Θέματα Επιστημών και Τεχνολογίας στην Εκπαίδευση

Τόμ. 2, Αρ. 3 (2009)

Οι αναπαραστάσεις μαθηματικών αντικειμένων ως μέσο οικοδόμησης της μαθηματικής γνώσης: Τα συστήματα δυναμικής γεωμετρίας ως αναπαραστατικά εργαλεία

Σταυρούλα Πατσιομίτου, Αναστάσιος Εμβαλωτής

ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ
Τόμος 2, Τεύχος 3, Σελίδες 247-272
Εκδόσεις Κλειδάριθμος

Οι αναπαραστάσεις μαθηματικών αντικειμένων ως μέσο οικοδόμησης της μαθηματικής γνώσης: Τα συστήματα δυναμικής γεωμετρίας ως αναπαραστατικά εργαλεία

Σταυρούλα Πατσιομίτου και Αναστάσιος Εμβαλωτής
spatsiom@cc.uoi.gr, aemvalot@uoi.gr
Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία μελετάται η έννοια της αναπαράστασης και του ρόλου της στη Διδακτική και την Ψυχολογία των Μαθηματικών. Παρουσιάζεται μια εκτενής επισκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας, επιχειρείται ο προσδιορισμός των όρων 'αναπαράσταση' και 'συστήματα αναπαράστασης', καθώς και των όρων 'εσωτερική' και 'εξωτερική αναπαράσταση' σε μια προσπάθεια ανάδειξης της σημασίας τους στη σχετική επιστημονική συζήτηση. Τέλος συζητείται ο ρόλος των μικρόκοσμων και ειδικότερα των συστημάτων δυναμικής γεωμετρίας ως εξωτερικών αναπαραστατικών συστημάτων-εργαλείων, για τη μελέτη της διδασκαλίας μαθηματικών αντικειμένων.

Εισαγωγή

Ένα κεντρικό ζήτημα στην Διδακτική και την Ψυχολογία των Μαθηματικών είναι ο τρόπος που οι μαθητές μαθαίνουν, δηλαδή ο τρόπος με τον οποίο κατασκευάζουν και μετασχηματίζουν τις μαθηματικές έννοιες (Cobb et al., 1992, p.2). Για τον κοινωνικό κονστρουκτιβισμό (social constructivism, ενδεικτικά Jaworski, 2003) τα μαθηματικά είναι συλλογική ανθρώπινη δραστηριότητα αλλά και μεμονωμένη εποικοδομητική δραστηριότητα. Κατά συνέπεια η μάθηση των μαθηματικών επιτυγχάνεται για τον κάθε (μεμονωμένο) μαθητή μέσω της «*συζήτησης, της διαπραγμάτευσης, της επιχειρηματολογίας*» (Jaworski, 2003, p. 3) στο κοινωνικό περιβάλλον της τάξης συμπεριλαμβανομένης της ατομικής διαπραγμάτευσης των μαθηματικών εννοιών (βλ. ενδεικτικά Jaworski, 2003). Η μάθηση μέσω ανακάλυψης η οποία δεν στοχεύει στην κατανόηση έτοιμων δομών αλλά δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να διερευνήσουν τη γνώση, ήταν μια θεώρηση η οποία προτάθηκε από τον Bruner (1960). Η θεωρητική του πρόταση βασίζεται στην προγενέστερη γνώση και κατανόηση μιας έννοιας, η οποία (μέσω της ανακάλυψης) αναπτύσσεται και εμβαθύνεται. Ο Bruner (1966) ανέπτυξε ένα μοντέλο τριών σταδίων των αναπαραστάσεων που βασίζεται στη μετάβαση από τις ενεργητικές (enactive) ή πραξιακές στις εικονικές (iconic) και ολοκληρώνεται με τις συμβολικές (symbolic) αναπαραστάσεις.

