Θέματα Επιστημών και Τεχνολογίας στην Εκπαίδευση

Τόμ. 4, Αρ. 1-3 (2011)

Ειδικό Αφιέρωμα: «Ηλεκτρονική Μάθηση και ΤΠΕ στην Εκπαίδευση: Ερευνητικές τάσεις και προοπτικές στην Ελλάδα»

Ανάπτυξη νοημάτων κατά τη διαδικασία ισοδιαμέρισης ενός ορθογωνίου με τη χρήση του Χελωνόκοσμου

Ιωάννης Ζάντζος, Χρόνης Κυνηγός

Ανάπτυξη νοημάτων κατά τη διαδικασία ισοδιαμέρισης ενός ορθογωνίου με τη χρήση του Χελωνόκοσμου

Ιωάννης Ζάντζος[1], Χρόνης Κυνηγός[2]
izantzos@math.uoa.gr, kynigos@ppp.uoa.gr
Τμήμα Φιλοσοφίας Παιδαγωγικής και Φιλοσοφίας, Ε.Κ.Π.Α.

Περίληψη. Στο άρθρο αυτό παρουσιάζονται μερικά από τα αποτελέσματα μιας ερευνητικής μελέτης που αφορά τα νοήματα που παράγονται από μαθητές 12-13 ετών γύρω από την έννοια της ισοδιαμέρισης. Οι μαθητές εργάστηκαν σε ζεύγη χρησιμοποιώντας ένα υπολογιστικό περιβάλλον που συνδυάζει τον δυναμικό χειρισμό μαθηματικών αντικειμένων και την συμβολική έκφραση μέσα από τη γλώσσα προγραμματισμού Logo. Ως αφετηρία στους πειραματισμούς, τους δόθηκε ο μισοψημένος μικρόκοσμος «ισοδιαμέριση» που θα τους ήταν χρήσιμος για την ισοδιαμέριση ενός ορθογωνίου σε ίσα μέρη. Η έννοια της συμμεταβολής, το άπειρο ως διαδικασία μέσω του κιβωτισμού διαστημάτων και το γεγονός ότι το αποτέλεσμα της παραπάνω οριακής διαδικασίας είναι ένας δεκαδικός περιοδικός αριθμός, είναι μερικά από τα νοήματα που αναπτύχθηκαν.

Λέξεις κλειδιά: Εργαλεία μεταβολής, ισοδιαμέριση, κιβωτισμός διαστημάτων, μισοψημένος μικρόκοσμος

Εισαγωγή

Τα τελευταία χρόνια έχουν γίνει πολυάριθμες έρευνες που αφορούν τη χρήση της τεχνολογίας σε πολλούς τομείς των μαθηματικών, έχουν αναφερθεί τα οφέλη από τη χρήση τους (π.χ Laborde, et al., 2006; Heid & Blume, 2008) και δίνεται επίσης μεγάλη έμφαση στην χρησιμοποίηση της στη διδασκαλία των μαθηματικών (NCTM, 2000). Η είσοδος των ψηφιακών τεχνολογιών στις σχολικές αίθουσες των μαθηματικών σε συνδυασμό με ορισμένα χαρακτηριστικά τους που σχετίζονται με τα μαθηματικά, καθιστούν εφικτή μια αναδιοργάνωση των σχολικών αναλυτικών προγραμμάτων των μαθηματικών. Μερικά από αυτά τα χαρακτηριστικά σύμφωνα με τους Heid και Blume (2008) είναι: ο χειρισμός των μαθηματικών αναπαραστάσεων με πολλαπλές συνδεόμενες και δυναμικές δυνατότητες και η εστίαση στα μαθηματικά αντικείμενα παρά στην προτεραιότητα στις διαδικασίες σχετικές με αυτά τα αντικείμενα.

Σύμφωνα με τον Duval (2006), οι μετατροπές εντός ενός αναπαραστασιακού συστήματος (register) και κυρίως μεταξύ δυο τουλάχιστον αναπαραστασιακών συστημάτων της ίδιας έννοιας(conversion), είναι θεμελιώδους σημασίας στη μάθηση των μαθηματικών. Η μετατροπή μεταξύ αναπαραστασιακών συστημάτων απαιτεί ότι οι μαθητές διακρίνουν τι είναι μαθηματικά σχετικό σε κάθε σύστημα και τους βοηθάει να διαχωρίζουν τα μαθηματικά αντικείμενα από τις αναπαραστάσεις τους. Έχουν έτσι δώσει οι ψηφιακές τεχνολογίες την δυνατότητα να αναπτυχθούν αναλυτικά προγράμματα σπουδών τα οποία έχουν εστιαστεί στα μαθηματικά αντικείμενα παρά στην προτεραιότητα στις διαδικασίες σχετικές με αυτά τα αντικείμενα. Για παράδειγμα στην άλγεβρα, έδωσαν τη δυνατότητα το κέντρο εστίασης να είναι οι συναρτήσεις και όχι η επίλυση εξισώσεων και η παραγωγή ισοδύναμων εκφράσεων (Heid & Blum, 2008). Μας έχουν επίσης εφοδιάσει με εργαλεία, με τα οποία 'περιφερειακές' έννοιες του αναλυτικού προγράμματος να μπορούν τώρα να αξιοποιηθούν πολύ περισσότερο για τη δημιουργία μαθηματικών νοημάτων. Όπως για παράδειγμα η έννοια των καμπυλών και η σύνδεσή της με το εννοιολογικό πεδίο της καμπυλότητας. Η διερεύνηση αυτού του εννοιολογικού πεδίου με τη χρήση κατάλληλων ψηφιακών μέσων αποτέλεσε πλούσια πηγή για τη δημιουργία μαθηματικών νοημάτων από δεκατριάχρονους μαθητές (Kynigos & Psycharis, 2003.).

Μια έννοια που τίθεται επίσης στο 'περιθώριο' στα σχολικά αναλυτικά προγράμματα είναι και η έννοια της ισοδιαμέρισης. Η έννοια της ισοδιαμέρισης εντοπίζεται σε πολλά σημεία στα σχολικά προγράμματα και μάλιστα σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης. Όπως για παράδειγμα κατά την εισαγωγή στις έννοιες των κλασμάτων στην πρωτοβάθμια αλλά και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Επίσης στη γεωμετρία, στο χωρισμό του κύκλου σε ίσα μέρη αλλά και σε έννοιες σχετικές με τα κανονικά πολύγωνα. Η εν λόγω έννοια, δεν αποτελεί αντικείμενο αυτό καθαυτό σε κάποια ενότητα των σχολικών μαθηματικών, και η εστίαση δεν τίθεται στην έννοια της ισοδιαμέρισης ως πεδίο δημιουργίας μαθηματικών νοημάτων. Οι εκπαιδευτικοί τις περισσότερες φορές χρησιμοποιούν σχήματα κατά την εισαγωγή της έννοιας του κλάσματος που είναι ήδη χωρισμένα σε ίσα μέρη, στερώντας έτσι από τους μαθητές την ευκαιρία για πειραματισμό (Κολέζα, 2000).

Η ισοδιαμέριση (partitioning) ορίζεται ως ο χωρισμός μιας ποσότητας σε ένα αριθμό ίσων μερών ενώ συγχρόνως η ποσότητα παραμένει σαν ένα όλο (Olive & Lobato, 2008). Η ισοδιαμέριση έχει αναγνωριστεί σαν ένας σημαντικός μηχανισμός για την κατανόηση των ρητών αριθμών και ως μέρος της ανεπίσημης γνώσης των μαθητών ακόμα και πριν την είσοδό τους στο σχολείο. Επίσης η ισοδιαμέριση είναι μια διαδικασία που παίζει σημαντικό ρόλο στην παραγωγή των υποκατασκευών (subconstructs) των ρητών αριθμών (μέρος-όλου, μέτρο, πηλίκο, τελεστή και αναλογία) και συνδέεται άμεσα με την έννοια της ισοδυναμίας των κλασμάτων (Lamon, 2007). Ευρήματα από διάφορες έρευνες πάνω στην κατανόηση των κλασμάτων δείχνουν ότι οι μαθητές που αποτυγχάνουν να επεκτείνουν τις γνώσεις τους σε έννοιες σχετικές με τα κλάσματα, συνήθως έχουν έλλειψη στην κατανόηση της ισοδιαμέρισης (Behr et al., 1983). Οι ίδιοι ερευνητές προτείνουν ότι οι μαθητές πρέπει να έχουν ένα ευρύ φάσμα εμπειριών σε δραστηριότητες ισοδιαμέρισης έτσι ώστε να μπορέσουν να παρατηρήσουν την αντισταθμιστική σχέση μεταξύ του μεγέθους και του αριθμού των μερών στα οποία χωρίζεται το όλο. Η Lammon (1999) θεωρεί τη ισοδιαμέριση κρίσιμη έννοια για την κατανόηση των ρητών αριθμών και επισημαίνει ότι, αφού τα κλάσματα σχηματίζονται από την ισοδιαμέριση, η διαδικασία αυτή κάθε αυτή είναι θεμελιώδης για την κατανόηση εννοιών σχετικών με τους ρητούς αριθμούς, Για παράδειγμα, ένα άμεσο αποτέλεσμα της ισοδιαμέρισης είναι ότι μέσα από αυτή τη διαδικασία οι μαθητές μπορούν να καταλήξουν στη σχέση που συνδέει τον αριθμό των μερών και του μεγέθους του καθενός από αυτά.

