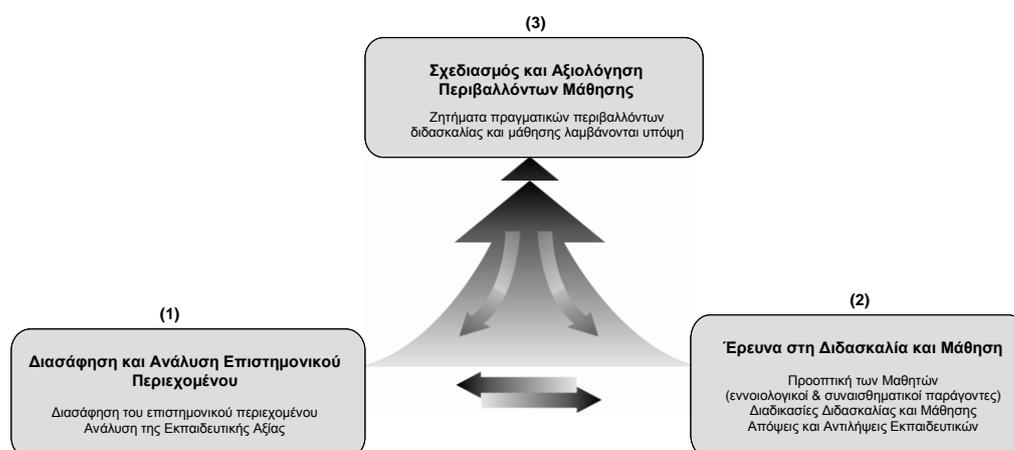
Στην παρούσα εργασία γίνεται μια συνοπτική παρουσίαση των σημαντικότερων αποτελεσμάτων του προγράμματος "Διδακτική Αναδόμηση Μη Γραμμικών Δυναμικών Συστημάτων". σχετικά με τη Διδασκαλία μη Γραμμικών Δυναμικών Συστημάτων. Στόχος του αποτελεί να παρουσιάσει τα βασικά συμπεράσματα σε σχέση με τη διδασκαλία μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων, όπως αυτά προκύπτουν από έρευνες που υλοποιήθηκαν στο πλαίσιο του παραπάνω προγράμματος.

Η επικέντρωση στο πρόγραμμα αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι έρευνες ακολουθούν με συνέπεια ως μεθοδολογικό πλαίσιο το "Μοντέλο Διδακτικής Αναδόμησης". Δηλαδή λαμβάνουν εξίσου υπόψη τόσο το επιστημονικό αντικείμενο όσο και τις διαδικασίες μάθησης των μαθητευομένων κατά το διδακτικό μετασχηματισμό που πραγματοποιούν.

Για τα εμπειρικά δεδομένα περιγράφονται κατά βάση δύο έρευνες: μία με μαθητές Λυκείου και μία με φοιτητές Παιδαγωγικού Τμήματος. Η επικέντρωση σε αυτές τις έρευνες οφείλεται στο γεγονός ότι αξιοποιούν και ενσωματώνουν όλα τα ευρήματα των προηγούμενων ερευνών του προγράμματος και διερευνούν διαδικασίες μάθησης σε διαφορετικές ομάδες εκπαιδευομένων (μαθητές και φοιτητές).

## Το επιστημονικό περιεχόμενο προς διδασκαλία

Όπως υπαγορεύει το μοντέλο της Διδακτικής Αναδόμησης η διδακτική ανάλυση του επιστημονικού περιεχομένου δε βασίζεται αποκλειστικά και μόνο στο επιστημονικό περιεχόμενο, όπως αυτό παρουσιάζεται π.χ. σε επιστημονικά βιβλία, άρθρα κ.λπ., αλλά λαμβάνονται υπόψη και οι αντιλήψεις καθώς και οι διαδικασίες μάθησης των μαθητών. Στη συνέχεια παραθέτονται συνοπτικά οι βασικές διαστάσεις αυτής της διδακτικής ανάλυσης σε σχέση με φαινόμενα ντετερμινιστικού χάους, δομών αυτοργάνωσης και δομών φράκταλ (Stavrou, 2004).



Σχήμα 1. Το μοντέλο Διδακτικής Αναδόμησης

### **Ντετερμινιστικό χάος**

Τα ντετερμινιστικά χαοτικά συστήματα αποτελούν μια σημαντική ομάδα συστημάτων που περιγράφονται από μη γραμμικά μοντέλα (Schuster, 1989). Τα συστήματα αυτά παρουσιάζουν στη χρονική τους εξέλιξη μια ακανόνιστη, τυχαία συμπεριφορά, η οποία όμως διέπεται από μια σαφώς καθορισμένη νομοτέλεια. Ωστόσο, μικρές διακυμάνσεις στον καθορισμό της αρχικής κατάστασης ενισχύονται εκθετικά, με αποτέλεσμα συστήματα με αρχικά ελάχιστα διαφορετικές συνθήκες να εξελίσσονται με την πάροδο του χρόνου τελείως διαφορετικά. Μια μικρή διακύμανση μπορεί επομένως να λάβει μακροσκοπικές διαστάσεις (Crutchfield et al., 1986). Εξαιτίας των αναπόφευκτων διακυμάνσεων στον καθορισμό των αρχικών συνθηκών σε συνδυασμό με την ιδιότητα ντετερμινιστικών χαοτικών συστημάτων με την πάροδο του χρόνου να αυξάνονται εκθετικά οι οποιεσδήποτε αποκλίσεις, δεν είναι δυνατή μια μακροπρόθεσμη πρόβλεψη της εξέλιξης του συστήματος. Οι υπολογισμοί για την εξέλιξη του συστήματος έχουν νόημα μόνο για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, στο πλαίσιο του οποίου είναι δυνατή και η πρόβλεψη. Η κλασική αντίληψη της δυνατότητας υπολογισμού και μακροπρόθεσμης πρόβλεψης της εξέλιξης του συστήματος όταν οι ντετερμινιστικοί νόμοι είναι γνωστοί τίθεται υπό αμφισβήτηση.

### **Αυτοοργάνωση**

Η αυτοοργάνωση αποτέλεσε αντικείμενο διαφόρων ερευνητικών προσεγγίσεων, με κοινό χαρακτηριστικό τους την προσπάθεια μοντελοποίησης του αυθόρμητου σχηματισμού δομών, οι οποίες μπορούν να εμφανιστούν κατά την εξέλιξη ενός δυναμικού συστήματος. Ως κρίσιμα στοιχεία σε διαδικασίες αυτοοργάνωσης αναδεικνύονται η «ανοιχτότητα» του συστήματος, μια κάποια απόσταση του συστήματος από τις συνθήκες ισορροπίας και η ύπαρξη μιας αναδραστικής διαδικασίας μεταξύ των μερών του συστήματος. Τα στοιχεία αυτά βρίσκουν την έκφρασή τους – από μαθηματικής σκοπιάς - στη μη γραμμικότητα των εξισώσεων που περιγράφουν τη συμπεριφορά του συστήματος. Έτσι λοιπόν, ως αυτοοργάνωση μπορεί να χαρακτηριστεί η αυθόρμητη εμφάνιση νέων δομών σε συστήματα τα οποία χαρακτηρίζονται από εσωτερικούς βρόχους ανάδρασης και περιγράφονται από μαθηματικής πλευράς με μη γραμμικές εξισώσεις (Carra, 1996).

Χαρακτηριστικό των διαδικασιών αυτοοργάνωσης είναι ότι οι δομές αυτές εμφανίζονται σε ανοιχτά συστήματα και σε κάποια απόσταση από την ισορροπία (Nicolis & Prigogine, 1977). Με τροποποίηση συγκεκριμένων παραμέτρων του συστήματος (π.χ. θερμοκρασία) το σύστημα μπορεί να οδηγηθεί όλο και πιο μακριά από την ισορροπία, μέχρι που σε μια συγκεκριμένη τιμή αυτών των παραμέτρων, το σύστημα γίνεται ασταθές. Όταν ξεπεραστεί αυτή η κρίσιμη τιμή εμφανίζεται μια οργανωμένη συμπεριφορά των στοιχείων του συστήματος, με αποτέλεσμα να εμφανίζονται μακροσκοπικά δομές τάξης. Αυτές οι δομές διατηρούνται όσο υπάρχει μια ροή ενέργειας ή ύλης. Για το χαρακτηρισμό τέτοιων δομών ο Prigogine (1980) χρησιμοποιεί τον όρο «δομές έκλυσης» (dissipative structures). Οι δομές έκλυσης μπορούν με περαιτέρω αύξηση της τιμής των παραμέτρων του συστήματος να εμφανίσουν μακροσκοπικά και χαοτική συμπεριφορά.

### **Φράκταλ**

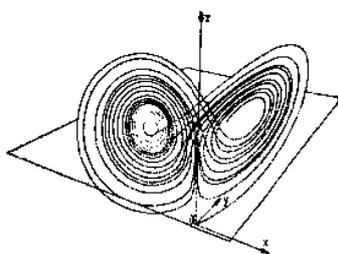
Η γεωμετρία φράκταλ (Mandelbrot, 1987) παρέχει τη δυνατότητα για την περιγραφή ακανόνιστων μορφών, οι οποίες δεν μπορούσαν να περιγραφούν με την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Πολύπλοκα μαθηματικά αντικείμενα (π.χ. καμπύλη του Koch) και φυσικά μορφώματα (όπως π.χ. ακτογραμμές, σύννεφα, δέντρα, χιονονιφάδες) μπορούν να περιγραφούν από τη φράκταλ γεωμετρία. Σε γενικές γραμμές φράκταλ μορφές εμφανίζουν

κλασματικές διαστάσεις και χαρακτηρίζονται από την ύπαρξη αυτοομοιότητας στη δομή τους δηλ. σε μια μεγέθυνση ενός τμήματος μιας φράκταλ μορφής, οι λεπτομέρειες φαίνονται όμοιες με τη συνολική μορφή.