Τα ζητήματα της αναπαράστασης και της οπτικοποίησης των μαθηματικών εννοιών αναφέρονται στην βιβλιογραφία ως θεμελιώδη, με όλο και περισσότερο τους ερευνητές να συμφωνούν για τις θετικές επιπτώσεις τους στην ανάπτυξη της κατανόησης, της επικοινωνίας, της μαθηματικής αιτιολόγησης και της επίλυσης προβλήματος (Presmeg, 1986; Janvier, 1987;Vergnaud, 1987; Vinner, 1989; Eisenberg & Dreyfus, 1990; Dreyfus, 1991; Glasensferd, 1991; Zimmermann & Cunningham, 1991; Dubinsky, 1994; Kaput, 1987, 1991, 1999, 2001; diSessa, 1994; Duval, 1995; Aspinwall, 1995; Ainsworth, 1999, 2006). Το αυξημένο ερευνητικό ενδιαφέρον για τις αναπαραστάσεις προκύπτει ως απόρροια της ανάγκης να αντιμετωπιστούν προβλήματα πρακτικής και θεωρητικής υφής (Kaput, 1987, 1991): αφ' ενός προβλήματα που αφορούν στις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές όταν 'μεταφράζουν' από τη μια αναπαράσταση σε άλλη (για παράδειγμα την μετατροπή της διατύπωσης ενός γεωμετρικού προβλήματος σε σχήμα ή την μετατροπή του αλγεβρικού τύπου μιας συνάρτησης σε γραφική παράσταση) και αφ΄ ετέρου προβλήματα που προκύπτουν στην πορεία οικοδόμησης ενός θεωρητικού μοντέλου για τον τρόπο αξιοποίησης και χρήσης των αναπαραστάσεων.

Τα μαθηματικά (αλλά και οι άλλες επιστήμες), με την πάροδο του χρόνου, έχουν χρησιμοποιήσει διάφορα αναπαραστατικά συστήματα για να εκφράσουν έννοιες και διαδικασίες. Οι αναπαραστάσεις θεωρούνται σημαντικά εργαλεία επικοινωνίας (Kaput, 1991) και κατανόησης των μαθηματικών εννοιών (Zazkis & Liljedhl, 2004):

- ως εργαλεία κατανόησης μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να αναδιοργανώσουν και να μεταφράσουν τις ιδέες με σύμβολα
- ως εργαλεία επικοινωνιακά, αφ' ενός βοηθούν στην επικοινωνία των ιδεών και αφ΄ ετέρου στην επικοινωνία των μαθητών που τις χρησιμοποιούν ενώ παράλληλα αποτελούν ένα κοινωνικό περιβάλλον για την ανάπτυξη μαθηματικών συζητήσεων.

Μέσω των αναπαραστάσεων υπάρχει η δυνατότητα υπέρβασης γνωστικών ή διδακτικών εμπόδιων (Goldin & Shteingold, 2001). Γνωστικά εμπόδια παρουσιάζονται όταν τμήματα γνώσης των μαθητών που είναι γενικά αποτελεσματικά για κάποιο χρονικό διάστημα για την επίλυση ορισμένων προβλημάτων, βρίσκονται αντιμέτωπα στη συνέχεια με νέα προβλήματα και αποδεικνύονται ανεπαρκή και δύσκολα να προσαρμοστούν (Tall, 1994; Brousseau, 1997).

Το Εθνικό Συμβούλιο των Δασκάλων Μαθηματικών της Αμερικής (National Council of Teachers of Mathematics) (NCTM) επισημαίνει το σημαντικό ρόλο των αναπαραστάσεων τόσο στη διδασκαλία όσο και τη μάθηση των εννοιών. Σύμφωνα με το

NCTM (2000) οι μαθητές από τη νηπιακή ηλικία ακόμα, πρέπει να αποκτήσουν την ικανότητα:

- να δημιουργούν και χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις προκειμένου να οργανώσουν, να καταγράψουν και να μοιραστούν μαθηματικές ιδέες,
- να επιλέγουν, να εφαρμόζουν και να μεταφράζουν μαθηματικές αναπαραστάσεις για την επίλυση προβλημάτων,
- να χρησιμοποιούν τις αναπαραστάσεις για να διαμορφώνουν και ερμηνεύουν φυσικά, κοινωνικά και μαθηματικά θέματα. (p.67)