Τα παραπάνω αναδεικνύουν ότι η έννοια της ισοδιαμέρισης συνδέεται άμεσα με την έννοια της αντίστροφης αναλογίας (για παράδειγμα στην ισοδιαμέριση ενός ορθογωνίου, ο αριθμός των μερών στα οποία μπορεί να χωριστεί και το μήκος του κάθε μέρους αποτελούν αντιστρόφως ανάλογα ποσά) αλλά και με τις έννοιες των ρητών και κλασματικών αριθμών και κατά συνέπεια αποτελεί μέρος του πολλαπλασιαστικού εννοιολογικού πεδίου (Vergnaud, 1988). Σύμφωνα με τον Vergnaud, το πολλαπλασιαστικό εννοιολογικό πεδίο αποτελείται από όλες τις προβληματικές καταστάσεις των οποίων η λύση εμπλέκει πολλαπλασιασμό ή διαίρεση και ταξινόμησε αυτές τις καταστάσεις σε τρεις κατηγορίες: απλή αναλογία , γινόμενο μέτρων και πολλαπλή αναλογία. Ο Vergnaud εισήγαγε την έννοια του εννοιολογικού πεδίου ως ένα σύνολο καταστάσεων, η γνώση των οποίων απαιτεί γνώση πολλών εννοιών διαφορετικής φύσης. Υποστήριξε ότι έχει νόημα η θεώρηση μιας έννοιας σε σχέση με άλλες συγγενείς έννοιες, με καταστάσεις στις οποίες μπορεί να χρησιμοποιηθεί και με τις διαθέσιμες αναπαραστάσεις της και δεν έχει νόημα η αντίληψή της σε απομόνωση. Στο πολλαπλασιαστικό εννοιολογικό πεδίο, εκτός από την έννοια της αναλογίας (ευθεία και αντίστροφη) μεταξύ άλλων περιέχονται και έννοιες όπως: ρητοί αριθμοί, κλάσματα και δεκαδικοί αριθμοί.

Έρευνες σχετικές με τις έννοιες των αναλογιών έχουν αναδείξει την ύπαρξη σημαντικών προβλημάτων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόησή τους (π.χ. Behr et al., 1992). Ο Vergnaud (1988) και η Lamon (2007), τονίζουν ότι, το είδος των δραστηριοτήτων με αντίστροφη αναλογία είναι γνωστικά πιο απαιτητικά από εκείνα της ευθείας αναλογίας διότι μεταξύ άλλων εμπλέκονται τουλάχιστον τρεις χώροι μέτρου. Αν και έχουν αναφερθεί οφέλη από τη χρήση των υπολογιστικών περιβαλλόντων στις αναλογικές στρατηγικές των μαθητών (Hoyles and Noss, 1989; Psycharis and Kynigos, 2004) και στα κλάσματα (Psycharis et al, 2007), ωστόσο, λιγοστές είναι οι έρευνες σε δραστηριότητες με αντιστρόφως ανάλογα ποσά. Η Lamon (2007), υπογραμμίζει την ανάγκη για τη μελέτη της αντίστροφης αναλογίας και καθορίζοντας την μελλοντική ατζέντα για τους ρητούς αριθμούς και την αναλογική σκέψη επισημαίνει: «Πολύ λίγα είναι γνωστά σχετικά με τη σκέψη των μαθητών σε πλαίσια με αντίστροφη αναλογία» (σελ. 661).

Επίσης, σύμφωνα με τους Lachance & Confrey (2002), πολλές έρευνες έχουν δείξει ότι μαθητές όλων των επιπέδων δυσκολεύονται να κατανοήσουν τους δεκαδικούς αριθμούς. Σημαντικές δυσκολίες επίσης υπάρχουν στην κατανόηση των δεκαδικών περιοδικών αριθμών. Μια χαρακτηριστική παρανόηση, σύμφωνα με πολλούς ερευνητές (π.χ. Tall & Vinner, 1981) που εμφανίζεται σε μαθητές όλων των ηλικιών, είναι το γεγονός ότι θεωρούν τον δεκαδικό περιοδικό αριθμό 0.9999… μικρότερο του 1. Μερικοί λόγοι για αυτή τη σύγχυση είναι η έλλειψη κατανόησης των οριακών διαδικασιών και η παρερμηνεία του συμβόλου 0.999… σαν ένα μεγάλο αλλά πεπερασμένο αριθμό από εννιάρια (Tall &Vinner, 1981).

Θεωρητικό Πλαίσιο

Το κύριο θεωρητικό πλαίσιο το οποίο υιοθετήσαμε, είναι το πλαίσιο της μάθησης μέσα από κατασκευές, του κονστρακτιονισμού-constructionism(Harel & Papert, 1991; Kafai & Resnick, 1996). Παρακάτω αναλύουμε το συγκεκριμένο πλαίσιο καθώς επίσης και τα δομήματα των ‘εγκαθιδρυμένων αφαιρέσεων’ και του ‘μισοψημένου μικρόκοσμου’, τα οποία έχουν χρησιμοποιηθεί στην παρούσα έρευνα.

Η Κονστρακτιονιστική θεωρία μάθησης (Constructionism)

Ο κονστρακτιονισμός είναι και μια θεωρία μάθησης αλλά και μια στρατηγική για την εκπαίδευση. Στηρίζεται στις κατασκευαστικές θεωρίες (constructivism) του Piaget, υποστηρίζοντας ότι η γνώση δεν μεταφέρεται από τον δάσκαλο στον μαθητή, αλλά ενεργητικά κατασκευάζεται από τον ίδιο τον μαθητή (Kafai and Resnick, 1996).

Οι θεωρητικές προσεγγίσεις για τη μαθησιακή διαδικασία των μαθηματικών σε περιβάλλοντα βασισμένα σε εργαλεία σύγχρονης τεχνολογίας αρχίζουν από τη θεώρηση του αμερικανού S. Papert (1980), ο οποίος ήθελε να περιγράψει τη μάθηση ως δραστηριότητα που πηγάζει από τη διερευνητική και δημιουργική ανθρώπινη φύση. Σύμφωνα με τον Κυνηγό (2006, σελ. 128,129), ο Papert ισχυρίστηκε ότι αυτό που δεν έχουν κάνει οι επιστήμες της αγωγής είναι να μελετήσουν το τι μπορεί να κάνει το παιδί. Έτσι, κατά τον Papert, θα πρέπει να εστιάσουμε την προσοχή μας στο ποια νοήματα δομεί το παιδί και όχι στο αν καταλαβαίνει ή παρανοεί νοήματα που υπάρχουν. Με άλλα λόγια, αναποδογυρίζει την προσέγγιση και μελετάει τα μαθηματικά νοήματα που δομούν τα παιδιά, δηλαδή τι καταλαβαίνουν (αντί για το τι παρανοούν) και πως η κατανόηση αυτή αναπτύσσεται (αντί για το ποιες παρανοήσεις διορθώνονται). Έτσι, ήταν πεπεισμένος ότι τα παιδιά μπορούν να σκεφτούν με πολύ ανώτερους τρόπους από ότι υποστηρίζεται και ότι μπορούν να σχεδιαστούν τεχνητά περιβάλλοντα τα οποία να είναι πολύ πλούσια σε δυνατότητες, ώστε να δίνουν στο παιδί εμπειρίες δημιουργίας μαθηματικών νοημάτων (Papert, 1980).

Η θεώρηση του Papert έχει και ένα δεύτερο σκέλος , τη φιλοσοφία του για τη χρήση της σύγχρονης τεχνολογίας. Σκέφτηκε ότι ο προγραμματισμός που ήταν το βασικό εργαλείο στην εξέλιξη της επιστήμης της τεχνητής νοημοσύνης, ήταν και ένα αναπόσπαστο εργαλείο σκέψης και δημιουργίας και ότι αυτή η δραστηριότητα ήταν μια γνήσια δραστηριότητα μάθησης. Στο πλαίσιο αυτό ο προγραμματισμός ωθεί τους μαθητές να αναπτύξουν διαισθητικές ιδέες και να τις εκφράσουν με τη χρήση συμβόλων, να τις εκτελέσουν στον υπολογιστή και να παρατηρήσουν άμεσα το αποτέλεσμα τους συγκρίνοντάς το με το αποτέλεσμα που επιδίωκαν πριν από την εκτέλεση. Ο προγραμματισμός επομένως προσεγγίζεται ως μέσο έκφρασης, διερεύνησης, δόμησης και αποκάλυψης ιδεών στο πλαίσιο μικρών ομάδων εργασίας οι οποίες ασχολούνται με κάποιο project, και έτσι μπορεί να δημιουργήσει σημαντικές ευκαιρίες για την κοινωνική κατασκευή του νοήματος μέσα στη σχολική τάξη.