Για τις φυσικές επιστήμες η φράκταλ γεωμετρία παρέχει ένα πλαίσιο για την περιγραφή πολύπλοκων μορφωμάτων και δομών, όπως π.χ. χαστικοί ελκυστές. Παρόλο που η λέξη «χάος» παραπέμπει σε πλήρη αταξία, ντετερμινιστικά χαστικά συστήματα εμφανίζουν μια μορφή τάξης. Αυτή η τάξη όμως γίνεται εμφανής μόνο μετά από μια κατάλληλη επεξεργασία των δεδομένων και αναπαράστασή τους στο λεγόμενο «χώρο των φάσεων». Οι εμφανιζόμενες δομές, γνωστές ως χαστικοί ελκυστές (Σχήμα 2), παρουσιάζουν γεωμετρικά χαρακτηριστικά τυπικά για φράκταλ δομές (π.χ. φράκταλ διάσταση, αυτοομοιότητα). Επίσης αρκετές φυσικές δομές αναδύομενες μέσω αυτοοργανωτικών διαδικασιών παρουσιάζουν χαρακτηριστικά που μπορούν να περιγραφούν με τη φράκταλ γεωμετρία (Bunde & Havlin, 1994).

### Σύνοψη

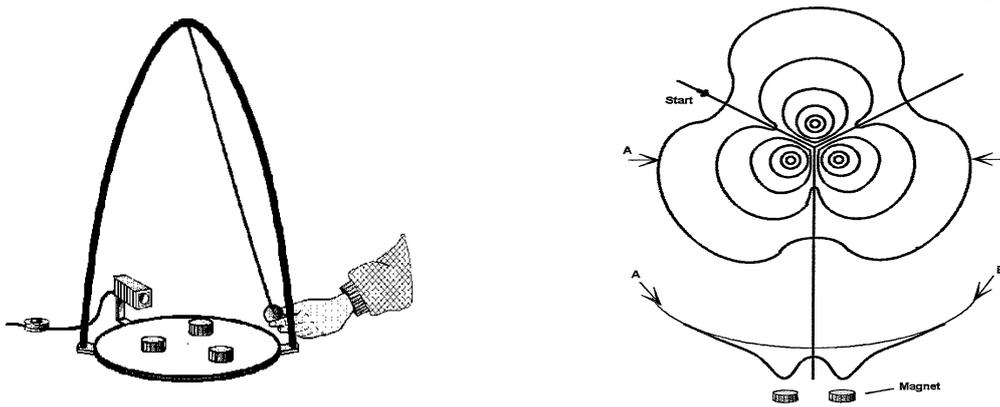
Από την σύντομη ανάλυση του ντετερμινιστικού χάους, δομών αυτοοργάνωσης και φράκταλ δομών που προηγήθηκε, η οποία αποτελεί μια διδακτική ανάλυση και λαμβάνει υπόψη τόσο τους στόχους της διδασκαλίας των φυσικών επιστημών, αλλά και εμπειρικές έρευνες για διαδικασίες διδασκαλίας και μάθησης μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων, οδηγούμαστε σε ένα σύνολο βασικών εννοιών και αρχών προς διδασκαλία που συνοψίζονται στο Σχήμα 3 (Komorek, Stavrou & Duit, 2003; Komorek, 2005).



Σχήμα 2. Χαστικός ελκυστής (από Schuster, 1989)



Σχήμα 3. Βασικές έννοιες και αρχές μη γραμμικών συστημάτων για διδασκαλία



Σχήμα 4. α) Χαοτικό εκκρεμές με μαγνήτες, β) Περιοχές ασταθούς ισορροπίας

## Εμπειρικές έρευνες με μαθητές και φοιτητές

Οι εμπειρικές έρευνες αφορούν σε μαθητές Λυκείου και φοιτητές Παιδαγωγικού Τμήματος και θα παρουσιαστούν στη συνέχεια.

### Μαθητές Λυκείου

Στόχος της έρευνας αυτής ήταν να διερευνηθούν οι διαδικασίες μάθησης σε σχέση με την αλληλεπίδραση νομοτέλειας και τυχαιότητας στα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα (Stavrou & Duit, 2013; Stavrou, Duit & Komorek, 2008). Στην έρευνα αυτή συμμετείχαν 30 μαθητές της 11ης τάξης Γερμανικού Γυμνασίου (αντίστοιχης της Β' τάξης ελληνικού Λυκείου) χωρισμένοι σε 12 ομάδες (6 ομάδες των 3 μαθητών και 6 ομάδες των 2 μαθητών). Για κάθε ομάδα πραγματοποιήθηκαν δύο σειρές συνεντεύξεων με τη μέθοδο του διδακτικού πειράματος (Komorek & Duit, 2004), διάρκειας 90 λεπτών η καθεμία. Οι μαθητές συμπλήρωσαν και δύο ερωτηματολόγια (ένα πριν και ένα μετά τις συνεντεύξεις). Κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων συζητήθηκαν τέσσερις πειραματικές διατάξεις με την ακόλουθη σειρά: απλό εκκρεμές, χαοτικό εκκρεμές (Σχήμα 4), κυψελίδες Bénard (Σχήμα 6) και Δενδρίτες (Σχήμα 9). Το απλό εκκρεμές χρησιμοποιήθηκε ως παράδειγμα γραμμικού συστήματος για εισαγωγή στη θεματική. Τα υπόλοιπα συστήματα επιλέχθηκαν κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να αναδεικνύουν κεντρικά χαρακτηριστικά των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων (ντετερμινιστικό χάος, αυτοοργάνωση και φράκταλς) καθώς και την αλληλεπίδραση νομοτέλειας και τυχαιότητας που οδηγεί σε περιορισμένη προβλεψιμότητα και στη δημιουργία δομών. Τα χαρακτηριστικά των πειραμάτων αναλύονται σύντομα στη συνέχεια.

### Χαοτικό εκκρεμές με μαγνήτες

Το χαοτικό εκκρεμές με μαγνήτες αποτελείται βασικά από ένα απλό εκκρεμές που κινείται πάνω από τρεις μαγνήτες, οι οποίοι είναι τοποθετημένοι σε συμμετρικές θέσεις όπως φαίνεται στο Σχήμα 4α. Η σιδερένια σφαίρα όταν αφηθεί ελεύθερη, κινείται τυχαία και μετά από κάποιο χρονικό διάστημα σταματάει σε έναν από τους τρεις μαγνήτες. Αν το πείραμα επαναληφθεί περισσότερες φορές, τότε η διαδρομή που ακολουθεί κάθε φορά το εκκρεμές διαφέρει με αποτέλεσμα να μην μπορούμε να προβλέψουμε σε ποιον μαγνήτη θα σταματήσει η σφαίρα. Παρόλο που η κίνηση του εκκρεμούς είναι μη προβλέψιμη, εν τούτοις υπόκειται σε ντετερμινιστικούς νόμους. Εξαιτίας συγκεκριμένων περιοχών ασταθούς ισορροπίας μεταξύ των μαγνητών («γραμμές», όπου η σιδερένια σφαίρα δέχεται ίσες δυνάμεις από τους μαγνήτες που βρίσκονται δεξιά και αριστερά από την εκάστοτε γραμμή

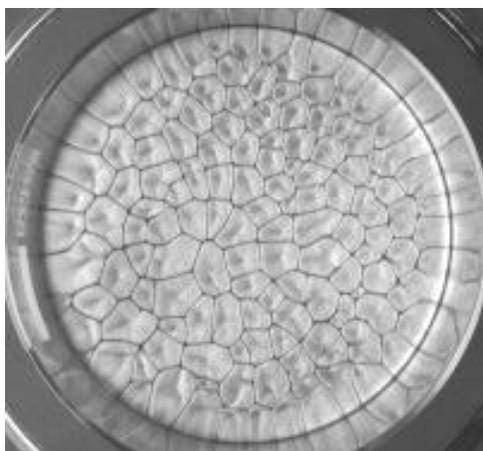
(Σχήμα 4β), μικρές διαφορές στην αρχική κατάσταση και μικρές εξωτερικές επιδράσεις, όταν το εκκρεμές βρίσκεται σε κίνηση παίζουν σημαντικό ρόλο. Κατά κάποιο τρόπο αυτές οι μικρές αποκλίσεις και διαταραχές «καθορίζουν» ποια διαδρομή θα ακολουθήσει το εκκρεμές και τελικά πάνω από ποιον μαγνήτη θα σταματήσει. Αυτές οι μικρές αποκλίσεις και διαταραχές θεωρούνται τυχαίες και επηρεάζουν την κίνηση του εκκρεμούς κατά απρόβλεπτο τρόπο. Υπό αυτή την έννοια η συμπεριφορά του χαστικού εκκρεμούς καθορίζεται από μια αλληλεπίδραση ντετερμινιστικών και τυχαίων διαδικασιών.