Οι προσεγγίσεις των ερευνητών στο χώρο της διδακτικής ως προς τον εννοιολογικό προσδιορισμό, την ερμηνεία του όρου της αναπαράστασης και τις χρήσεις των 'αναπαραστάσων' εμφανίζουν μια αξιοσημείωτη πολυμορφία. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι στα θεματικά τεύχη για τις «Αναπαραστάσεις και την Ψυχολογία των Μαθηματικών» (Representations and the Psychology of Mathematics Education, Vol. 17, N. 1 and 2) του περιοδικού Journal of Mathematical Behavior, οι ερευνητές προσεγγίζουν τον όρο της αναπαράστασης με διαφορετικούς τρόπους. Για παράδειγμα, η Presmeg (1998), επισημαίνει τη σπουδαιότητα της απεικονιστικής διαδικασίας στη μαθηματική σκέψη και τη σημασία της κατασκευής αναπαραστάσεων από τους μαθητές, ισχυριζόμενη ότι οι μαθητές υποβοηθούνται στην επίλυση ασαφειών εγγενών στις γνωστικές αναπαραστάσεις. Η Even (1998) διερευνά τους παράγοντες που περιλαμβάνονται στις *συνδεόμενες αναπαραστάσεις* συναρτήσεων σε σχέση με τον συλλογισμό των μαθητών. Ο Vergnaud (1998) εξετάζει το ρόλο της δράσης στην αναπαράσταση, καθώς θεωρεί την αναπαράσταση *ως δυναμική οντότητα παρά ως στατική διαδικασία*. Σύμφωνα με τον Vergnaud το σχήμα είναι "*η αμετάβλητη οργάνωση της συμπεριφοράς για μια ορισμένη κατηγορία καταστάσεων*" (p. 167) με τις έννοιες του θεωρήματος-εν-δράσει (theorem-in-action) και της έννοιας-εν-δράσει (concept-in-action) να αποτελούν τις συνιστώσες του. Η Mesquita (1998) συζητά πώς τα εννοιολογικά εμπόδια στη γεωμετρία συνδέονται με τις εξωτερικές αναπαραστάσεις, μελετώντας τις διδακτικές επιπτώσεις της διάκρισης μεταξύ του γεωμετρικού χώρου που είναι ομοιογενής (homogeneous: σε όλα τα σημεία αποδίδεται η ίδια σημασία) και ισοτροπικός (isotropic: όλες οι κατευθύνσεις έχουν την ίδια σημασία), και του αναπαραστατικού χώρου που είναι το πλαίσιο για τις αναπαραστάσεις των μαθητών (ανομοιογενές και μη ισοτροπικό).

Ο χειρισμός από την πλευρά των μαθητών των διαφορετικών αναπαραστάσεων στα μαθηματικά οδηγεί στην κατασκευή και ανάπτυξη των *νοητικών εικόνων* (ή εικόνας της έννοιας) μιας μαθηματικής έννοιας. Ο Goldenberg (1995) αναφέρει σχετικά ότι: «*δεδομένου ότι παρατηρούμε την αλληλεπίδραση των μαθητών με τις αναπαραστάσεις (των εννοιών), παίρνουμε μια αναλαμπή των πλούσιων εσωτερικών μοντέλων (νοητικών μοντέλων) που κατασκευάζουν στην προσπάθειά τους να τις κατανοήσουν*» (σελ. 155).

«Αναπαραστάσεις» και «Συστήματα Αναπαράστασης» των Μαθηματικών Αντικειμένων

Η επεξεργασία των πληροφοριών, η αποθήκευση τους και στη συνέχεια η αναπαραγωγή τους συνδέεται με τον τρόπο που αυτές οι πληροφορίες αναπαρίστανται στο γνωστικό μας σύστημα. Σύμφωνα με τους Goldin & Kaput (1996) οι αναπαραστάσεις ανήκουν σε δομικά συστήματα, προσωπικά ή πολιτισμικά τα οποία ονομάζονται *συστήματα αναπαράστασης*.

Διάφορες ερμηνείες των όρων *αναπαράσταση* και *σύστημα αναπαράστασης* σχετικά με τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών έχουν αποδοθεί από τους ερευνητές. Ενδεικτικά αναφέρονται οι ορισμοί των Palmer (1978), Kaput (1987), Goldin & Janvier (1998), Seeger (1998) με στόχο να διαπιστώσουμε τα κοινά και μη κοινά σημεία αυτών. Μια *αναπαράσταση* σύμφωνα με τον Palmer (1978) περιλαμβάνει πέντε συνιστώσες: «τον αναπαριστώμενο κόσμο (the represented world), τον αναπαριστώντα κόσμο (the representing world), τις πτυχές του αναπαριστώμενου κόσμου που αναπαρίστανται, τις πτυχές του αναπαριστώντα κόσμου που μοντελοποιούνται και τέλος, την αντιστοίχιση των (δύο) κόσμων» (Erbilgin, 2003, p.8). Κατά τον Kaput (1987) *το σύστημα αναπαράστασης* περιλαμβάνει την οντότητα που αναπαρίσταται, την οντότητα που αναπαριστά και τον κανόνα αντιστοίχισης των δυο. Οι Goldin & Janvier (1998, p.1) ερμηνεύουν τους όρους αναπαράσταση και σύστημα αναπαράστασης ως:

- μια εξωτερική, δομημένη φυσική κατάσταση, ή δομημένο σύνολο καταστάσεων στο φυσικό περιβάλλον, το οποίο μπορεί να περιγραφεί από μαθηματική άποψη ή να θεωρηθεί ότι ενσωματώνει μαθηματικές ιδέες.
- ένα γλωσσικό σύστημα, όπου ένα πρόβλημα τίθεται ή τα μαθηματικά συζητούνται, με έμφαση στα συντακτικά και σημασιολογικά δομικά χαρακτηριστικά.
- ένα αυστηρό μαθηματικό κατασκεύασμα, ή ένα σύστημα κατασκευασμάτων, τα οποία μπορούν να αναπαραστήσουν καταστάσεις μέσω των συμβόλων ή μέσω ενός συστήματος συμβόλων, υιοθετώντας συνήθως αξιώματα που προσαρμόζονται σε ακριβείς ορισμούς – συμπεριλαμβανομένων των μαθηματικών κατασκευασμάτων που μπορούν να αναπαραστήσουν πτυχές άλλων μαθηματικών κατασκευασμάτων.
- μια εσωτερική, γνωστική διαμόρφωση, ή ένα σύνθετο σύστημα τέτοιων διαμορφώσεων, που προκύπτει από τη συμπεριφορά ή την ενδοσκόπηση, που περιγράφει πτυχές των διαδικασιών της μαθηματικής σκέψης και επίλυσης προβλήματος.

Ακόμα μπορεί να ερμηνευθεί ως «κάτι ‘στη θέση’ κάποιου άλλου» (something ‘in place of’ something else) και «μια *δομικά ισοδύναμη παρουσίαση* μέσω εικόνων, συμβόλων και σημείων» (Seeger, 1998, p.311 όπ. αναφ. στους Pape & Tchoshanov, 2001, p.120). Στο πεδίο των μαθηματικών, επομένως, ο όρος αναπαράσταση σημαίνει «μια εσωτερική –αφαιρετική διαδικασία των μαθηματικών ιδεών ή των γνωστικών σχημάτων που αναπτύσσονται από τον μαθητή μέσω της εμπειρίας,[…] ένα εξωτερικό κατασκεύασμα χειρισμού των μαθηματικών εννοιών […] το οποίο μας βοηθά να κατανοήσουμε αυτές τις έννοιες, […] ακόμα και η πράξη της εξωτερίκευσης της εσωτερικής νοητικής αφαιρετικής διαδικασίας» (Pape & Tchoshanov, 2001, p.119). Σε γενικές γραμμές, επομένως, συμπεραίνουμε ότι αναπαράσταση είναι μια αντιστοίχιση, ένας μετασχηματισμός στοιχείων ή διαδικασιών του αντικειμένου (ή της οντότητας) που αναπαρίσταται με την οντότητα που προκύπτει ως αναπαράσταση, ως αποτέλεσμα της επεξεργασίας των πληροφοριών, του χειρισμού των εννοιών και των γνωστικών σχημάτων που αναπτύσσονται από το υποκείμενο.

Οι Lesh et al. (1987) εισήγαγαν την διαφορά μεταξύ *διαφανούς* (transparent) και *αδιαφανούς* (opaque) αναπαραστατικού συστήματος. Ένα *διαφανές* αναπαραστατικό σύστημα δεν έχει ούτε περισσότερες ούτε λιγότερες έννοιες από τις αναπαριστώμενες ιδέες ή δομές, ενώ το *αδιαφανές* δίνει έμφαση σε κάποιες πτυχές ιδεών ή δομών και δεν δίνει έμφαση σε άλλες. Για παράδειγμα η αναπαράσταση του αριθμού 1225 ως 35^2 είναι *διαφανής*, καθώς εμφανίζει την ιδιότητα του ως τέλειο τετράγωνο. *Αδιαφανής* είναι η ιδιότητα του 1225 ως αριθμού που διαιρείται με τον αριθμό 175.

Η εξέλιξη των μαθηματικών έχει άμεση σχέση με την ανάπτυξη των διαφορετικών σημειωτικών συστημάτων (Duval, 1999, p.5). Σύμφωνα με τον Duval (1999) «η πρόοδος στα Μαθηματικά συνδέεται με την εξέλιξη (ανάπτυξη) διαφορετικών σημειωτικών συστημάτων (έχοντας ως βάση) τους γνωστικούς τρόπους της πρωτότυπης δυικότητας (primitive duality) των αισθητηρίων συστημάτων: της γλώσσας και της εικόνας» (p.5).