Το δόμημα των 'εγκαθιδρυμένων αφαιρέσεων' (situated abstractions)

Σύμφωνα με τον Κυνηγό (2006), για να καταλάβει κανείς τα νοήματα που αναπτύσσουν οι μαθητές, δεν μπορεί να αγνοήσει το περιβάλλον στο οποίο εργάζονται και το πώς η αλληλεπίδραση που έχουν με τα συγκεκριμένα εργαλεία επηρεάζει τη σκέψη τους. Είναι επομένως ιδιαιτέρως χρήσιμη η προσέγγιση της εγκαθιδρυμένης μάθησης και ιδιαίτερα το δόμημα των 'εγκαθιδρυμένων αφαιρέσεων' (situated abstractions), που ανέπτυξαν οι Hoyles & Noss (1996), για να περιγράψουν καλύτερα αυτή τη γενίκευση εννοιών. Ο όρος αυτός δηλώνει καταρχήν ότι συμφωνούν με τον Papert ότι οι μαθητές κάνουν μαθηματικές αφαιρέσεις και ότι έχει ιδιαίτερη σημασία να βρούμε τρόπους και εργαλεία για να τις περιγράψουμε. Ταυτόχρονα όμως δείχνουν ότι αυτές οι αφαιρέσεις είναι μερικές γιατί αναδύονται μέσα από πολύ συγκεκριμένες καταστάσεις, όπως τα συγκεκριμένα τεχνολογικά εργαλεία, τις δραστηριότητες, τους διαλόγους και τη παρέμβαση του διδάσκοντα. Όπως ακριβώς και ο Papert, αντιστρέφουν τη στοχοπροσήλωση στις παρανοήσεις εννοιών και εστιάζουν στις έννοιες που δημιουργούν οι μαθητές. Μόνο αν καταλάβουμε τις έννοιες αυτές και τη διαδικασία με την οποία παράγονται, θα μπορέσουμε να διαμορφώσουμε μαθησιακά περιβάλλοντα που δίνουν πιο πλούσιες ευκαιρίες στους μαθητές να τις παράγουν.

Το δόμημα του μισοψημένου μικρόκοσμου

Ένα κεντρικό χαρακτηριστικό της μεθόδου που χρησιμοποιήθηκε για τη μελέτη των νοημάτων που αναπτύσσουν οι μαθητές, ήταν να τους δώσουμε να ξεκινήσουν με έναν «μισοψημένο» μικρόκοσμο (Kynigos, 2007). Οι μισοψημένοι μικρόκοσμοι είναι λογισμικά σχεδιασμένα με τέτοιο τρόπο ώστε να προκαλούν μαθητές αλλά και εκπαιδευτικούς να κατασκευάσουν κάτι με αυτούς ή ακόμα να τους αλλάξουν αλλά και να τους αποδομήσουν. Δεν αποτελούν έτοιμα περιβάλλοντα για να κατανοηθούν από τους εκπαιδευτικούς και μετά να χρησιμοποιηθούν από τους μαθητές. Ενσωματώνουν διάφορες έννοιες και προσφέρουν στο μαθητή τα εργαλεία για να αλληλεπιδράσει με το μικρόκοσμο. Στόχος τους είναι να λειτουργούν ως σημεία εκκίνησης, και ο χρήστης να οικειοποιηθεί τις ιδέες που βρίσκονται πίσω από τη διαδικασία κατασκευής τους.

Οι μισοψημένοι μικρόκοσμοι είναι σχεδιασμένοι από τη φύση τους για: α) αλλοίωση κατασκευής (instrumentalization), δηλαδή τη διαδικασία κατά την οποία ο μαθητής αλλάζει τις λειτουργικότητες του λογισμικού-κατασκευάσματος φτιάχνοντας ένα άλλο (Guin & Trouche, 1999) και β) μετατροπές (conversion), μετατρέποντας μια αναπαράσταση μιας έννοιας σε μια άλλη αναπαράστασή της (Duval, 2006). Ο χελωνόκοσμος με τα διαφορετικά αναπαραστασιακά συστήματα που διαθέτει, συμβολικά μέσω της γλώσσας προγραμματισμού Logo και με τη χρήση των δυναμικών εργαλείων μεταβολής, δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές όχι μόνο να πειραματίζονται και να χρησιμοποιούν διαφορετικές αναπαραστάσεις για το ίδιο μαθηματικό αντικείμενο, αλλά να χρησιμοποιούν αυτές τις αναπαραστάσεις για να κάνουν αλλαγές στο αναπαριστώμενο σχήμα στη σκηνή. Σημαντικό είναι και το γεγονός ότι και με τον αλληλεξαρτώμενο τρόπο που είναι συνδεδεμένες, διευκολύνει τη μετατροπή μιας αναπαράστασης μιας έννοιας σε μια άλλη (Duval, 2006), και κατά συνέπεια γενίκευση και αφαίρεση μαθηματικών ιδιοτήτων.

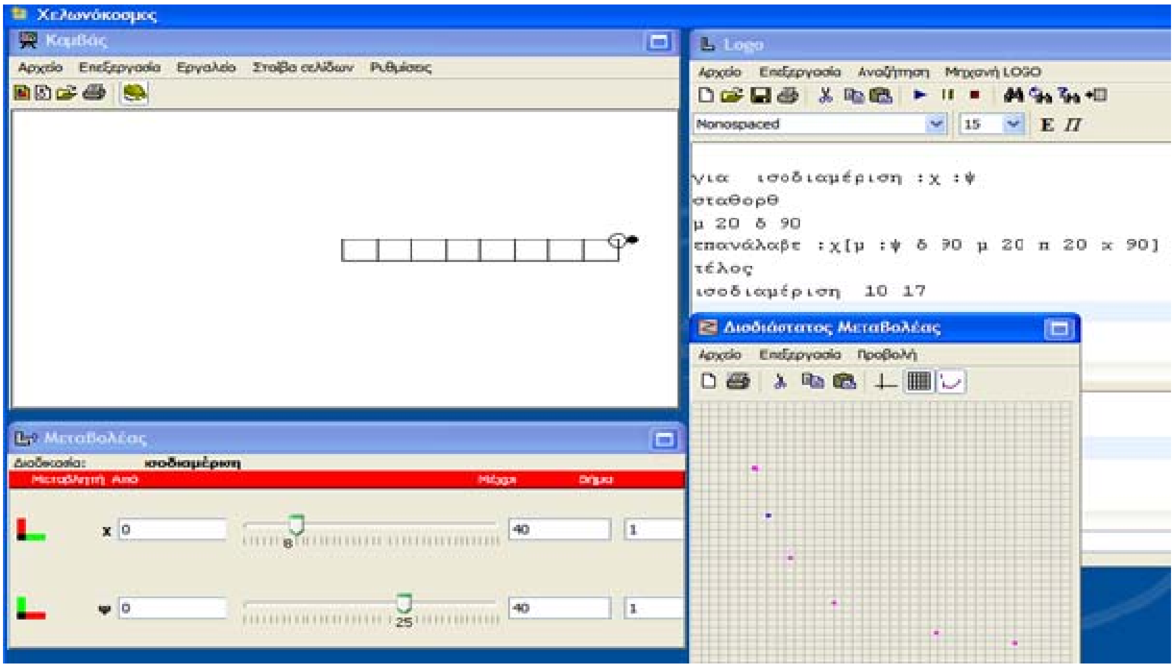
Η διαδικασία 'διορθώματος' του μικρόκοσμου που δίνεται με τη συμβολική μορφή σε γλώσσα Logo, μιας και αποτελεί ένα ελαττωματικό μοντέλο, απαιτεί από την ίδια του τη φύση μετατροπή (conversion). Δηλαδή να αναγνωριστούν εκείνα τα σημεία του κώδικα της Logo τα οποία δεν δίνουν τον επιθυμητό στόχο, στην δική μας περίπτωση το χωρισμό του ορθογωνίου σε ίσα μέρη. Με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές εμπλέκονται σε κονστρακτιονιστικές διαδικασίες παραγωγής νοημάτων. Ο μισοψημένος μικρόκοσμος 'ισοδιαμέριση' που σχεδιάστηκε με βάση το παιδαγωγικό μας πλάνο, προκαλούσε τους μαθητές να πειραματιστούν, να τον αλλάξουν και να τον ξανακατασκευάσουν με βάση τις δικές τους επιθυμίες. Τα νοήματα τα οποία παράγονται από αυτήν την διαδικασία δεν είχαν προκαθοριστεί από τον ερευνητή με στόχο να γίνει σύνδεση με ειδικούς στόχους του αναλυτικού προγράμματος. Αντιθέτως, στόχος ήταν αυτά τα νοήματα να προκύψουν και να σχηματιστούν από τους ίδιους τους μαθητές μέσα από τις δραστηριότητες και την αλληλεπίδραση με το μικρόκοσμο και τις διαθέσιμες λειτουργικότητες του λογισμικού καθώς επίσης και από τη συνεργασία μεταξύ των μαθητών.