### **Κυψελίδες Bénard**

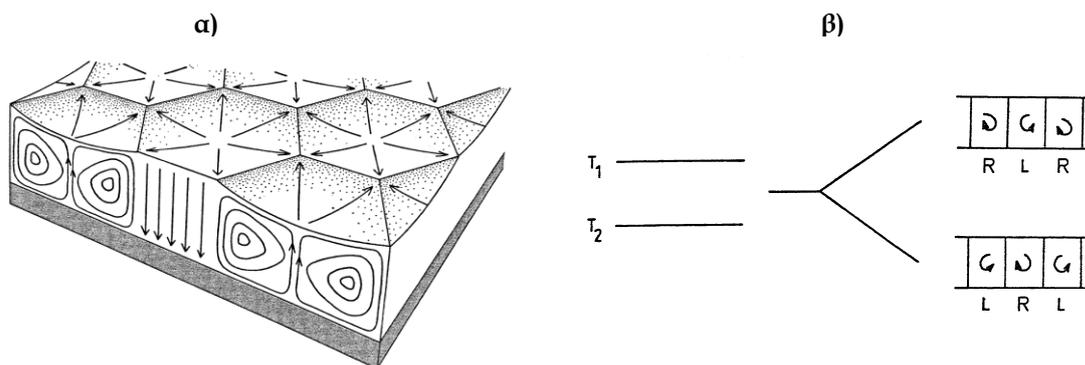
Οι κυψελίδες Bénard (Σχήμα 5) είναι εξαγωνικές κυψελίδες οι οποίες εμφανίζονται όταν μια ποσότητα υγρού μικρού πάχους θερμαίνεται (στην πραγματικότητα οι κυψελίδες αποκλίνουν λιγότερο ή περισσότερο από την εξαγωνική δομή). Η δημιουργία των δομών αυτών στηρίζεται στο φαινόμενο της διάδοσης θερμότητας με μεταφορά (Velarde & Normand, 1989). Όταν η διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ του κατώτερου και του ανώτερου στρώματος του υγρού ξεπεράσει μια ορισμένη τιμή, τότε το «ζεστό» υγρό αρχίζει να ανεβαίνει προς τα πάνω και το «κρύο» να κατέρχεται. Αναπαριστώντας σχηματικά τις λεπτομέρειες της ροής αυτής, το υγρό κινείται ανοδικά σε ένα σημείο και στη συνέχεια κατά μήκος του πάνω στρώματος, έπειτα κατέρχεται, κινείται κατά μήκος του κάτω στρώματος, ανεβαίνει πάλι κ.ο.κ. (Σχήμα 6α).

Οι κυψελίδες ξεδιπλώνονται κατά μήκος του οριζόντιου άξονα ακολουθώντας μια κίνηση που είναι είτε αριστερόστροφη - δεξιόστροφη - αριστερόστροφη κ.ο.κ. ή δεξιόστροφη - αριστερόστροφη - δεξιόστροφη κ.ο.κ. (Σχήμα 6β). Όταν σε μια κυψελίδα ακολουθηθεί μια κατεύθυνση κίνησης αυτή παραμένει σταθερή. Το φαινόμενο της εμφάνισης των κυψελίδων είναι αυστηρά ντετερμινιστικό. Η κατεύθυνση της κίνησης όμως σε κάθε κυψελίδα είναι μη προβλέψιμη. Μόνο η τυχειότητα, υπό τη μορφή μιας συγκεκριμένης διαταραχής, η οποία επιδρά κατά τη στιγμή της δημιουργίας των κυψελίδων, «αποφασίζει» κατά κάποιο τρόπο αν η κίνηση σε μια κυψελίδα είναι αριστερόστροφη ή δεξιόστροφη (Nicolis, 1989; σελ. 319). Έτσι η ντετερμινιστική διαδικασία της εμφάνισης των κυψελίδων και τυχαίων διακυμάνσεων δρουν μαζί κατά ένα ειδικό τρόπο και καθορίζουν την τελική δομή των κυψελίδων Bénard.

Το πείραμα δημιουργίας κυψελίδων Bénard πραγματοποιείται εύκολα χρησιμοποιώντας ως υγρό λάδι σιλικόνης. Το υγρό τοποθετείται σε ένα κυκλικό δοχείο και θερμαίνεται σε μια ηλεκτρική εστία. Για να γίνει καλύτερα ορατή η κίνηση του υγρού, καθώς το λάδι σιλικόνης είναι διαφανές, προστίθεται σκόνη αλουμινίου.



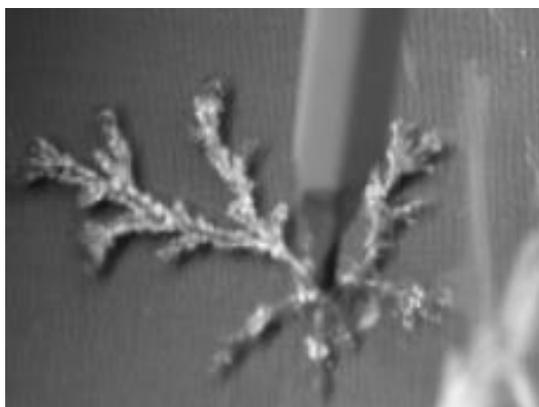
Σχήμα 5. Κυψελίδες Bénard



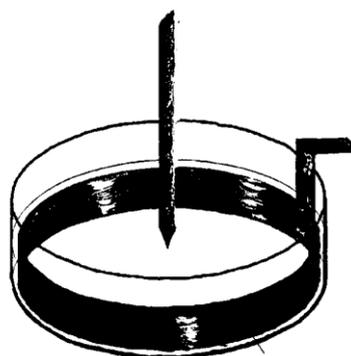
Σχήμα 6. α) Τομή κυψελίδων Bénard, β) Διαφορετικές δυνατότητες κίνησης του υγρού στις κυψελίδες

### Δενδρίτης

Οι δενδρίτες είναι δομές που εμφανίζουν φράκταλ χαρακτηριστικά. Με το πείραμα που περιγράφεται στη συνέχεια και στηρίζεται στο φαινόμενο της ηλεκτρόλυσης μπορεί να δημιουργηθεί μια μορφή δενδρίτη (Σχήμα 7α). Στο εσωτερικό της περιφέρειας ενός γυάλινου στρογγυλού δοχείου, που περιέχει διάλυμα θειικού ψευδαργύρου ( $ZnSO_4$ ) προσαρμόζουμε ένα κυκλικό δακτύλιο ψευδαργύρου. Στο κέντρο του δοχείου τοποθετούμε μια ράβδο άνθρακα (ή ένα μολύβι, Σχήμα 7β). Μεταξύ του δακτυλίου ψευδαργύρου, που παίζει το ρόλο της ανόδου και της ράβδου άνθρακα, που παίζει το ρόλο της καθόδου, εφαρμόζουμε μια τάση περίπου 10 V. Στην αρχή τα ιόντα φτάνουν στην κάθοδο τυχαία. Μετά από ένα μικρό χρονικό διάστημα σχηματίζονται στην κάθοδο «υψώματα» και «κοιλώματα». Έτσι τα επόμενα ιόντα ψευδαργύρου που φθάνουν στην κάθοδο είναι περισσότερο πιθανό να επικαθίσουν στην κορυφή των «υψωμάτων» από ό,τι στο κάτω μέρος των «κοιλωμάτων» (Sander, 1989). Ως εκ τούτου τα «υψώματα» συνεχίζουν να αυξάνουν και σχηματίζουν τα κυρίως κλαδιά. Από τη μια μεριά η τυχαία κίνηση των ιόντων (κίνηση Brown) και από την άλλη η κατευθυνόμενη κίνηση των ιόντων ψευδαργύρου προς την κάθοδο καθορίζουν την τελική δομή του δενδρίτη. Υπό αυτή την έννοια η ανάπτυξη του δενδρίτη ψευδαργύρου απεικονίζει την αλληλεπίδραση τυχαίων και ντετερμινιστικών διαδικασιών στο σχηματισμό φράκταλ δομών, η οποία οδηγεί στην αδυναμία πρόβλεψης της μορφής του δενδρίτη.



α)



β)

Σχήμα 7. α) Δενδρίτης, β) Διάταξη για δημιουργία δενδρίτη



Σχήμα 8. Διάταξη «χαοτικού εκκρεμούς» διασυνδεδεμένου με Η/Υ

### **Φοιτητές ΠΤΔΕ**

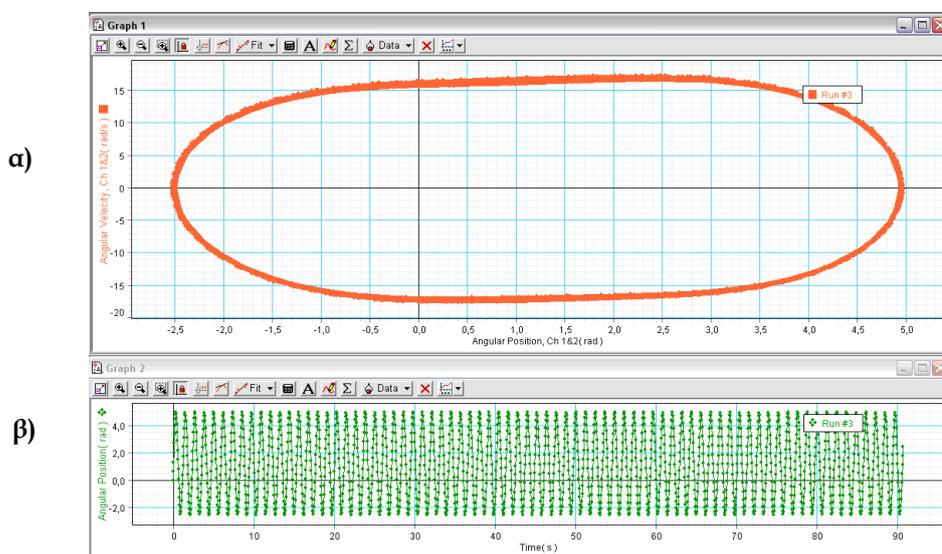
Στόχος της έρευνας αυτής ήταν να διερευνηθούν οι διαδικασίες μάθησης των φοιτητών για τη μη δυνατότητα μακροπρόθεσμης πρόβλεψης ντετερμινιστικών χαοτικών συστημάτων (Stavrou, Assimopoulos, Skordoulis, 2013; Ασημόπουλος, Σταύρου & Σκορδούλης, 2009). Στην έρευνα συμμετείχαν 18 τεταρτοετείς φοιτητές του Π.Τ.Δ.Ε. Αθηνών χωρισμένοι σε 9 ομάδες των 2 ατόμων. Για κάθε ομάδα πραγματοποιήθηκε μια σειρά συνεντεύξεων επίσης με τη μέθοδο του διδακτικού πειράματος, διάρκειας περίπου 90 λεπτών. Οι φοιτητές συμπλήρωσαν και ένα ερωτηματολόγιο πριν τη συνέντευξη. Η συνέντευξη είχε ως επίκεντρο μια διάταξη με δυνατότητα εκδήλωσης και χαοτικής συμπεριφοράς διασυνδεδεμένη με ηλεκτρονικό υπολογιστή (Σχήμα 8), η οποία περιγράφεται σύντομα στη συνέχεια.