Ο Duval (1999, p.6) χρησιμοποίησε τη μετονομασία «*μητρώο αναπαράστασης*» (register of representation) για να αναφερθεί σε ένα σημειωτικό σύστημα που παρέχει συγκεκριμένα μέσα αναπαράστασης και επεξεργασίας της μαθηματικής σκέψης. Με τη διαδικασία αναπαράστασης ενός αντικείμενου ο Duval εννοεί ένα κατασκεύασμα στατικό ή δυναμικό ή διάφορες εκφράσεις σε φυσική γλώσσα με τις οποίες έχουμε την δυνατότητα να αναπαραστήσουμε το αντικείμενο. Μπορούμε να διακρίνουμε δυο είδη μετασχηματισμών των σημειωτικών αναπαραστάσεων (Duval, 2006, pp. 111-112):

- την *επεξεργασία (treatment)* δηλαδή τη διαδικασία μετασχηματισμού της αναπαράστασης σε μια άλλη στο ίδιο μητρώο, διατηρώντας δηλαδή το ίδιο σημειωτικό σύστημα: για παράδειγμα οι μετασχηματισμοί στη διαδικασία επίλυσης μιας εξίσωσης ή ο μετασχηματισμός ενός ορισμού σχήματος (π.χ. «ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο» μπορεί να μετασχηματιστεί λεκτικά σε «παραλληλόγραμμο του οποίου οι διαγώνιες είναι ίσες»)
- τη *μετατροπή (conversion)* δηλαδή τη διαδικασία μετακίνησης *από το ένα μητρώο προς ένα άλλο μητρώο, αλλάζοντας δηλαδή το σημειωτικό σύστημα* χωρίς να αλλάξουμε τα αντικείμενα που αναφερόμαστε: για παράδειγμα η μετατροπή

μιας διατύπωσης προβλήματος σε σχέδιο, η μετατροπή του τύπου $(α+β)^2$ σε άθροισμα εμβαδών ορθογωνίων και τετραγώνων.

Είναι προφανές ότι για την επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων οι μαθητές προσφεύγουν στα διάφορα και διαφορετικά μητρώα, όχι μόνο για γνωστικούς λόγους αλλά κυρίως προκειμένου να αξιοποιήσουν τους μετασχηματισμούς των αναπαραστάσεων, δηλαδή την επεξεργασία ή την μετατροπή τους (Duval, 1999). Τα (σημειωτικά) μητρώα που ενεργοποιούνται και αξιοποιούνται στις μαθηματικές δραστηριότητες είναι το αλγεβρικό, το γραφι(στι)κό, το εικονικό και η φυσική γλώσσα. Επομένως, η δραστηριότητα της επίλυσης των προβλημάτων, που είναι η ουσία των μαθηματικών, είναι βασισμένη στην αλληλεπίδραση μεταξύ των διάφορων μητρώων, των διεργασιών στο εσωτερικό του κάθε μητρώου και (τέλος) στο μετασχηματισμό των μητρώων.

Για να γίνουν κατανοητά τόσο τα αφηρημένα όσο και τα υλικά αντικείμενα των δραστηριοτήτων που αφορούν στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών εννοιών, εκπαιδευτικοί και ερευνητές έχουν στρέψει την προσοχή τους στα συστήματα των αναπαραστάσεων (Kaput, 1987; Janvier, 1987).

Εξωτερικές και Εσωτερικές αναπαραστάσεις

Για τα μαθηματικά αντικείμενα έχουν διατυπωθεί διάφορες και διαφορετικές θεωρήσεις: για τον Πλάτωνα τα μαθηματικά αντικείμενα και οι σχέσεις μεταξύ τους αναφέρονταν στον κόσμο των ‘ιδεών’ και επομένως η γνώση του υποκειμένου για τα μαθηματικά αντικείμενα δεν βασίζεται σε δεδομένα των αισθήσεων του, άποψη που αργότερα τροποποιήθηκε από τον Αριστοτέλη ο οποίος θεωρούσε ότι τα μαθηματικά αντικείμενα γίνονται γνωστά - μέσω της αφαίρεσης και της γενίκευσης –από τα φυσικά αντικείμενα. Για τους Chiappini & Bottino (2001) τα μαθηματικά αντικείμενα είναι αφηρημένα, δεν έχουν υλική υπόσταση, δεν είναι απτά και κατά συνέπεια είναι προσιτά μόνο μέσω της σκέψης μας. Σε γενικές γραμμές, με τον όρο *μαθηματικό αντικείμενο* εννοούμε ένα αντικείμενο, δημιούργημα του ανθρώπινου νου που σχηματίζεται μέσα από τον τρόπο που το ορίζουμε ως αποτέλεσμα της εμπειρίας μας.