Το Υπολογιστικό περιβάλλον

Το υπολογιστικό περιβάλλον που χρησιμοποιήθηκε στην έρευνα είναι ο Χελωνόκοσμος ο οποίος στηρίζεται στη γλώσσα Logo και στις λειτουργικότητες της γεωμετρίας της χελώνας. Αποτελεί ένα συγκερασμό δυο ειδών λογισμικού: αυτό του εργαλείου συμβολικής έκφρασης μέσα από μια γλώσσα προγραμματισμού (Logo) και αυτό του δυναμικού χειρισμού μαθηματικών αντικειμένων (Κυνηγός, 2006). Δύο βασικά εργαλεία του χελωνόκοσμου (Σχήμα 1) είναι ο απλός και ο δισδιάστατος μεταβολέας.

Ο απλός μεταβολέας παρέχει στο χρήστη τη δυνατότητα δυναμικού χειρισμού των τιμών των μεταβλητών σε ένα αναπαριστώμενο σχήμα. Ενεργοποιείται όταν ο χρήστης κάνει «κλικ» σε οποιαδήποτε σημείο του ίχνους της χελώνας στο αναπαριστώμενο αντικείμενο, αφού προηγουμένως εκτελέσει την επιθυμητή διαδικασία. Εμφανίζεται έτσι ένα παράθυρο το οποίο περιέχει τις μεταβλητές και ένα εύρος στο οποίο κάθε μεταβλητή μπορεί να πάρει τιμές. Ο χρήστης έχει την δυνατότητα κάνοντας χρήση του ολισθητή να μεταβάλει τις τιμές της κάθε μεταβλητής να πειραματίζεται και να παρατηρεί ταυτόχρονα την αλλαγή που υφίσταται το σχήμα κατά την διάρκεια της μεταβολής.

Ο δισδιάστατος μεταβολέας είναι ένα δυσδιάστατο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Χρησιμοποιείται για να καθοριστεί η συμμεταβολή δύο μεταβλητών οι οποίες επιλέγονται από τον χρήστη και περιέχονται σε μια διαδικασία που δομείται τουλάχιστον από δύο μεταβλητές. Ο δυσδιάστατος μεταβολέας ενεργοποιείται μέσω του μονοδιάστατου και ο χρήστης επιλέγει τις δύο παραμέτρους έτσι ώστε η μια να κινηθεί στον άξονα των χ και η άλλη στον άξονα των ψ. Κάνοντας κλικ και σύροντας με πατημένο το κουμπί προκαλείται συμμεταβολή των δυο παραμέτρων αφήνοντας γραμμικό ίχνος στο επίπεδο του μεταβολέα. Ο χρήστης έχει τη δυνατότητα επίσης να επιλέξει ένα τυχαίο σημείο στον δυσδιάστατο μεταβολέα και μετακινώντας το να βλέπει τη συμμεταβολή των δυο μεταβλητών. Επαναλαμβάνοντας το ίδιο και με άλλα σημεία, στο επίπεδο του δυσδιάστατου μεταβολέα σχηματίζεται η γραφική παράσταση των δυο μεταβλητών.



Σχήμα 1. Ο μικρόκοσμος 'ισοδιαμέριση'

Να σημειώσουμε, ότι οι δραστηριότητες που περιγράφουμε μπορούν εναλλακτικά να πραγματοποιηθούν και με τον τρισδιάστατο χελωνόκοσμο (MaLT, http://etl.ppp.uoa.gr), όπου η χρήση του zoom και της κάμερας (λειτουργικότητες που εμπεριέχει το MaLT, για δυναμικό χειρισμό της γωνίας θέασης του χώρου), το καθιστούν ιδιαίτερα αποτελεσματικό ιδιαίτερα στην περίπτωση που αφορά τους δεκαδικούς αριθμούς (όπως για παράδειγμα στο πρώτο επεισόδιο που περιγράφουμε).

Οι Δραστηριότητες

Για τη συγκεκριμένη μελέτη, αναπτύξαμε ένα μικρόκοσμο (Σχήμα 1) με βάση την κατασκευαστική θεώρηση (Kafai & Resnick, 1996) με την ονομασία 'ισοδιαμέριση'. Παρακάτω δίνουμε τον κώδικα και ένα στιγμιότυπο εκτέλεσής του:

για ισοδιαμέριση : χ :ψ
σταθορθ
μ 20 δ 90
επανάλαβε :χ [μ :ψ δ 90 μ 20 π 20 α 90]
τέλος

Ο μικρόκοσμος «ισοδιαμέριση» αποτελεί μια διαδικασία με δυο μεταβλητές χ και ψ. Η υποδιαδικασία με το όνομα 'σταθορθ' είναι ένα σταθερό ορθογώνιο διαστάσεων 20 επί 200 το οποίο είχαν φτιάξει οι μαθητές πριν τους πειραματισμούς τους με τον μισοψημένο μικρόκοσμο. Η μεταβλητή χ δηλώνει τον αριθμό των ορθογωνίων που η χελώνα δημιουργεί μέσα στο σταθερό ορθογώνιο-πλαίσιο, ενώ η μεταβλητή ψ το μήκος καθενός από τα ίσα αυτά ορθογώνια.

Στους μαθητές γνωστοποιήσαμε ότι ο στόχο τους ήταν η διόρθωση του μικρόκοσμου, δηλαδή το πρόγραμμα να περιέχει μόνο μία μεταβλητή και έτσι ώστε η εκτέλεση του να δίνει απευθείας ορθογώνιο χωρισμένο σε ίσα μέρη. Τους αφήσαμε να πειραματιστούν χωρίς να τους αποκαλύψουμε τη σχέση των αντιστρόφως ανάλογων ποσών και έτσι ώστε να τον μεταβάλουν με βάση τις προσωπικές τους απαιτήσεις.

Το πλαίσιο της έρευνας

Η παρούσα έρευνα πραγματοποιήθηκε στο εργαστήριο υπολογιστών ενός σχολείου της Αθήνας με είκοσι μαθητές της πρώτης τάξης Γυμνασίου και κάθε ζευγάρι μαθητών είχε το δικό του υπολογιστή. Οι συγκεκριμένοι μαθητές είχαν ήδη εισαχθεί στην έννοια του κλάσματος στην παραδοσιακή αίθουσα διδασκαλίας και είχαν ήδη εξοικειωθεί με απλές κατασκευές στη γλώσσα Logo. Η έρευνα διήρκησε 6 ώρες με τη συμμετοχή δυο εκπαιδευτικών (ο ερευνητής και ο καθηγητής της τάξης). Οι εκπαιδευτικοί έχοντας τον ρόλο συμμετοχικών παρατηρητών παρωθούσαν τους μαθητές να εκφράσουν τις σκέψεις τους χωρίς όμως να τους καθοδηγούν σε συγκεκριμένες λύσεις.

Μέθοδος

Η παρούσα έρευνα είναι μια έρευνα σχεδιασμού (Cobb et al., 2003) που στην ουσία πρόκειται για εμπειρική μελέτη ανθρώπινων δραστηριοτήτων στο χώρο εργασίας τους. Στη δική μας περίπτωση αφορά τη μελέτη ανθρωπίνων δραστηριοτήτων στο πλαίσιο της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Ο ερευνητής εμπλέκεται σε μια ολιστική μελέτη των δραστηριοτήτων των μαθητών αλλά και των εκπαιδευτικών και είναι ανοικτός ως προς τι θα συμβεί και ποιές ερμηνείες ενδέχεται να υπάρχουν. Τα ίδια τα δεδομένα γενούν τη γνώση και δεν χρησιμοποιούνται για την επιβεβαίωση των θεωρητικών υποθέσεων (Κυνηγός, 2006).