### **Χαοτικό Εκκρεμές διασυνδεδεμένο με Η/Υ**

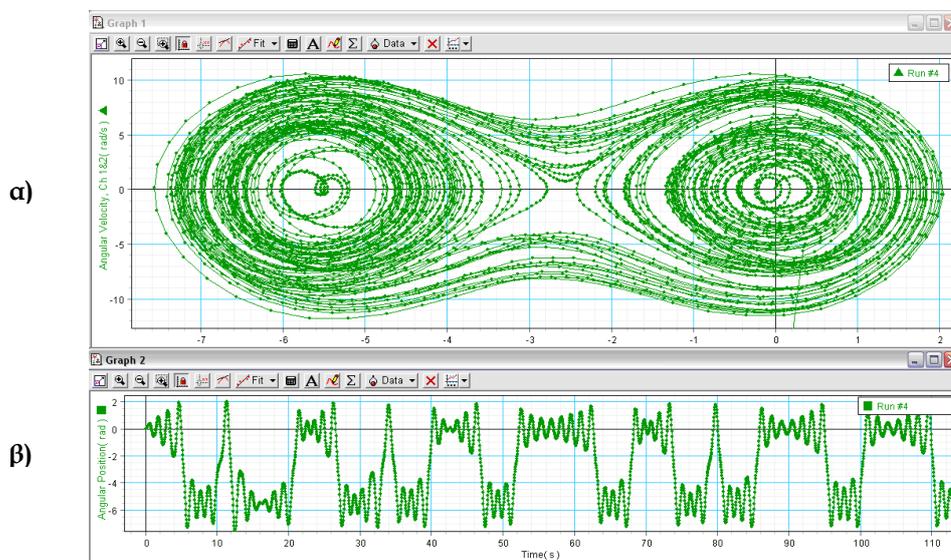
Το «χαοτικό εκκρεμές» σχεδιάστηκε από την εταιρία PASCO για εκπαιδευτικούς σκοπούς και έχει δυνατότητα διασύνδεσης με ηλεκτρονικό υπολογιστή (Σχήμα 8). Αποτελείται από έναν περιστρεφόμενο, σε οριζόντιο άξονα, ομογενή δίσκο αλουμινίου και μια ομοαξονική τροχαλία τοποθετημένη στον άξονα ενός αισθητήρα περιστροφικής κίνησης που περιστρέφεται ελεύθερα σε ένα κατακόρυφο επίπεδο. Ο αισθητήρας περιστροφικής κίνησης μεταβιβάζει μέχρι 1440 παλμούς ανά περιστροφή μέσω ψηφιακής διασύνδεσης (interface) σε έναν Η/Υ. Ένας μικρός κύλινδρος ορειχαλκού προσαρτάται στον δίσκο έκκεντρα. Δύο ελατήρια προσαρμόζονται επίσης μέσω νήματος στην τροχαλία. Το άκρο του ενός ελατηρίου προσαρμόζεται σταθερά στη βάση της διάταξης. Το άκρο του δεύτερου ελατηρίου συνδέεται μέσω ενός μοχλού με τον περιστροφικό κινητήρα. Έτσι ο περιστροφικός κινητήρας συνδεδεμένος με το άκρο του ενός ελατηρίου ασκεί στο σύστημα μια περιοδική δύναμη ( $A\sin(\Omega.t)$ ) ώστε αυτό να εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση. Τέλος, ένας σταθερός μαγνήτης

πολύ κοντά στον δίσκο επάγει μια δύναμη απόσβεσης μέσω των ρευμάτων Endy που δημιουργούνται στον τελευταίο. Η δύναμη είναι ελεγχόμενη αφού εξαρτάται από την απόσταση μαγνήτη - δίσκου και της ταχύτητας περιστροφής του δίσκου.

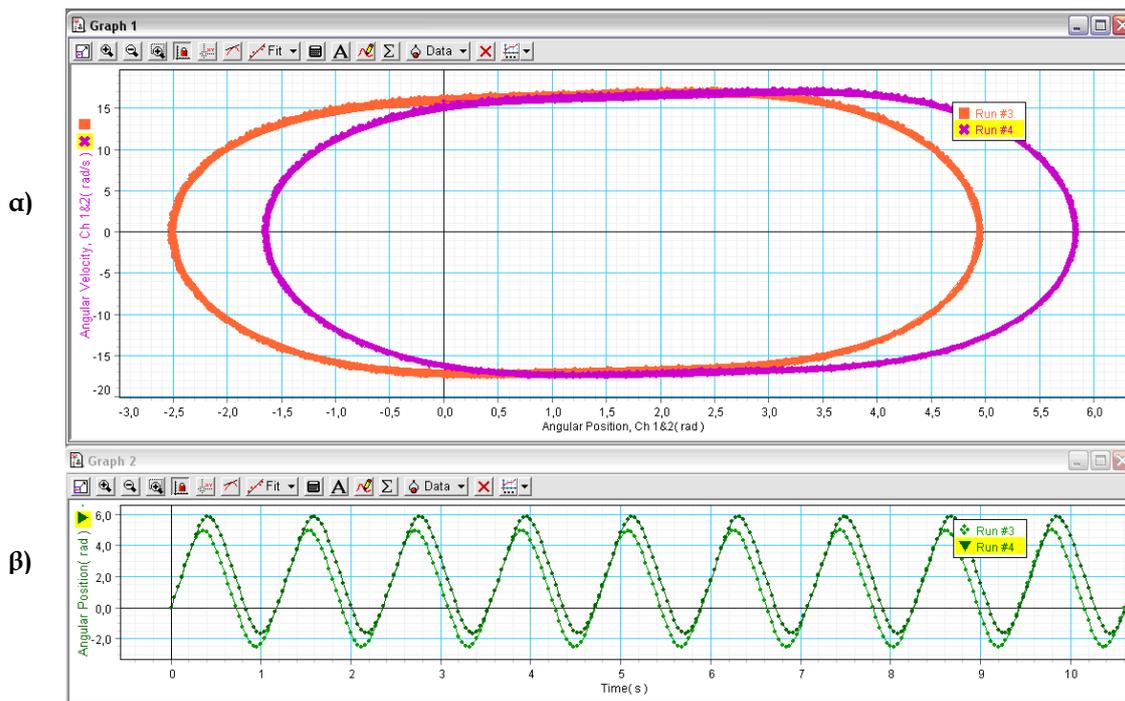
Στο χαοτικό αυτό εκκρεμές είναι δυνατή η μεταβολή όλων των βασικών παραμέτρων του, δηλαδή της μάζας του εκκρεμούς, της σταθεράς των ελατηρίων, της σταθεράς απόσβεσης και της συχνότητας του διεγέρτη. Για κατάλληλες τιμές των παραπάνω παραμέτρων το σύστημα μπορεί να μεταβεί από την αρμονική στη χαοτική συμπεριφορά. Η ανάγνωση των τιμών της γωνίας  $\varphi$ , από έναν Η/Υ - μέσω της συσκευής διασύνδεσης (interface) και του αισθητήρα περιστροφής παρέχει τη δυνατότητα δημιουργίας, σε πραγματικό χρόνο, των γραφικών παραστάσεων της γωνίας  $\varphi=\varphi(t)$  συναρτήσεως του χρόνου καθώς επίσης του διαγράμματος του χώρου των φάσεων  $\omega=\omega(\varphi)$ . Η χρήση του λογισμικού παρουσίασης και ανάλυσης δεδομένων της ίδιας εταιρίας δίνει τις γραφικές παραστάσεις περιοδικής και χαοτικής κίνησης στην ίδια οθόνη (Σχήματα 9 και 10) ώστε να επιτυγχάνεται η σύγκρισή τους αλλά και η σύγκριση με προηγούμενες καταγραφές (Σχήματα 11 και 12).



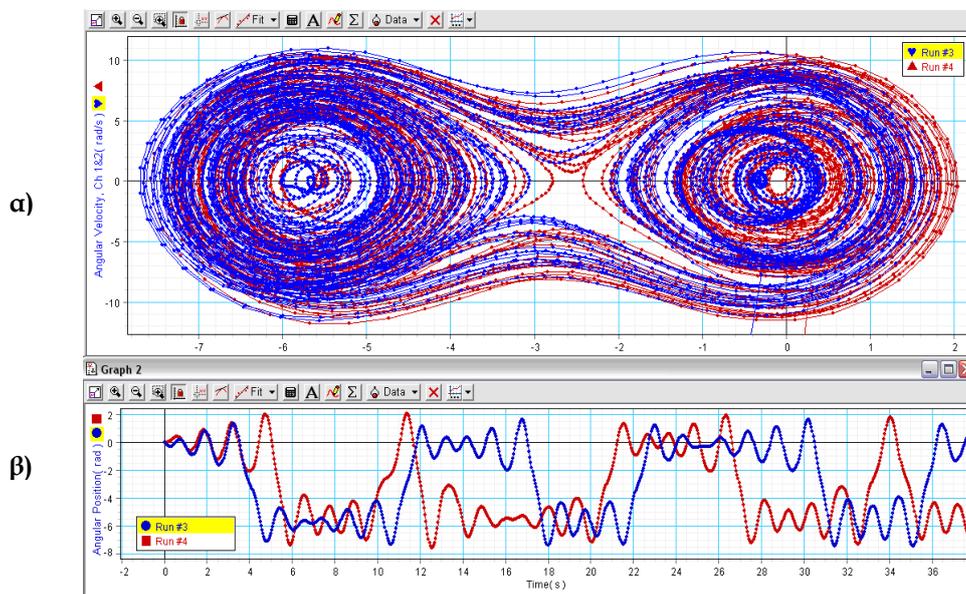
Σχήμα 9. Γραφικές παραστάσεις της περιοδικής κίνησης εκκρεμούς α)  $\omega=\omega(\varphi)$ , β)  $\varphi=\varphi(t)$