Οι μαθηματικές έννοιες δεν είναι αντικείμενα συνήθη αλλά ενσωματώνουν ένα *δίκτυο σχέσεων* μεταξύ αντικειμένων, δεν είναι προσβάσιμα μέσω της καθημερινής εμπειρίας ούτε μέσω των διαισθητικής αντίληψης όπως τα πραγματικά ή φυσικά αντικείμενα *που* μας περιβάλλουν. Επομένως οι μαθηματικές έννοιες (οι αριθμοί, οι συναρτήσεις, τα γεωμετρικά σχήματα, κ.λπ.) ως μαθηματικά αντικείμενα είναι προσιτά μόνο έμμεσα «μέσω της χρήσης *σημείων* και σημειωτικών αναπαραστάσεων» (Duval, 2006, p.107) οι οποίες τελικά υλοποιούν κάποιες από αυτές τις σχέσεις.

Οι περισσότεροι ερευνητές στο χώρο της Διδακτικής και Ψυχολογίας των μαθηματικών συμφωνούν ότι οι αναπαραστάσεις των μαθηματικών αντικειμένων που κατασκευάζονται από τους μαθητές είναι αποτέλεσμα των νοητικών κατασκευών των μαθητών, καθώς εξετάζουν:

- αφ' ενός, τις *εξωτερικές αναπαραστάσεις* (external representations) των μαθηματικών αντικειμένων ή υλικών σημειώσεων (Kaput, 1999; Goldin & Shteingold, 2001) και των διαδικασιών που μπορούν να αντιμετωπιστούν ή να παραχθούν από τους μαθητές σε ένα ευρύ φάσμα μέσων (οπτικά ή ακουστικά, λεκτικά ή μη λεκτικά, στατικά ή δυναμικά, χρησιμοποιώντας τις γραφικές παραστάσεις, τις αλγεβρικές σημειώσεις, πίνακες κ.λπ.), σημαντικές στην ανάπτυξη της μαθηματικής κατανόησης (Jonassen et al., 1992; Kaput, 2001)
- και αφ' ετέρου τις *εσωτερικές αναπαραστάσεις* (mental or internal representations), ώστε να υπάρχει μια διάκριση μεταξύ της αναπαράστασης της έννοιας ως ένα κοινό τεχνούργημα και των νοητικών αναπαραστάσεων ή νοητικών κατασκευών (Goldin & Shteingold, 2001) της έννοιας.

Τα εξωτερικά αναπαραστατικά συστήματα σύμφωνα με τον Goldin (1998) είναι κατασκευές για την κατανόηση των μαθηματικών ενώ τα εσωτερικά είναι κατασκευές της μαθηματικής συμπεριφοράς των μαθητών. Οι Janvier et al. (1993) θεωρούν τις εξωτερικές αναπαραστάσεις ως «*πράξεις ερεθίσματα στις αισθήσεις ή ενσωματώσεις των ιδεών και των εννοιών*» (p. 81). Οι εσωτερικές αναπαραστάσεις θεωρούνται από τους ίδιους ερευνητές ως «*γνωστικά ή νοητικά μοντέλα, σχήματα, έννοιες, αντιλήψεις (conceptions), και νοητικά αντικείμενα*» (ibid.) που δεν είναι απευθείας (άμεσα) ορατά. Αυτό βρίσκει σύμφωνο τον Vergnaud (1998, αναφερόμενο στο Goldin, 1998, p. 291) ο οποίος θεωρεί ότι «κεντρική εσωτερική έννοια είναι αυτή του *σχήματος* καθόσον αναπαριστά ότι είναι εξωτερικό αλλά έχει ακόμα και τους δικούς του εγγενείς κανόνες (intrinsic rules)". Ο Vergnaud (1987) αναφέρει τρία επίπεδα οντοτήτων σε ένα αναπαραστατικό σύστημα: το *αναφορικό (referent), το σημαινόμενο (signified) και το σημαίνον (signifier).* Το αναφορικό είναι ο κόσμος της εμπειρίας του υποκειμένου, το *σημαινόμενο επίπεδο* αφορά την εσωτερική αναπαράσταση του υποκειμένου για τον κόσμο όπου «οι σταθερές αναγνωρίζονται, συμπεράσματα προκύπτουν, παράγονται ενέργειες και προβλέψεις» (Vergnaud, 1987 όπ. αναφ. στο Erbilgin, 2003, p.9) και το *σημαίνον επίπεδο* αποτελείται από τα διαφορετικά συμβολικά συστήματα (για παράδειγμα η γλώσσα, τα διαγράμματα κλπ.).