Ο στόχος της έρευνας και η ανάλυση των δεδομένων

Ο κύριος στόχος μας ήταν η διερεύνηση των νοημάτων που παράγονται από μαθητές 12-13 ετών κατά τη διαδικασία ισοδιαμέρισης ενός ορθογωνίου χρησιμοποιώντας τα εργαλεία μεταβολής του χελωνόκοσμου, καθώς και ο ρόλος των εργαλείων στη δημιουργία αυτών των νοημάτων.

Για την συλλογή και την καταγραφή των δεδομένων χρησιμοποιήθηκαν τα φύλλα εργασίας των μαθητών, οι σημειώσεις των εκπαιδευτικών και ένα λογισμικό ήχου και εικόνας (HyperCam 2) το οποίο παρείχε στον ερευνητή τη δυνατότητα να παρατηρεί τις αυθόρμητες συζητήσεις των μαθητών και τις αλληλεπιδράσεις τους με τον υπολογιστή. Το HyperCam, μας δίνει τη δυνατότητα να καταγράφουμε τις ενέργειες στην οθόνη του υπολογιστή (π.χ. 10 καρέ /δευτ.) αλλά και τις συνομιλίες, και να τις αποθηκεύουμε ως αρχείο AVI.

Για την ανάλυση της μαθηματικής σκέψης των μαθητών ενδιαφερθήκαμε για τους τρόπους με τους οποίους οι μαθητές αλληλεπιδρούσαν με τις διαθέσιμες αναπαραστάσεις του λογισμικού και τους τρόπους με τους οποίους κατασκεύαζαν και δομούσαν τα μαθηματικά νοήματα. Σε αυτό το σημείο μας φάνηκε χρήσιμο το δόμημα των εγκαθιδρυμένων αφαιρέσεων (situated abstractions) (Noss & Hoyles, 1996). Δηλαδή, να περιγράψουμε το πώς οι μαθητές κατασκευάζουν μαθηματικές ιδέες στηριζόμενοι στις λειτουργικότητες του συγκεκριμένου λογισμικού που χρησιμοποιούν και στις μεταξύ τους συζητήσεις. Ένα σημείο στο οποίο επίσης εστιάσαμε, ήταν το πώς οι μαθητές προσπαθούσαν να αλλάξουν τις λειτουργικότητες του ελαττωματικού μικρόκοσμου που τους δόθηκε, με στόχο να φτιάξουν έναν άλλο, αυτό δηλαδή που θα δίνει αυτόματα ένα ορθογώνιο χωρισμένο σε ίσα μέρη (instrumentalization) (Guin & Trouche, 1999).

Αποτελέσματα

Ο 'κιβωτισμός διαστημάτων' ως διαδικασία προσέγγισης των δεκαδικών περιοδικών αριθμών

Μια ομάδα δυο μαθητών (πρώτη ομάδα εστίασης) πειραματίζονταν με πρώτο στόχο να ανακαλύψουν τον ρόλο των μεταβλητών χ, ψ και κατόπιν την σχέση τους η οποία θα τους βοηθούσε στη διόρθωση του προγράμματος. Οι συγκεκριμένοι μαθητές αρχικά εργάστηκαν με τον απλό μεταβολέα αφού στην αρχή εκτέλεσαν τον κώδικα για τις τιμές χ=3 και ψ=17. Είχαν ολισθήσει την παράμετρο χ προς τις μεγαλύτερες τιμές και έκαναν την υπόθεση ότι: καθώς αυξάνουν οι τιμές του χ για να χωρίζεται το ορθογώνιο σε ίσα μέρη έπρεπε να αυξήσουν και την τιμή του ψ. Έτσι, υπέθεσαν, ότι τα ποσά είναι ανάλογα. Αν και στην γενική περίπτωση ο παραπάνω συλλογισμός τους είναι λανθασμένος, οι μαθητές βάζοντας στον ολισθητή του χ την τιμή 5 βρήκαν, σύροντας την ακίδα στον ολισθητή του ψ, ότι σε αυτήν την περίπτωση για να χωρίζεται το ορθογώνιο σε ίσα μέρη πρέπει το ψ να είναι 40. Στο τετράδιό τους γράφουν: ψ/χ=40/5=8 και άρα ψ=8χ. Στη συνέχεια τροποποίησαν τον κώδικα στον Logo Editor και αντικατέστησαν την τιμή του ψ με το 8*:χ (το σύμβολο * στη γλώσσα Logo σημαίνει πολλαπλασιασμό) χωρίς να πειράξουν την μεταβλητή χ. Εκτέλεσαν το πρόγραμμα και παρατήρησαν ότι μόνο για το συγκεκριμένο ζεύγος τιμών το ορθογώνιο χωρίζονταν αυτόματα για όλες τις τιμές του χ σε ίσα μέρη. Προσπαθώντας να βρουν το λάθος τους, δημιούργησαν ένα πίνακα με τις παρακάτω τιμές: (2,100), (3,67), (4,50), (5,40), τις οποίες βρήκαν χρησιμοποιώντας ξανά τον απλό μεταβολέα. Δεν παρατήρησαν όμως ότι στην περίπτωση του δεύτερου ζευγαριού το σχήμα δεν χωριζόταν ακριβώς σε ίσα μέρη. Στην ερώτηση του ερευνητή αν με βάση τις τιμές που βρήκαν ίσχυε η υπόθεση τους ότι τα ποσά είναι ανάλογα, ένας μαθητής απάντησε:

> *Μ1: είναι αντίστροφα αφού οι τιμές του χ αυξάνουν και του ψ μειώνονται.*

Στην προσπάθειά τους να βρουν τη σχέση των χ και ψ για να διορθώσουν τον κώδικα, υπολόγισαν στο τετράδιό τους το γινόμενο των αντιστοίχων τιμών και παρατήρησαν ότι το γινόμενο του ζεύγους (3,67) δεν είναι το ίδιο με τα άλλα (δηλαδή 200). Συζητώντας μεταξύ τους, ο Μ2 συμφώνησε με τα λεγόμενα του Μ1 και φάνηκε να είναι σίγουροι για τη σχέση της αντίστροφης αναλογίας. Ρίχνουν έτσι την ιδέα να δοκιμάσουν τις υποθέσεις τους αλλά τώρα χρησιμοποιώντας τον δυσδιάστατο μεταβολέα (εισάγουν ένα σημείο στον δυσδιάστατο μεταβολέα και το σύρουν έτσι ώστε οι συντεταγμένες του να χωρίζουν το ορθογώνιο σε ίσα μέρη, Εικόνα 1), (Μ1, Μ2: μαθητές, Ε: ερευνητής)

> *Μ1: Είναι υπερβολή για όλα τα ζεύγη. Έτσι αντίστροφα ποσά.*
> *Ε: Και ποια είναι η σχέση που ικανοποιούν;*
> *Μ2: Το ίδιο γινόμενο*
> *Ε: Ισχύει αυτό για όλα τα ζεύγη τιμών του πίνακα;*
> *Μ2:όχι.Μάλλον όταν χ=3 το ψ δεν πρέπει να είναι 67.*
> *Ε: Και πόσο είναι το ψ;*

Στην ερώτηση του ερευνητή, ο Μ1 κάνει στο τετράδιό του τη διαίρεση του 200 με το 3 και βρίσκει ότι το πηλίκο είναι 66 (αγνοώντας το υπόλοιπο), αλλά τονίζει ότι πάλι το γινόμενο δεν είναι 200. Ο ερευνητής τους προτρέπει να στραφούν στις λειτουργικότητες του περιβάλλοντος και οι μαθητές χρησιμοποιώντας ξανά τον απλό μεταβολέα και παρατηρώντας τον τρόπο που μεταβάλλεται το σχήμα στη σκηνή, βλέπουν ότι πράγματι όταν x = 3 και ψ=66 ή ψ=67 το σταθερό ορθογώνιο-πλαίσιο δεν χωρίζεται ακριβώς σε ίσα μέρη.

> *Μ1: Το ψ δεν είναι 67 αλλά ούτε 66. Αλλά η χελώνα δεν μπορεί*
> *να πάει στο 66,5 για να το δοκιμάσω. Προχωράει ανά ένα.*

Ο ερευνητής τους θυμίζει τη λειτουργικότητα του απλού μεταβολέα που τους δίνει τη δυνατότητα να αλλάζουν το βήμα της χελώνας. Οι μαθητές πειραματίζονται βάζοντας ως βήμα της χελώνας το ένα δέκατο και ορίζουν ως άκρα στον ολισθητή τις τιμές 66 και 67 για μεγαλύτερη ευχέρεια στο σύρσιμο του μεταβολέα.