Σχήμα 10. Γραφικές παραστάσεις της χαοτικής κίνησης εκκρεμούς α)  $\omega=\omega(\varphi)$ , β)  $\varphi=\varphi(t)$



Σχήμα 11. Σύγκριση γραφικών παραστάσεων για δύο διαδοχικές καταγραφές στην περίπτωση περιοδικής κίνησης του εκκρεμούς α)  $\omega=\omega(\varphi)$ , β)  $\varphi=\varphi(t)$



Σχήμα 12. Σύγκριση γραφικών παραστάσεων για δύο διαδοχικές καταγραφές στην περίπτωση χαοτικής κίνησης του εκκρεμούς α)  $\omega=\omega(\varphi)$  β)  $\varphi=\varphi(t)$

**Ανάλυση Δεδομένων**

Για την ανάλυση των δεδομένων λόγω του διερευνητικού χαρακτήρα των ερευνών χρησιμοποιήθηκαν ποιοτικές μέθοδοι ανάλυσης περιεχομένου (Mayring, 2000; Strauss & Corbin, 1990). Η ανάλυση των δεδομένων βασίστηκε σε μια διαδικασία επονομαζόμενη

"διαρκής συγκριτική μέθοδος ανάλυσης" (constant comparative method of analysis, Strauss & Corbin, 1990, pp. 62-74). Αυτή η διαδικασία είναι από τη φύση της αναδραστική και εμπεριέχει εξέταση των δεδομένων έχοντας μία υπόθεση στο μυαλό, αναθεώρηση αυτής της υπόθεσης υπό το φως των δεδομένων και επανεξέταση των δεδομένων ξανά. Οι υποθέσεις δημιουργούνται τόσο στη βάση της σχετικής βιβλιογραφίας (αναγωγή) όσο και στη βάση των εμπειρικών δεδομένων (επαγωγή). Ως αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας αναπτύχθηκε ένα σύστημα με κατηγορίες κατά ένα σπειροειδή τρόπο (Stavrou, 2004).

### **Αποτελέσματα των εμπειρικών ερευνών**

Τα αποτελέσματα των εμπειρικών ερευνών σχετικά με τη δυνατότητα διδασκαλίας και μάθησης μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων τόσο με μαθητές όσο και με εκπαιδευτικούς είναι σε γενικές γραμμές ενθαρρυντικά. Πιο αναλυτικά:

**Μαθητές Λυκείου:** Όπως έδειξε η έρευνα οι μαθητές Λυκείου όχι μόνο ήταν σε θέση να αναπτύξουν μια ικανοποιητική κατανόηση αυτής της αλληλεπίδρασης, αλλά επίσης ήταν σε θέση να διαφοροποιήσουν τις ιδέες τους για νομοτέλεια και τυχαιότητα και να αποκτήσουν μια πιο διευρυμένη εικόνα για τη φυσική. Οι διαδικασίες μάθησης των μαθητών φαίνεται να επηρεάζονται σημαντικά από τις αντιλήψεις τους για το τυχαίο και τη σχέση του με ντετερμινιστικούς νόμους. Ειδικότερα, οι μαθητές δείχνουν να μην έχουν σαφείς αντιλήψεις για την "τυχαιότητα". Για τους μαθητές η τυχαιότητα είναι μια έννοια με πολλαπλές σημασίες, όπως το απρόβλεπτο, το απρογραμματίστο, το ανεπιπρόσμενο, το απροσδόκητο, το ακανόνιστο, το ανυπολόγιστο κ.λπ. Στις περισσότερες περιπτώσεις οι μαθητές δίνουν περισσότερους από έναν χαρακτηρισμούς για το τυχαίο και τα παραδείγματά τους προέρχονται κυρίως από εμπειρίες της καθημερινής τους ζωής.

Επιπρόσθετα διακρίνονται δύο ομάδες μαθητών σε σχέση με την ύπαρξη του τυχαίου στο φυσικό κόσμο. Υπάρχει μια ομάδα μαθητών, οι οποίοι θεωρούν ότι το τυχαίο δεν υπάρχει στο φυσικό κόσμο. Όλα τα συμβάντα έχουν μια αιτία και υπόκεινται σε ντετερμινιστικούς νόμους. Το τυχαίο για τους μαθητές αυτούς αποτελεί μια επιστημική κατηγορία και είναι αποτέλεσμα της ανθρώπινης άγνοιας. Ένας μικρός αριθμός μαθητών αυτής της ομάδας δεν αποδέχεται την ύπαρξη μιας αλληλεπίδρασης ντετερμινιστικών νόμων και τυχαιότητας στα πειράματα που αναφέρονται στα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα. Μια δεύτερη ομάδα μαθητών πιστεύει ότι το τυχαίο υπάρχει. Όλοι οι μαθητές της ομάδας αυτής καθώς και οι περισσότεροι μαθητές της προηγούμενης ομάδας αναγνωρίζουν στα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα μια αλληλεπίδραση τυχαίου και ντετερμινιστικών νόμων.

Επίσης για τους μαθητές ντετερμινιστικοί νόμοι και τυχαιότητα βρίσκονται σε αντιθετική σχέση μεταξύ τους. Ως αποτέλεσμα αυτής της αντίληψης δεν μπορούν για τους μαθητές να συνυπάρχουν στην ίδια διαδικασία ταυτόχρονα ντετερμινιστικοί νόμοι και το τυχαίο. Έτσι αν αναγνωρίζουν στη διαδικασία ντετερμινιστικούς νόμους τότε δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν και τη συμμετοχή του τυχαίου σε αυτή. Και, αντίθετα, αν αναγνωρίζουν το τυχαίο στη διαδικασία τότε δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν και τη συμμετοχή ντετερμινιστικών νόμων. Με την εξέλιξη όμως της μαθησιακής διαδικασίας και ειδικότερα μετά το δεύτερο πείραμα, όπου αναγνωρίστηκε η αλληλεπίδραση ντετερμινιστικών νόμων και τυχαίου, όλο και περισσότεροι μαθητές στο τρίτο και τέταρτο πείραμα αναφέρονται από την πρώτη εκτέλεση του πειράματος σε μια αλληλεπίδραση ντετερμινιστικών νόμων και τυχαίου. Αυτό φαίνεται και από τη γραφική παράσταση στο Σχήμα 13, όπου έχει αποτυπωθεί ο αριθμός των μαθητών στο εκάστοτε πείραμα, οι οποίοι αναφέρονται ταυτόχρονα στην ύπαρξη ντετερμινιστικών νόμων και τυχαίου στη διαδικασία, μετά από την πρώτη εκτέλεσή του.



**Σχήμα 13.** Αναφορά σε συνύπαρξη ντετερμινιστικών και τυχαίων διαδικασιών μετά την πρώτη εκτέλεση των πειραμάτων (Exp.1: Απλό Εκκρεμές, Exp.2: Μαγνητικό Εκκρεμές, Exp.3: Κυψελίδες Bénard Exp.4: Δενδρίτης)

**Φοιτητές ΠΤΔΕ:** Παρόμοια αποτελέσματα είχε και η έρευνα που έγινε σε φοιτητές του Π.Τ.Δ.Ε Αθηνών, η οποία είχε ως επίκεντρο το χαοτικό εκκρεμές διασυνδεδεμένο με Η/Υ (Σχήμα 8). Οι φοιτητές φαίνεται να έχουν δύο κυρίαρχα "εννοιολογικά" σχήματα τα οποία εκφράζονται εν συντομία με τα τρίπτυχα: νομοτέλεια - τάξη - πρόβλεψη και χάος - τυχαιότητα - μη πρόβλεψη. Ενώ αρχικά η εκδοχή να υπάρχει νομοτέλεια χωρίς δυνατότητα πρόβλεψης δεν ήταν γι' αυτούς δυνατή, μετά το πέρας της συνέντευξης φαίνεται σε μεγάλο βαθμό να γίνεται αποδεκτή.

Για τους φοιτητές νομοτέλεια, τάξη και πρόβλεψη είναι άμεσα συνυφασμένα μεταξύ τους. Για παράδειγμα η δυνατότητα να κάνουν πρόβλεψη ή η ύπαρξη τάξης συνδέεται άμεσα με νομοτελειακή συμπεριφορά. Επίσης, η ύπαρξη κανονικότητας, περιοδικότητας και κυρίως η επαναληψιμότητα αποτελούν χαρακτηριστικά στοιχεία για να θεωρηθεί μια συμπεριφορά νομοτελειακή. Η απουσία των παραπάνω χαρακτηριστικών αποτελεί ένδειξη τυχαιότητας.

Παρόλο όμως, που χάος και τυχαιότητα συνδέονται άμεσα για τους φοιτητές, μια τυχαία συμπεριφορά δεν είναι απαραίτητα και χαοτική. Για τους περισσότερους από αυτούς το χάος θεωρείται ως μια «υπερέννοια» που εμπεριέχει την τυχαιότητα. Για παράδειγμα οι περισσότεροι από αυτούς χαρακτηρίζουν την ακανόνιστη κίνηση του δίσκου ή την ακανόνιστη μορφή της γραφικής παράστασης  $\varphi=\varphi(t)$  (Σχήμα 13 κάτω) ως τυχαία και όχι ως χαοτική, καθώς δε θεωρούνται αρκούντως πολύπλοκες ή όπως το εκφράζουν οι ίδιοι αρκούντως «αλλοπρόσαλλες».