Αναλυτικότερα ο όρος *εξωτερικές αναπαραστάσεις* αφορά την οργάνωση συμβόλων, γλωσσών, διαγραμμάτων κλπ. Οι Lesh et al. (1987) ορίζουν τις εξωτερικές αναπαραστάσεις ως φυσικές ενσωματώσεις ιδεών, εννοιών και διαδικασιών επεκτείνοντας/ βελτιώνοντας το μοντέλο του Lesh (1979) ο οποίος όρισε τους (εξωτερικούς) αναπαραστατικούς τρόπους ως ένα σύστημα που περιλαμβάνει προφορικά και γραπτά σύμβολα, στατικά σχηματικά μοντέλα και εικόνες, διαχειρίσιμα (manipulatives) μοντέλα και καταστάσεις πραγματικού κόσμου. Μέσω αυτών (των εξωτερικών αναπαραστάσεων) οι μαθηματικές ιδέες μπορούν να γίνουν αντιληπτές στους μαθητές, (μπορούν δηλαδή οι μαθητές να τις χειριστούν). Ο Goldin (1998) σημειώνει ότι κάθε φυσική κατάσταση – (συμ)περιλαμβάνοντας (και) τα μαθηματικά αντικείμενα – μπορεί να οριστεί ως εξωτερική αναπαράσταση. Για παράδειγμα «μια αριθμογραμμή, η οποία εξηγεί τις σχέσεις μεταξύ αριθμών [...] ένα υπολογιστικό περιβάλλον στο οποίο μπορούμε να χειριστούμε μαθηματικές κατασκευές όπως συναρτήσεις και γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων» (Goldin, 1998, p.285), είναι εξωτερικές αναπαραστάσεις. Σε μια αυστηρότερη διατύπωση του ορισμού της εξωτερικής αναπαράστασης ο Goldin (2003, σελ. 277) θεωρεί τις εξωτερικές αναπαραστάσεις «φυσικές γλώσσες (π.χ.'τυποποιημένα' αγγλικά) συμπεριλαμβάνοντας συγκεκριμένα διαχειρίσιμα υλικά, τους μικρόκοσμους σε υπολογιστές, κοινωνικοπολιτιστικές δομές όπως εκείνες της συγγένειας, των οικονομικών σχέσεων, των πολιτικών ιεραρχιών, ή των σχολικών συστημάτων» (Goldin, 2003, p. 277).

Οι *εσωτερικές αναπαραστάσεις* (internal or mental representations) παίζουν σημαντικό ρόλο στη μάθηση (Hiebert & Carpenter, 1992; Schwartz, 1993), καθώς οι ερευνητές εξετάζουν μέσω αυτών τις αντιλήψεις που οι μαθητές έχουν για τα μαθηματικά αντικείμενα και τις διαδικασίες. Σύμφωνα με τους Pape & Tchoshanov (2001) οι εσωτερικές αναπαραστάσεις είναι μια νοητική αφαίρεση, και μια διασύνδεση μεταξύ της οπτικοποίησης των εννοιών και της εξωτερικής αναπαράστασης. Κατά συνέπεια μια (εξωτερική) αναπαράσταση, είναι εξωτερίκευση μιας εσωτερικής αναπαράστασης.

Οι ερευνητές στον τομέα της γνωστικής ψυχολογίας ισχυρίζονται ότι η μάθηση προκύπτει κατά την διαδικασία της αλληλεπίδρασης μεταξύ των εξωτερικών και εσωτερικών αναπαραστάσεων. Οι εσωτερικές αναπαραστάσεις και οι εξωτερικές αναπαραστάσεις μπορούν να μετασχηματιστούν η μία στην άλλη. Έτσι, η εσωτερίκευση (internalisation) αναφέρεται στη διαδικασία που μετασχηματίζει τις εξωτερικές αναπαραστάσεις σε εσωτερικές αναπαραστάσεις ενώ η αντίθετη διαδικασία καλείται εξωτερίκευση.