Μ2: Σε κάθε περίπτωση, το αποτέλεσμα θα είναι μεταξύ 66.6 και 66.7

Κατόπιν άλλαξαν την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή στο μεταβολέα του ψ σε 66.6 και 66.7 αντίστοιχα και έβαλλαν ως βήμα χελώνας το 0.01. Επειδή όμως η εικονική ανατροφοδότηση που ελάμβαναν δεν τους διευκόλυνε, χρησιμοποίησαν και άλλες τεχνικές για να βρούνε το κατάλληλο διάστημα. Για παράδειγμα άλλαζαν το χρώμα του ίχνους της χελώνας για να είναι ευδιάκριτα τα ορθογώνια στα οποία χωρίζονταν το ορθογώνιο-πλαίσιο και επίσης υπολόγιζαν το γινόμενο χ*ψ. Οι δυσκολίες που αφορούσαν τη οπτική ανατροφοδότηση, ανάγκασε τους μαθητές να εφαρμόσουν την παραπάνω στρατηγική στο τετράδιό τους αφού, όπως έλεγαν, *«τώρα καταλάβαμε τον τρόπο και δεν μας χρειάζεται το λογισμικό»*. Όπως και παραπάνω, υποθέσανε ότι ο αριθμός που ψάχνουν θα είναι μεταξύ 66.66 και 66.67

Μ1: (προς τον ερευνητή) Τι συμβαίνει εδώ τώρα; Συνεχώς πλησιάζουμε!
Μ2:Δεν θα τελειώσουμε ποτέ.
Μετά από λίγο, συνεχίζοντας τους πειραματισμούς με τον ίδιο τρόπο:
Μ1:Είναι όλα εξάρια!

Η μαθηματική έννοια με την οποία εργάστηκαν οι μαθητές κατά τη διάρκεια αυτού του «θεωρήματος εν δράσει» (Vergnaud, 1988) είναι αυτή του ‘κιβωτισμού διαστημάτων’. Και αυτό επειδή κάθε ένα από αυτά τα διαστήματα περιέχει όλα τα επόμενα και τα μήκη τους σχηματίζουν μηδενική ακολουθία, ενώ το όριο των διαστημάτων είναι ο περιοδικός δεκαδικός αριθμός 66.666… . Η έννοια του «θεωρήματος εν δράσει» αναφέρεται στις ενέργειες των μαθητών και παρέχουν ενδείξεις της υπονοούμενης γνώσης μιας τυπικής ιδιότητας των μαθηματικών. Οι μαθητές με τους παραπάνω πειραματισμούς αναγνώρισαν ότι πρόκειται για μια άπειρη διαδικασία (…Δεν θα τελειώσουμε ποτέ), αλλά φαίνεται επίσης να διαισθάνονται ότι αυτή η διαδικασία οδηγεί σε έναν συγκεκριμένο αριθμό (…Είναι όλα εξάρια), που από αυστηρά μαθηματικής άποψης είναι το ακριβές όριο ως αποτέλεσμα αυτής της οριακής διαδικασίας.

Αν και η συγκεκριμένη ομάδα μαθητών έφερε εις πέρας την διαδικασία χωρισμού του ορθογωνίου σε 3 ίσα μέρη (και μάλιστα με εντυπωσιακό τρόπο), δεν συνέβηκε το ίδιο με τους περισσότερους μαθητές, μιας και ο χωρισμός του ορθογωνίου γενικά σε περιττό πλήθος (3 και 7 μέρη) τους δημιούργησε προβλήματα (αφού το μήκος του μεγάλου ορθογωνίου πλαισίου ήταν άρτιος, το 200). Τα σημαντικότερα οφείλονταν κυρίως στην εμφάνιση περιοδικών αριθμών αλλά και στην κακή οπτική ανατροφοδότηση που λαμβάνανε από το λογισμικό για τις συγκεκριμένες τιμές.

Σε πολλές περιπτώσεις όμως, όπως στην ομάδα που θα αναφερθούμε παρακάτω, αυτές οι δυσκολίες έδωσαν την ευκαιρία στους μαθητές να προσπαθήσουν να επιλύσουν το πρόβλημα με άλλες τεχνικές και να ασχοληθούν με σημαντικές έννοιες όπως για παράδειγμα η έννοια ης συμμεταβολής.

Η διαδικασία ισοδιαμέρισης ως ‘όχημα’ ανάπτυξης της έννοιας της συμμεταβολής

Μια άλλη ομάδα μαθητών (δεύτερη ομάδα εστίασης), στην προσπάθεια της να ανακαλύψει τη σχέση μεταξύ των δυο μεταβλητών χ και ψ ώστε το ορθογώνιο να χωρίζετε σε ίσα μέρη, στην αρχή πειραματίστηκε με τον ίδιο τρόπο όπως και η πρώτη ομάδα. Δηλαδή με τη βοήθεια του απλού μεταβολέα προσπάθησαν να χωρίσουν το ορθογώνιο σε ίσα μέρη. Με τη βοήθεια των μεταβολέων, το πρώτο σωστό ζεύγος αριθμών αναφερόταν στις τιμές χ=4 και ψ=50. Η επόμενη κίνηση τους ήταν να χωρίσουν το ορθογώνιο σε τρία ίσα μέρη θέτοντας στο μεταβολέα του χ την τιμή 3. Η δυσκολία που συνάντησαν όμως [αφού οπτικά δεν είχαν το επιθυμητό αποτέλεσμα] τους ανάγκασε να αλλάξουν στρατηγική. Στράφηκαν στο φύλλο εργασίας και εκτέλεσαν τη διαίρεση του 200 με το 3 με στόχο να βρούνε το μήκος του καθενός από τα ίσα ορθογώνια. Ακολούθησε ο παρακάτω διάλογος:

Μ1: αυτή η διαδικασία δεν θα τελειώσει ποτέ [εννοεί τη διαίρεση του 200/3] !
Ε: και αυτό τι σημαίνει; Πως τελικά θα το χωρίσουμε σε τρία ίσα μέρη;
Μ2: αφού η διαδικασία δεν τελειώνει, σημαίνει ότι δεν χωρίζετε

Εδώ να σημειώσουμε ότι τη χρονική στιγμή που πραγματοποιήθηκε η έρευνα, οι μαθητές δεν είχαν εισαχτεί ακόμη στη έννοια των δεκαδικών περιοδικών αριθμών.
Η παρανόηση των συγκεκριμένων μαθητών σχετίζετε με αυτό που αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως αδυναμία των μαθητών να αποδεχτούν ότι μια άπειρη διαδικασία μπορεί να έχει ένα αποτέλεσμα (Vinner, 1991).

Σε προβλήματα όπως αυτό που μελετάμε και στα οποία εμπλέκονται έννοιες όπως συναρτήσεις και οριακές διαδικασίες, έχει αποδειχτεί ότι σημαντικό ρόλο παίζει η έννοια της συμμεταβολής (Carlson et al., 2002). Θέλοντας ο ερευνητής να ενισχύσει τις ικανότητες των μαθητών να σκέφτονται με βάση την έννοια της συμμεταβολής, τους προέτρεψε να προσπαθήσουν να εκμεταλλευτούν τον δισδιάστατο μεταβολέα, ενώ κατά τη διαδικασία των πειραματισμών, τους έθετε ερωτήσεις όπως οι παρακάτω:

Ποιες ποσότητες μεταβάλλονται; Ποια μεταβλητή επηρεάζει το χωρισμό σε ίσα μέρη; Πως οι μεταβλητές αυτές συνδέονται; Αν αυξήσουμε ή μειώσουμε τις τιμές του χ, πως επηρεάζονται οι τιμές του ψ; Ποια είναι η γραφική παράσταση των μεταβλητών χ και ψ; Αν οι τιμές του χ αυξάνονται ανά ένα, μπορείτε να περιγράψετε τη μεταβολή του ψ;

Παρακάτω αναφερόμαστε συνοπτικά στην εργασία αυτής της ομάδας μαθητών. Σε πρώτη φάση οι μαθητές αντιστοιχούν τους άξονες συντεταγμένων με τις τιμές χ και ψ του κώδικα που δείχνουν το πλήθος και το μήκος του καθενός από τα ορθογώνια αντίστοιχα. Θεωρώντας ένα τυχαίο σημείο πάνω στο σύστημα συντεταγμένων του δυσδιάστατου μεταβολέα το σύρουν με στόχο να πετύχουν το στόχο τους: Δηλαδή το ορθογώνιο να χωρίζεται σε ίσα μέρη. Μετακινούν το σημείο προς τα αριστερά του άξονα των χ (άρα μειώνεται ο αριθμός των ίσων ορθογωνίων) και προς τα πάνω, (που σημαίνει ότι αυξάνεται το μήκος του κάθε ορθογωνίου). Η διαδικασία συρσίματος δείχνει ότι το σύρσιμο δεν είναι τυχαίο και μάλιστα προς όλες τις κατευθύνσεις για να πετύχουν τη ισοδιαμέριση, αλλά με συγκεκριμένο στόχο: αριστερά και προς τα πάνω. Συγχρόνως όμως διατυπώνουν την άποψη ότι καθώς το χ θα μειώνεται, το ψ πρέπει να αυξάνεται. Δεν δυσκολεύονται να το επαναλάβουν και για μερικά ακόμη σημεία. Για τα επόμενα σημεία όμως δεν τους ενδιέφερε πλέον να παρατηρούν και το ορθογώνιο (για το αν χωρίζετε ή όχι σε ίσα μέρη), απλά τοποθετούσαν το σημείο έτσι ώστε να ολοκληρώνεται το σχήμα της υπερβολής.