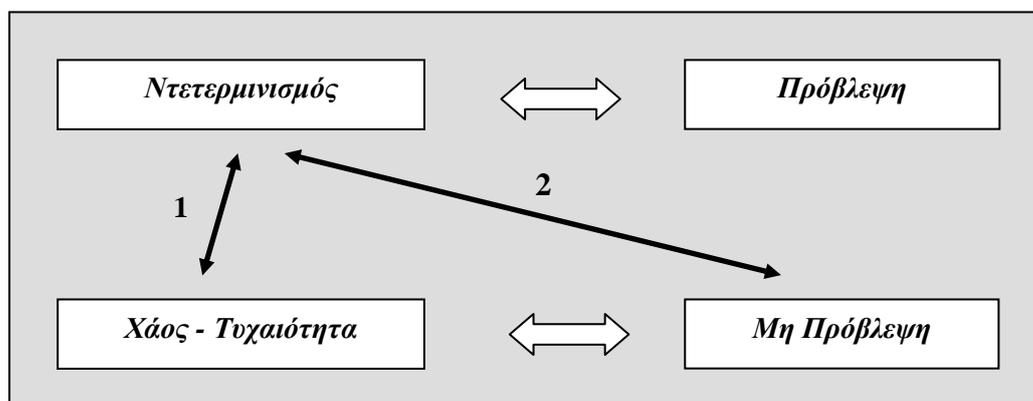
Κατά την ακανόνιστη κίνηση που εκτελεί ο δίσκος, οι φοιτητές αναγνωρίζουν από την παρατήρηση της κίνησης του δίσκου και της γραφικής παράστασης  $\varphi=\varphi(t)$  (Σχήμα 10β) μια τυχαιότητα στην κίνηση, χωρίς τη δυνατότητα οποιασδήποτε πρόβλεψης. Όταν η διαδικασία εκτελείται για πρώτη φορά, αρκετοί από αυτούς αναγνωρίζουν στη γραφική παράσταση  $\omega=\omega(\varphi)$  (Σχήμα 10α) μια χαρακτηριστική δομή, όπως π.χ. την ύπαρξη δύο σπειρών, που τους κάνει να θεωρούν δυνατή την ύπαρξη νομοτέλειας που να διέπει την κίνηση του δίσκου. Η εμφάνιση παρόμοιας μορφής της γραφικής παράστασης  $\omega=\omega(\varphi)$  κατά την επανάληψη της διαδικασίας υπό τις ίδιες συνθήκες (Σχήμα 12α), αποτελεί για τους περισσότερους φοιτητές το καθοριστικό σημείο για να αποδεχθούν την ύπαρξη νομοτέλειας στην ακανόνιστη κίνηση του δίσκου. Λαμβάνοντας υπόψη και τα δεδομένα της γραφικής παράστασης  $\varphi=\varphi(t)$  (Σχήμα 12β) καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι είναι δυνατόν να υπάρχει νομοτέλεια δίχως τη δυνατότητα πρόβλεψης.

Η πορεία προς το συμπέρασμα αυτό δεν ήταν χωρίς δυσκολίες. Αυτές ήταν αποτέλεσμα της αντίληψης των φοιτητών ότι νομοτέλεια και δυνατότητα πρόβλεψης, όπως και τυχαιότητα και μη δυνατότητα πρόβλεψης συνδέονται άρρηκτα μεταξύ τους. Στην προσπάθειά τους να συνδυάσουν τα δεδομένα από τις δύο γραφικές παραστάσεις, ώστε να είναι συμβατές με το σχήμα νομοτέλεια-δυνατότητα πρόβλεψης ή τυχαιότητα - μη δυνατότητα πρόβλεψης, αναζητούσαν ενδείξεις για νομοτελειακή συμπεριφορά (π.χ. κανονικότητες) στη γραφική παράσταση  $\varphi=\varphi(t)$  (Σχήματα 10β και 12β) ή ενδείξεις για τυχαιότητα στη γραφική παράσταση  $\omega=\omega(\varphi)$  (Σχήματα 10α και 12α). Με βάση όμως τα δεδομένα που παρουσιάζονται στις γραφικές παραστάσεις οι προσπάθειες αυτές δεν απέδωσαν και έτσι οι περισσότεροι φοιτητές αποδέχτηκαν την ύπαρξη νομοτέλειας στην κίνηση του δίσκου δίχως να υπάρχει δυνατότητα πρόβλεψης.

Ωστόσο, ένας μικρός αριθμός των φοιτητών, δεν αποδέχτηκε τη δυνατότητα να υπάρχει νομοτέλεια δίχως τη δυνατότητα πρόβλεψης. Οι δύο γραφικές παραστάσεις  $\varphi=\varphi(t)$  και  $\omega=\omega(\varphi)$  (Σχήματα 10 και 12) έπρεπε γι' αυτούς να είναι συμβατές με το σχήμα νομοτέλεια-δυνατότητα πρόβλεψης ή τυχαιότητα - μη δυνατότητα πρόβλεψης. Δεν αποδέχονταν δηλαδή ότι η γραφική παράσταση  $\omega=\omega(\varphi)$  μπορεί να παραπέμπει σε νομοτέλεια, αφού στη γραφική παράσταση  $\varphi=\varphi(t)$  δεν υπάρχει δυνατότητα πρόβλεψης. Με άλλα λόγια αν έπαιρναν ως βάση τη γραφική παράσταση  $\omega=\omega(\varphi)$  θα έπρεπε στη γραφική παράσταση  $\varphi=\varphi(t)$  να υπάρχει δυνατότητα πρόβλεψης και αντίστροφα, αν έπαιρναν ως βάση τη γραφική παράσταση  $\varphi=\varphi(t)$ , η γραφική παράσταση  $\omega=\omega(\varphi)$  δεν μπορούσε να εκφράζει νομοτελειακή συμπεριφορά.

## Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία παρουσιάστηκαν ερευνητικά αποτελέσματα που σχετίζονται με τη διδακτική ανάλυση του επιστημονικού περιεχομένου, αλλά και τις διαδικασίες διδασκαλίας και μάθησης στην περιοχή μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων, όπως αυτά έχουν προκύψει στο πλαίσιο του προγράμματος "Διδακτική Αναδόμηση Μη Γραμμικών Δυναμικών Συστημάτων". Οι εμπειρικές έρευνες δείχνουν ότι οι διαδικασίες μάθησης μαθητών και φοιτητών φαίνεται να επηρεάζονται σημαντικά από τις αντιλήψεις τους για το τυχαίο και τη σχέση τους με ντετερμινιστικούς νόμους (βλ. επίσης Duit & Komorek, 1997; Komorek et al., 2001). Οι βασικές δυσκολίες προκύπτουν από το γεγονός ότι ντετερμινιστικοί νόμοι - πρόβλεψη και χάος/τυχειότητα - μη πρόβλεψη θεωρούνται ως μη συμβατές έννοιες μεταξύ τους. Στα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα από μια φαινομενολογική παρατήρηση των φαινομένων (βλ. Σχήματα 4, 6, 7α και 10β) είναι εμφανής μια τυχαία συμπεριφορά, από την οποία ξεκινώντας θα πρέπει να εντοπιστούν ντετερμινιστικοί νόμοι, οι οποίοι θα πρέπει να συνδεθούν στη συνέχεια με τη μη δυνατότητα πρόβλεψης (Σχήμα 14).



Σχήμα 14. Εννοιολογική πορεία μάθησης στα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα

Αυτή η διαδικασία, αν και εφικτή, όπως δείχνουν οι εμπειρικές έρευνες, δεν είναι καθόλου εύκολη, καθώς θα πρέπει να υπάρξει σύνδεση μεταξύ δυο αντιθετικών ομάδων εννοιών (ντετερμινισμός – πρόβλεψη και χάος/τυχαιότητα – μη πρόβλεψη). Η διασάφηση επομένως των αντιλήψεων περί τυχαιότητας και της σχέσης τους με νομοτελειακές διαδικασίες αποτελεί ένα κεντρικό ζητούμενο κατά τη διδασκαλία μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων. Όπως διαφάνηκε και από τις έρευνες οι διαδικασίες μάθησης λαμβάνουν χώρα σε δύο πλαίσια: το εννοιολογικό και το επιστημονικό. Το εννοιολογικό αναφέρεται σε αντιλήψεις περί χάους, τυχαιότητας, νομοτέλειας και πρόβλεψης. Το επιστημονικό αναφέρεται στους φυσικούς μηχανισμούς των φαινομένων που εξετάστηκαν. Είναι φανερό ότι τα πλαίσια αυτά βρίσκονται σε αλληλεπιδραστική σχέση μεταξύ τους, συγχέονται όμως από τους μαθητευόμενους. Σε αυτό συμβάλλουν και οι αδιαφοροποίητες απόψεις τους για την τυχαιότητα και τη σχέση της με ντετερμινιστικούς νόμους. Οι μαθητευόμενοι κατά τη διάρκεια του διδακτικού πειράματος μετακινούνταν συνεχώς μεταξύ αυτών των δύο πλαισίων. Η ερμηνεία των φαινομένων σε επιστημονικό επίπεδο βοηθούσε τους μαθητευόμενους να διασαφηνίσουν αντιλήψεις περί τυχαιότητας, νομοτέλειας και πρόβλεψης. Και αντίστροφα, η διασάφηση στο εννοιολογικό πλαίσιο βοηθούσε στην ερμηνεία των φαινομένων (βλ. Σχήμα 13). Αυτή η συσχέτιση των πλαισίων φαίνεται επομένως να διευκολύνει την κατανόηση της συμπεριφοράς μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων καθώς ως εκ τούτου θα πρέπει να επιδιώκεται κατά τη διδασκαλία μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων.

Η έρευνα στη διδασκαλία των φυσικών επιστημών έχει επίσης δείξει ότι το εννοιολογικό πλαίσιο που αναπτύσσουν οι μαθητές κατά τη διδασκαλία της νευτώνειας φυσικής στο σχολείο είναι υπεύθυνο για σημαντικές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητευόμενοι όταν εισάγονται βασικές ιδέες σύγχρονης φυσικής (π.χ. Dimitriadi & Halkia, 2012; Kalkanis, Hadzidaki & Stavrou, 2003; Shabajee & Postlethwaite, 2000). Για παράδειγμα, καλλιεργείται ένας «αυστηρά» αιτιοκρατικός τρόπος σκέψης, ο οποίος αποτελεί ένα βασικό εμπόδιο για την εκμάθηση βασικών ιδεών σύγχρονης φυσικής. Τα αποτελέσματα των ερευνών στο πλαίσιο του προγράμματος που παρουσιάστηκαν εδώ ενισχύουν αυτή την άποψη. Ταυτόχρονα δείχνουν όμως ότι με τη διδασκαλία μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων παρέχεται η δυνατότητα οι μαθητευόμενοι να διευρύνουν το εννοιολογικό πλαίσιο που καλλιεργείται από τη διδασκαλία των φυσικών επιστημών, όπως δείχνουν και οι ακόλουθες δηλώσεις από ένα μαθητή Λυκείου και ένα φοιτητή αντίστοιχα:

**Μαθητής:** *«Είναι κάτι πραγματικά καινούριο. Γενικά είναι μια διαφορετική όψη της φυσικής... Ότι δεν συμβαίνουν τα πάντα εξαιτίας συγκεκριμένων νόμων, αλλά και το τυχαίο μπορεί να παίζει ένα σημαντικό ρόλο».*

**Φοιτητής:** *«Πίστευα ότι όταν ισχύει ένας νόμος μια πρόβλεψη είναι πάντα δυνατή. Εδώ είδαμε ότι δεν μπορούμε πάντα να κάνουμε μια πρόβλεψη, παρόλο που ισχύει ένας νόμος».*

Ως εκ τούτου, η διδασκαλία μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων, ιδιαίτερα με τη διαπραγμάτευση της σχέσης νομοτέλειας – τυχαιότητας – πρόβλεψης μπορεί να διευρύνει το πλαίσιο του αιτιοκρατικού τρόπου σκέψης που καλλιεργείται από τη διδασκαλία της νευτώνειας φυσικής αναδεικνύοντας τα όρια ισχύος της. Αυτό ενδεχομένως να διευκολύνει και τη μετάβαση στις μη ντετερμινιστικές διαδικασίες της κβαντομηχανικής, καθώς τίθεται υπό αμφισβήτηση η σύνδεση νομοτέλειας – μακροπρόθεσμης πρόβλεψης και αναδεικνύεται ο σημαντικός ρόλος μικρών τυχαίων διαδικασιών.

Με βάση λοιπόν το μοντέλο Διδακτικής Αναδόμησης λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα εμπειρικών ερευνών, προκύπτει ότι το διδακτικά μετασχηματισμένο επιστημονικό περιεχόμενο για τη διδασκαλία μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων δεν θα πρέπει να αναφέρεται μόνο στις φυσικές διαδικασίες που υπόκεινται τα διάφορα φαινόμενα αλλά και

στη σχέση μεταξύ ντετερμινιστικών νόμων, τυχαιότητας και πρόβλεψης. Καθώς οι αντιλήψεις των μαθητευομένων για το τυχαίο παρουσιάζουν και μια φιλοσοφική συνιστώσα η συμβολή της φιλοσοφίας θεωρείται απαραίτητη.

Παρόλο που τα αποτελέσματα τα οποία παρουσιάστηκαν στην παρούσα εργασία μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως κατευθυντήριες γραμμές για τη διδασκαλία μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων, η επικέντρωση σε ένα και μόνο πρόγραμμα καθώς και η εφαρμογή της μεθόδου του διδακτικού πειράματος στο εμπειρικό μέρος των ερευνών αυτών αποτελούν περιοριστικά στοιχεία. Ως εκ τούτου η διερευνητική φύση των μελετών δίνει στα αποτελέσματα έναν υποθετικό χαρακτήρα, που σημαίνει ότι θα πρέπει να ελεγχθούν σε πολύ μεγαλύτερο δείγμα να και να δοκιμαστούν σε συνθήκες πραγματικής τάξης.

Μια έρευνα για τη διδασκαλία μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων σε πραγματικές συνθήκες τάξης με τη συμμετοχή των εκπαιδευτικών της τάξης έχει ήδη υλοποιηθεί στο πλαίσιο του προγράμματος "Διδακτική Αναδόμηση Μη Γραμμικών Δυναμικών Συστημάτων". Στόχος της έρευνας ήταν η διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο εν ενεργεία εκπαιδευτικοί μετασχηματίζουν διδακτικά ένα επιστημονικό περιεχόμενο σύγχρονης φυσικής (Komorek, Stavrou & Duit, 2003; Komorek, 2005). Το θεωρητικό πλαίσιο της έρευνας αυτής αποτελεί επίσης το "Μοντέλο Διδακτικής Αναδόμησης" προσαρμοσμένο κατάλληλα για την εκπαίδευση εκπαιδευτικών (βλ. Duit et al., 2012; Komorek & Kattmann, 2008). Στην έρευνα αυτή συμμετείχαν 6 εν ενεργεία καθηγητές φυσικής στη Γερμανία που εκπαιδεύτηκαν από την ερευνητική ομάδα και ανέπτυξαν μια διδακτική ακολουθία που εμπεριείχε τις ακόλουθες όψεις μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων: α) περιορισμένη προβλεψιμότητα ντετερμινιστικών χασοτικών συστημάτων (ελαφρώς διαφορετικές αρχικές συνθήκες και μικρές διακυμάνσεις περιορίζουν τη δυνατότητα πρόβλεψης σε ντετερμινιστικά χασοτικά συστήματα), β) αλληλεπίδραση ντετερμινιστικών και τυχαίων διαδικασιών στην εμφάνιση δομών (π.χ. δενδρίτες), γ) τάξη στο χάος (π.χ. χασοτικοί ελκυστές), ε) μηχανιστικές και σύγχρονες θεωρήσεις για τον κόσμο (ο δαίμονας του Laplace σε αντιπαράθεση με θεωρήσεις που προκύπτουν από τη μελέτη των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων). Οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποίησαν κατά τη διδασκαλία τους πειράματα (π.χ. μαγνητικό εκκρεμές και δενδρίτες), προσομοιώσεις, αναλογίες κλπ. Η ακολουθία αυτή εφαρμόστηκε από τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς στις τάξεις που δίδασκαν (μαθητές Λυκείου). Δεδομένα συλλέχθηκαν με διάφορους τρόπους. Ερωτηματολόγια συμπληρώθηκαν από τους μαθητές πριν και μετά τη διδασκαλία, καθώς και από τους εκπαιδευτικούς μετά τη διδασκαλία. Με τους εκπαιδευτικούς διεξήχθησαν επίσης και συνεντεύξεις πριν ξεκινήσει η εκπαίδευσή τους. Οι διδασκαλίες βιντεοσκοπήθηκαν με τη χρήση δύο βιντεοκαμερών. Από την έρευνα αυτή αναδείχθηκε η αναγκαιότητα να επιμορφωθούν οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί όχι μόνο στις διαδικασίες διδασκαλίας και μάθησης, αλλά και στο ίδιο το επιστημονικό αντικείμενο, ιδιαίτερα σε επιστημολογικές - φιλοσοφικές όψεις. Σε αρκετές περιπτώσεις οι απόψεις των εκπαιδευτικών για νομοτέλεια, πρόβλεψη και τυχαιότητα φαίνονταν να είναι παρόμοιες με αυτές των μαθητών.

Εν κατακλείδι, σε μια συζήτηση για την αναγκαιότητα διδασκαλίας σύγχρονων θεμάτων φυσικών επιστημών (Shabajee & Postlethwaite, 2000) υπάρχουν μια σειρά εμπειρικά και θεωρητικά ερευνητικά δεδομένα, που συνηγορούν υπέρ της άποψης τα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα να αποτελέσουν αναπόσπαστο μέρος των αναλυτικών προγραμμάτων φυσικών επιστημών. Τα ερευνητικά αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στην παρούσα εργασία είναι ενθαρρυντικά και παρέχουν κατευθυντήριες γραμμές, που μπορούν να αξιοποιηθούν σε μια ενδεχόμενη εισαγωγή μια τέτοιας θεματικής στη διδασκαλία των φυσικών επιστημών.