Το χαρακτηριστικό σε αυτού του είδους των πειραματισμών που κάνουν οι μαθητές, είναι το γεγονός ότι δεν τους ενδιέφερε να πετύχουν ένα συγκεκριμένο χωρισμό του ορθογωνίου, όπως για παράδειγμα να το χωρίσουν σε τρία ίσα μέρη. Απλά μετακινούσαν το σημείο σε τέτοια θέση ώστε να πετύχουν να χωρίζετε σε ίσα μέρη χωρίς κάποια αναφορά στις τιμές. Το χαρακτηριστικό του συρσίματος ενός σημείου στο σύστημα αξόνων του δυσδιάστατου μεταβολέα, με την ταυτόχρονη δυναμική του σύνδεση με τη σκηνή, τους βοήθησε να ξεπεράσουν, σε πρώτη φάση τουλάχιστον, το εμπόδιο του χωρισμού σε τρία ίσα μέρη και απλά να καταλήξουν στη σχέση των αντιστρόφως ανάλογων ποσών που τους ενδιέφερε.

Στο Σχήμα 2 φαίνεται ο δισδιάστατος μεταβολέας και ένα χαρακτηριστικό απόσπασμα του διαλόγου:

Ε: Τι σχήμα φαίνεται να σχηματίζουν αυτά τα σημεία;
Μ2: Υπερβολή!
Ε: και ποια σχέση ισχύει;
Μ1: το γινόμενο κάνει 200
Μ2: τελικά ο δυσδιάστατος μεταβολέας είναι καλύτερος γιατί μπορούμε να τα ρυθμίζουμε μαζί [εννοεί το χ και το ψ]

Σχήμα 2. Η δημιουργία της υπερβολής στον δισδιάστατο μεταβολέα

Ο δεκαδικός περιοδικός αριθμός ως κλάσμα και η διόρθωση του μικρόκοσμου

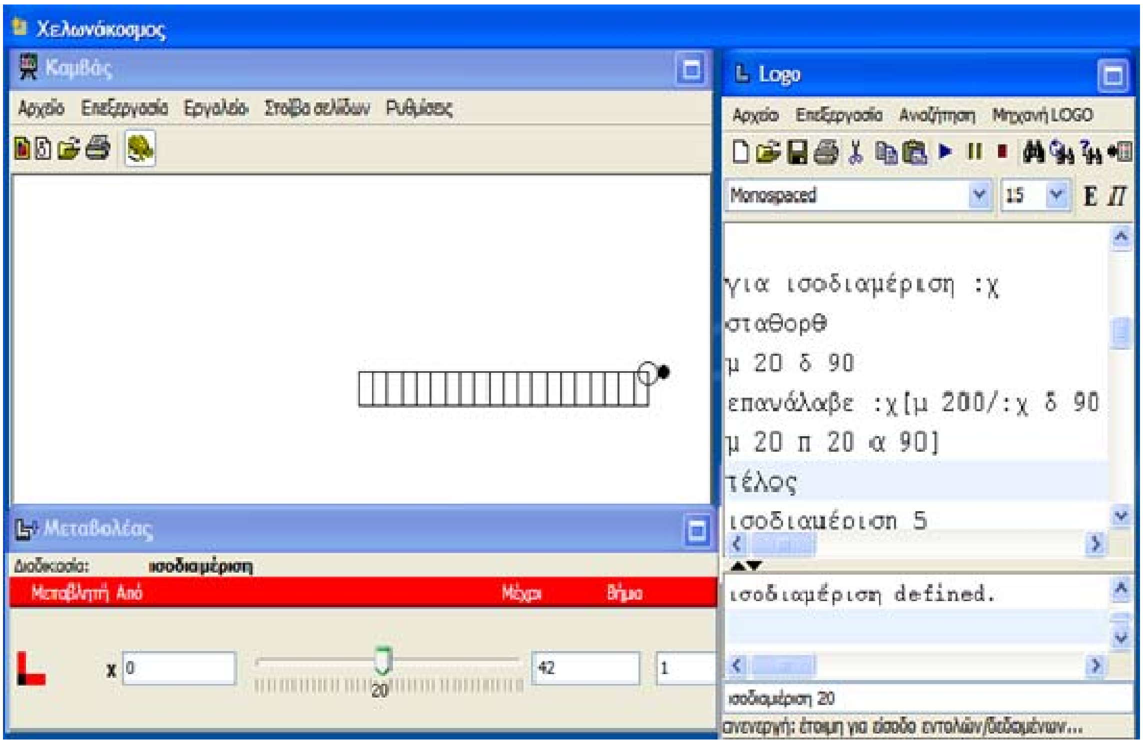
Το επόμενο επεισόδιο περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο η πρώτη ομάδα μαθητών καταλήγει: α) στο συμπέρασμα ότι ένας δεκαδικός περιοδικός αριθμός ισούται με ένα κλάσμα και β) στη διόρθωση του μισοψημένου μικρόκοσμου. Η συναρτησιακή έκφραση της σχέσης μιας μεταβλητής με βάση μια άλλη μεταβλητή υπήρξε για πολλούς μαθητές μια δύσκολη μορφή συσχέτισης. Αυτό φάνηκε ιδιαίτερα σε περιπτώσεις που προσπαθούσαν να επιβεβαιώσουν τη σχέση για όλες τις τιμές των μεταβλητών αφού τα εμπλεκόμενα αριθμητικά μεγέθη δεν έδιναν πάντα ακέραια πηλίκα αλλά και δεκαδικούς περιοδικούς αριθμούς.

Στην ερώτηση του ερευνητή πόσο είναι το ψ για χ =3, ο Μ2 φαίνεται να είναι διστακτικός με τα λεγόμενα του Μ1, δηλ. 'όλα εξάρια' [εννοώντας 66,666…] και γράφει στο τετράδιο: 3*66.66666 (πολλά εξάρια) =200 άρα 66.66666 (πολλά εξάρια) =200/3. Κατόπιν κάνει την διαίρεση του 200 με το 3 και 'επιβεβαιώνει' ότι «και η διαίρεση βγάζει το ίδιο αποτέλεσμα με πολλά εξάρια».

Στην παραπάνω περίπτωση ο Μ2 δεν ικανοποιείται από το γεγονός ότι 66.66666…=200/3 και συνεχίζει το συλλογισμό του κάνοντας και τη διαίρεση του 200 με το 3 . Φαίνεται ότι τη συμμετρικότητα της ισότητας α=β στη συγκεκριμένη περίπτωση να μη τη θεωρεί έγκυρη. Στην ερώτηση του ερευνητή γιατί κάνει και τη διαίρεση αφού βρήκε ότι 66.6666…=200/3, ο μαθητής απαντάει:

> *Μ2: Δεν είναι σίγουρο ότι θα ισχύει και το ανάποδο [εννοεί το αντίστροφο]*
> *Στη συνέχεια αποφάσισαν να διορθώσουν τον πίνακα τιμών που είχαν φτιάξει αντικαθιστώντας το ζεύγος (3,67) με το ζεύγος (3,200/3):*
> *Μ2: «έτσι τώρα όλα τα γινόμενα είναι 200».*
> *Στην ερώτηση του ερευνητή για το πως θα επιτευχθεί η διόρθωση του μικρόκοσμου, ο ένας μαθητής λέει:*
> *Μ1: Είπαμε ότι έχουν το ίδιο γινόμενο, άρα θα είναι χ*ψ=200, και να την λύσουμε ως προς το ψ .*

Κατόπιν τροποποίησαν τον κώδικα στον Logo Editor αντικαθιστώντας την τιμή του ψ με το 200/χ, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3. Ο διορθωμένος μικρόκοσμος 'ισοδιαμέριση'

Συμπεράσματα

Τα αποτελέσματα που παραθέσαμε αναφέρονται μόνο σε ένα μικρό πλήθος μαθητών και κατά συνέπεια δεν επιδέχονται γενίκευση. Επιβεβαιώνουν όμως και άλλα ερευνητικά αποτελέσματα σύμφωνα με τα οποία σε μαθησιακές δραστηριότητες για τη δημιουργία μαθηματικών νοημάτων, οι μαθητές ασχολούνται με ένα πλήθος εννοιών οι οποίες δεν μπορούν να καθοριστούν από την αρχή (Κυνηγός, 2006). Στην παρούσα έρευνα η έννοια της ισοδιαμέρισης φάνηκε να αποτελεί τον πυρήνα γύρω από τον οποίο οι μαθητές δημιούργησαν έναν αριθμό νοημάτων χρησιμοποιώντας τα συμβολικά, γραφικά και τα εργαλεία μεταβολής του χελωνόκοσμου. Σημαντικές μαθηματικές έννοιες που συνδέονται με την έννοια της ισοδιαμέρισης, όπως η έννοια της αντίστροφης αναλογίας, των άπειρων διαδικασιών, των δεκαδικών περιοδικών αριθμών, των οριακών διαδικασιών και της συμμεταβολής, συνήθως δε συμπεριλαμβάνονται στη μαθηματική δραστηριότητα γύρω από την συγκεκριμένη έννοια. Στην παρούσα έρευνα ωστόσο οι μαθητές δημιούργησαν νοήματα για τις παραπάνω έννοιες που μπορεί να φαίνονται ότι δεν έχουν σχέση με την ισοδιαμέριση αλλά το περιβάλλον που χρησιμοποιήθηκε και ο μισοψημένος μικρόκοσμος που σχεδιάστηκε τις κατέστησαν σχετικές.

Η παρούσα έρευνα αναδεικνύει αυτό που έχει τονιστεί και σε άλλες έρευνες (π.χ Kynigos and Gavrilis, 2006), για τον ουσιώδη ρόλο του δυσδιάστατου μεταβολέα στην ανάπτυξη της έννοιας της συμμεταβολής. Στη έρευνα που παρουσιάζουμε, η δεύτερη ομάδα φάνηκε να αδυνατεί να δεχτεί ότι ένα ορθογώνιο μήκους 200 μπορεί να χωριστεί σε τρία ίσα μέρη, μιας και η διαίρεση τους έδινε δεκαδικό περιοδικό αριθμό (που τη στιγμή της έρευνας η εν λόγω έννοια τους ήταν άγνωστη). Οι ερωτήσεις του ερευνητή στην κατεύθυνση της ενίσχυσης της ικανότητας τους να σκέφτονται με βάση την έννοια της συμμεταβολής, φάνηκε να φέρουν αποτέλεσμα και τελικά οι μαθητές, χρησιμοποιώντας τις λειτουργικότητες του Χελωνόκοσμου και συγκεκριμένα του δυσδιάστατου μεταβολέα, να φτάσουν σε σημαντικά συμπεράσματα όπως αυτό της εύρεσης της σχέσης των αντιστρόφως αναλόγων ποσών.

Αυτό το άρθρο παρουσιάζει επίσης και έναν τρόπο διαφορετικό από αυτούς που χρησιμοποιούνται για τη διδασκαλία των δεκαδικών περιοδικών αριθμών. Οι μαθητές πειραματιζόμενοι και με τη βοήθεια των εργαλείων μεταβολής του χελωνόκοσμου, προσέγγισαν τον δεκαδικό περιοδικό αριθμό 66.666…μέσα από την οριακή διαδικασία του κιβωτισμού των διαστημάτων, και μάλιστα σε ένα πλαίσιο πολύ οικείο για αυτούς: Αυτό της ισοδιαμέρισης ενός ορθογωνίου. Οι μαθητές της πρώτης ομάδας, όχι μόνο φάνηκε να κατανοούν την διαδικασία προσέγγισης των δεκαδικών περιοδικών αριθμών, αλλά ήρθαν αντιμέτωποι με βασικές έννοιες ανώτερων μαθηματικών, όπως αυτές των άπειρων οριακών διαδικασιών και του κιβωτισμού των διαστημάτων. Το παραπάνω γεγονός μας παρέχει και ένα τρόπο με τον οποίο μικροί μαθητές πριν ακόμη εισαχθούν σε έννοιες με οριακές διαδικασίες και πριν ακόμη διδαχτούν αφηρημένες έννοιες, όπως αυτή της προσέγγισης των δεκαδικών περιοδικών αριθμών μέσω του κιβωτισμού των διαστημάτων, να είναι σε θέση να δημιουργούν νοήματα για αυτές.

Ίσως τώρα με τη διαθεσιμότητα των ψηφιακών μέσων να είμαστε σε θέση να επανεξετάσουμε τον τρόπο που η έννοια της ισοδιαμέρισης τίθεται στο αναλυτικό πρόγραμμα και να αναμορφώσουμε συνολικά τη δομή του. Μας δίνεται επίσης η ευκαιρία, μέσα από τη σχεδίαση μικρόκοσμων όπως αυτός της ισοδιαμέρισης, να θέσουμε ταυτόχρονα έννοιες των μαθηματικών οι οποίες ποτέ δεν συνδέονται στα αναλυτικά προγράμματα και συγχρόνως να αντιμετωπίσουμε και το φαινόμενο της διάσπασης τους.

Αναφορές

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 91-126). New York: Academic Press.

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296-333). NY: Macmillan Publishing.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352–378.

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32(1), 9-13.

Duval, R. (2006). A Cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 61(1-2), 103-131.

Fischbein, E. (1978). Intuition and mathematical education. *Proceedings of the 2nd Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 148-176), Osnabruck.

Harel, I. , & Papert, S. (1991). *Constructionism: Research reports and essays*. Norwood, New Jersey: Ablex Publishing Corporation.

Heid, M.K., & Blume, G. W. (2008). Technology and the teaching and learning of mathematics. In M.K. Heid & G. W .Blume (eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics:* (Vol. 1, pp.419-431). Research Syntheses Charlotte, NG: Information Age.

Hoyles, C., & Noss, R. (1989). The computer as a catalyst in children's proportion strategies. *Journal of Mathematical Behavior,* 8, 53-75.

Guin, D., & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators. *The International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 3(3), 195–227.

Kafai, Y., & Resnick, M. (eds.) (1996). *Constructionism in practice: Designing, thinking and learning in a digital world.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Publishers.

Kynigos, C. (2007). Half-baked logo microworlds as boundary objects in integrated design. *Informatics in Education,* 6(2), 1–24, Vilnius: Institute of Mathematics and Informatics.

Kynigos, C., & Gavrilis, S. (2006). Constructing a sinusoidal periodic covariation. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka & N. Stehlikova (eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Education.* (Vol. 4, pp. 9-16). Prague, Czech Republic: Charles University, Faculty of Education.

Kynigos, C., & Psycharis, G. (2003). 13 year-olds' meanings around intrinsic curves with a medium for symbolic expression and dynamic manipulation. *Proceedings of 27th PME Conference,* (Vol. 3, pp. 165-172). Honolulu, Hawaii.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strasser, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In A. Gutiérrez & P. Boero (eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 275–304). The Netherlands: Sense Publishers.

Lamon, S. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Towards a theoretical framework for research. In F. Lester (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629–667). Reston, VA: NCTM.

Lachance, A., & Confrey, J. (2002). Helping students build a path of understanding from ratio and proportion to decimal notation. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 503–526.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Noss, R., & C. Hoyles (1996). *Windows on Mathematical Meanings*. Kluwer Academic Publishers.

Olive, J., & Lobato, J. (2008). The learning of rational number concepts using technology. In K. Heid & G. Blume (eds.), *Research on technology in the teaching and learning of mathematics* (pp.1-53). NCTM, Information Age Publishing, Inc.

Papert, S. (1980). *Mindstorm: Children, computers and powerful ideas*. Sussex, England: Harvester.

Psycharis, G., & Kynigos, C. (2004). Normalising geometrical constructions: A context for generation of meaning for ratio and proportion. *Proceedings of the 28h PME Conference* (Vol. 4, pp. 65-72). Bergen, Norway.

Psycharis, G., Latsi, M., & Kynigos C. (2007). Meanings for fraction as number-measure by exploring the number line. *Proceedings of the 5th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp.1499-1508). Larnaca, Cyprus.

Tall, D.O., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert & M. Behr (eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141-161). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Hingham, MA: Kluwer Academic Publishers.

Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*. Αθήνα: Εκδόσεις Leader Books.

Κυνηγός, Χ. (2006). *Το μάθημα της διερεύνησης. Παιδαγωγική αξιοποίηση των ψηφιακών τεχνολογιών για τη διδακτική των μαθηματικών. Από την έρευνα στη σχολική τάξη*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Αναφορά στο άρθρο ως: Ζάντζος, Ι., & Κυνηγός, Χ. (2011). Ανάπτυξη νοημάτων κατά τη διαδικασία ισοδιαμέρισης ενός ορθογωνίου με τη χρήση του Χελωνόκοσμου. *Θέματα Επιστημών και Τεχνολογίας στην Εκπαίδευση*, 4(1-3), 77-90.

http://earthlab.uoi.gr/thete/index.php/thete