## Αναφορές

- Adams, H.M., & Russ, J.C. (1992). Chaos in the classroom: Exposing gifted elementary school children to chaos and fractals. *Journal of Science Education and Technology*, 1, 191-209.
- Bae, S. (2009). Chaos: a topic for interdisciplinary education in physics. *European Journal of Physics*, 30, 677-684.
- Bell, T. (2004). Komplexe Systeme und Strukturprinzipien der Selbstregulation im fächerübergreifenden Unterricht – eine Lernprozessesstudie in der SII [Διδασκαλία πολύπλοκων συστημάτων και δομικών αρχών αυτορρύθμισης σε διεπιστημονικό πλαίσιο – Μια μελέτη των διαδικασιών μάθησης σε μαθητές Λυκείου]. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften*, 10, 162-180.
- Bunde, A., & Havelin, S. (1994). *Fractals in science*. Berlin: Springer.
- Bücker, N., & Stavrou, D. (2006) Strukturen: Zufall trifft Naturgesetz [Δομές: Η τυχαιότητα συναντά το φυσικό νόμο] *Naturwissenschaften im Unterricht, Physik*, 17, 32-37.
- Capra, F. (1996). *Lebensnetz* [Το δίκτυο της ζωής]. Bern, Scherz
- Chacón, R., Batres, Y., & Cuadros, F. (1992). Teaching deterministic chaos through music. *Physics Education*, 27, 151-154.
- Crutchfield, J.P., Farmer, J.D., Packard, N.H., & Shaw, R.S. (1986). Chaos. *Scientific American* 255, 38-49.
- Dimitriadi, K., & Halkia, K. (2012). Secondary students' understanding of basic ideas of special relativity. *International Journal of Science Education*, 34, 2565-2582.
- Duit, R., & Komorek, M. (1997). Understanding the basic ideas of chaos-theory in a study of limited predictability. *International Journal of Science Education*, 19, 247-264.
- Duit, R., Komorek, M., & Wilbers J. (1997). Studies on educational reconstruction of chaos theory. *Research in Science Education*, 27, 339-357.
- Duit, R., Gropengießer, H., Kattmann, U., Komorek, M., & Parchmann, I. (2012). The Model of Educational Reconstruction – A framework for improving teaching and learning science. In D. Jorde & J. Dillon (eds.), *The World Handbook of Science Education – Handbook of Research in Europe* (pp. 13-37). Rotterdam, Taipei: Sense Publisher.
- Hedrich, R. (1999). Physik, Philosophie und komplexe Systeme [Φυσική, φιλοσοφία και πολύπλοκα συστήματα]. *Praxis der Naturwissenschaften – Physik*, 48, 4, 2-5.
- Kalkanis, G., Hadzidakis, P., & Stavrou, D. (2003). An instructional model for a radical conceptual change towards quantum mechanics concepts. *Science Education*, 87, 257-280.
- Komorek, M. (2005). Lehren und Lernen nichtlinearer Physik – eine Didaktische Rekonstruktion [Διδασκαλία και Μάθηση μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων – μια Διδακτική Αναδόμηση]. Habilitationsschrift, University of Kiel.
- Komorek, M., & Duit, R. (2004). The teaching experiment as a powerful method to develop and evaluate teaching and learning sequences in the domain of non-linear systems. *International Journal of Science Education*, 26, 619-633.
- Komorek, M., Duit, R., Bücker, N., & Naujack, B. (2001). Learning process studies in the field of fractals. In H. Behrendt, H. Dahncke, R. Duit, W. Gräber, M. Komorek, A. Kross, & P. Reiska (eds.), *Research in Science Education – Past, Present and Future* (pp. 95-100). Dordrecht: Kluwer.
- Komorek, M., & Kattmann, U. (2009). The model of educational reconstruction In S. Mikelskis-Seifert, U. Ringelband & M. Brückmann (eds.), *Four decades of research in science education – From curriculum development to quality improvement* (pp.171-188). Münster: Waxmann.
- Komorek, M., Stavrou, D., & Duit, R. (2003). Nonlinear physics in upper physics classes: Educational Reconstruction as a frame for development and research in a study of teaching and learning basic ideas of nonlinearity. In D. Psillos, P. Kariotoglou, V. Tselves, E. Hatzikraniotis, G. Fassoulopoulos & M. Kallery (eds.), *Science Education Research in the Knowledge Based Society* (pp.269-276), Dordrecht: Kluwer.
- Komorek, M., Wendorff, L., & Duit, R. (2002). Expertenbefragung zum Bildungswert der nichtlinearen Physik [Απόψεις ειδικών για την εκπαιδευτική αξία μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων]. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften*, 8, 33-51.
- Kuhn, W. (1994). Historische Entwicklungslinien der Chaos-Vorstellungen [Ιστορική Εξέλιξη των Ιδεών για το Χάος]. *Computer und Unterricht*, 14, 54-60.
- Laws, P. W. (2004). A unit on oscillations, determinism and chaos for introductory physics students. *American Journal of Physics*, 72(4), 446-452.
- Mandelbrot, B.B. (1983). *The fractal geometry of nature*. New York: Freeman.
- Mayring, P. (2000). *Qualitative Inhaltsanalyse* [Ποιοτική ανάλυση περιεχομένου]. Weinheim: Deutscher Studien Verlag.
- Nicolis, G. (1989). Physics of far-from-equilibrium systems and self-organisation. In P. Davies (ed.), *The New Physics* (pp. 316-347). Cambridge: University Press.
- Nicolis, G., & Prigogine, I. (1977). *Self-organization in nonequilibrium systems*. New York: Wiley.
- Nordmeier, V., & Schlichting, H.J. (1997). Nichtlineare Physik und Physikunterricht – eine Bestandsaufnahme: 35 Experimente zu Synergetik, Fraktalen & Chaos. In: H. Behrendt (ed.), *Zur Didaktik der Physik und Chemie – Probleme und Perspektiven* (pp. 391-396). Alsbach: Leuchtturm.

- Prigogine, I. (1980). *From being to becoming*. San Francisco: Freeman.
- Sander, L. M. (1989). Fraktale Wachstum [Φράκταλ ανάπτυξη]. In H. Jürgens (ed.), *Chaos und Fraktale* (pp. 120 - 126). Heidelberg: Spektrum der Wissenschaft.
- Schuster, G.H. (1989), *Deterministic Chaos*. Weinheim: VCH
- Shabajee, P., & Postlethwaite, K. (2000). What happened to modern physics? *School Science Review* 81, 51-55.
- Schlichting, H. J. (1993). Naturwissenschaften zwischen Zufall und Notwendigkeit [Φυσικές Επιστήμες μεταξύ τυχαιότητας και αναγκαιότητας]. *Praxis der Naturwissenschaften - Physik* 42, 1, 35-44.
- Stavrou, D. (2004). *Das Zusammenspiel von Zufall und Gesetzmäßigkeiten in der nichtlinearen Dynamik. Didaktische Analyse und Lernprozesse* [The interplay of chance and deterministic laws in nonlinear systems. Educational analysis and learning processes]. Berlin: Logos.
- Stavrou, D., Assimopoulos, S. & Skordoulis, C. (2013). A unit on deterministic chaos for student teachers. *Physics Education*, 48, (3), 355-359.
- Stavrou, D., & Duit, R. (2013). Teaching and learning the interplay between chance and determinism in nonlinear systems. *International Journal of Science Education*, DOI:10.1080/09500693.2013.802056.
- Stavrou, D., Duit, R., & Komorek, M. (2008). A teaching and learning sequence about the interplay of chance and determinism in nonlinear systems. *Physics Education*, 43(4), 417 - 422.
- Strauss, A., & Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research*. Newbury Park, CA: Sage.
- Strizhak, P., & Menzinger, M. (1996). Non-linear dynamics of the BZ reaction: A simple experiment that illustrates limit cycles, chaos, bifurcation, and noise. *Journal of Chemical Education*, 73(9), 868-873.
- Vacc, N.N. (1999). Exploring fractal geometry with children. *School Science and Mathematics*, 99(2), 77-82.
- Van Hook, S.J., & Schatz, M.F. (1997). Simple demonstrations of pattern formation. *The Physics Teacher*, 35(10), 391-395.
- Velarde, M.G., & Normand, C. (1989). Konvektion [Διάδοση θερμότητας με μεταφορά]. In H. Jürgens (ed.), *Chaos und Fraktale* (pp. 38-51), Heidelberg: Spektrum der Wissenschaft.
- Witten, T.A., & Sander, L.M. (1981). Diffusion-limited aggregation, a kinetic critical phenomenon. *Physics Review Letters*, 47(19), 1400-1403.
- Witten, T.A., & Sander, L.M. (1983). Diffusion-limited aggregation. *Physical Review B*, 27(9), 5686-5697.
- Ασημόπουλος Σ., Σταύρου Δ., & Σκορδούλης Κ. (2009). Εκπαιδευοντας Φοιτητές του Π.Τ.Δ.Ε. σε σύγχρονες Θεωρίες της Φυσικής. Στο Π. Καριώτογλου, Α. Σπύρτου & Α. Ζουπίδης (επιμ.), *Πρακτικά 6ου Πανελληνίου Συνεδρίου Διδακτικής των Φυσικών επιστημών και Νέων Τεχνολογιών στην Εκπαίδευση - Οι πολλαπλές προσεγγίσεις της διδασκαλίας και της μάθησης των Φυσικών Επιστημών* (σ. 216-223), Ανακτήθηκε στις 29 Ιουνίου 2013 από <http://www.uowm.gr/kodifeet/?q=el/node/213>
- Σκορδούλης, Κ. (2013). Φράκταλς, Χάος, Πολυπλοκότητα: Διδακτικές Προσεγγίσεις. Στο Δ. Βαβουγιός & Σ. Παρασκευόπουλος (επιμ.), *Πρακτικά 8ου Πανελληνίου Συνεδρίου Διδακτικής των Φυσικών Επιστημών και Νέων Τεχνολογιών στην Εκπαίδευση* (σελ. 21-29), Βόλος: Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
- Σταύρου Δ. (2006). Διδασκαλία της αλληλεπίδρασης τυχαιότητας και ντετερμινιστικών νόμων στα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα: συσχέτιση θεωρητικών και εμπειρικών δεδομένων. Στο Ε. Σταυρίδου (επιμ.), *Διδακτική των Φυσικών Επιστημών: Μέθοδοι και Τεχνολογίες Μάθησης*, 3ο Πανελλήνιο Συνεδρίου της Ε.ΔΙ.ΦΕ (σ. 245-252), Αθήνα: Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών
- Σταύρου, Δ., & Ασημόπουλος, Σ. (2011). Μη γραμμικά δυναμικά συστήματα στην εκπαίδευση. Στο Γ. Παπαγεωργίου & Γ. Κουντουριώτης (επιμ.), *Πρακτικά 7ου Πανελληνίου Συνεδρίου Διδακτικής των Φυσικών Επιστημών και Νέων Τεχνολογιών στην Εκπαίδευση - Αλληλεπιδράσεις Εκπαιδευτικής Έρευνας και Πράξης στις Φυσικές Επιστήμες* (σ. 138- 145), Αλεξανδρούπολη: Πανεπιστήμιο Θράκης.

Αναφορά στο άρθρο ως: Σταύρου Δ. (2013). Μη γραμμικά δυναμικά συστήματα στη διδασκαλία των Φυσικών Επιστημών. *Θέματα Επιστημών και Τεχνολογίας στην Εκπαίδευση*, 6(1-2), 49-66.

<http://earthlab.uoi.gr/thete/index.php/thete>