Όπως αναφέρουν οι Chiappini & Bottino (2001)

> *«Η δομή των εξωτερικών αναπαραστάσεων δίνει νόημα στη μαθηματική συζήτηση σχετικά με το μαθηματικό αντικείμενο που περιλαμβάνεται στη δραστηριότητα και ταυτόχρονα η μαθηματική συζήτηση συμβάλλει στη οικοδόμηση της εικόνας του μαθηματικού αντικειμένου αυτής της δραστηριότητας. Η μαθηματική συζήτηση που προκύπτει μέσω της (κοινωνικής) αλληλεπίδρασης σε μια τάξη είναι μια μορφή αναπαράστασης, διαφορετική από κάθε άλλη αναπαράσταση. Η κατανόηση τι είναι ένα μαθηματικό αντικείμενο εξαρτάται από ένα πολύ ειδικό τρόπο αντιμετώπισης και επεξεργασίας αναπαραστάσεων, καθώς και τις σχετικές νοητικές εικόνες τους σε μια μαθηματική συζήτηση».*

Από την κονστρουκτιβιστική θεώρηση/ οπτική των Cobb et al. (1992) οι εξωτερικές (αναπαραστάσεις) βρίσκονται στα περιβάλλοντα των μαθητών ενώ οι εσωτερικές αναπαραστάσεις αναπτύσσονται στη σκέψη τους. Η γνώση (μαθηματικά αντικείμενα και έννοιες) για τον κονστρουκτιβισμό δεν μπορεί να διαχωριστεί από το υποκείμενο. Η βασική αρχή του κονστρουκτιβισμού είναι ότι οι μαθητές κατασκευάζουν ενεργά τη μαθηματική γνώση (Greeno, 1991; Hiebert & Carpenter, 1992), δεδομένου ότι ερμηνεύουν και προσπαθούν να λύσουν τα μαθηματικά προβλήματα κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας των μαθηματικών.

Οι ερμηνείες των μαθητών που αφορούν σε μαθηματικές έννοιες αναπαριστώνται νοητικά ως εσωτερικές αναπαραστάσεις. Προκειμένου να επιτευχθεί η μάθηση μιας έννοιας, οι μαθητές θα πρέπει να δημιουργήσουν τις δικές τους αναπαραστάσεις, δηλαδή τη μεταβατική γέφυρα μεταξύ της εσωτερικής και της εξωτερικής αναπαράστασης. Και ο Vygotsky (1978) υποστήριξε ότι η γνώση είναι «εξωτερική» στην αρχή (κοινωνική), ενώ εσωτερικεύεται στη συνέχεια. Ο Vygotsky θεωρεί ότι η εσωτερίκευση είναι μια κοινωνική διαδικασία, δηλαδή μια διαδικασία ελέγχου των εξωτερικών «σημάτων». Ο Piaget αντίθετα ισχυρίζεται ότι η διαδικασία της εσωτερίκευσης συντελείται με τα σχήματα, μέσω της αλληλεπίδρασης με τη φυσική πραγματικότητα (Confrey, 1995) και υποστηρίζει την υποκειμενικότητα της αναπαράστασης.

Έτσι οι εξωτερικές αναπαραστάσεις που κατασκευάζουν οι μαθητές χρησιμεύουν συνήθως ως δείκτης των εσωτερικών τους αναπαραστάσεων (Kaput, 1999; Goldin, 2003) αποτελώντας ένδειξη του επίπεδου κατανόησής τους. Για παράδειγμα η κατασκευή ενός διαγράμματος (π.χ. ενός γεωμετρικού σχήματος) από τους μαθητές ως μετάφραση της διατύπωσης ενός προς επίλυση προβλήματος, αποτελεί ένδειξη κατανόησης των μαθηματικών αντικειμένων αλλά και της σύνδεσης/ σχέσης μεταξύ των μαθηματικών αντικειμένων του προβλήματος. Ως εκ τούτου σύμφωνα με την Sinclair (2001) οι μαθητές «δεν μπορούν να κάνουν ερωτήσεις για τα μαθηματικά αντικείμενα [του προς επίλυση προβλήματος] γιατί δεν μπορούν να κατασκευάσουν το διάγραμμα, και δεν μπορούν να κατασκευάσουν το διάγραμμα επειδή δεν κατανοούν τις συνδέσεις μεταξύ των γεωμετρικών αντικειμένων [του προβλήματος]» (p. 5).

Η διάκριση μεταξύ εσωτερικών και εξωτερικών αναπαραστάσεων είναι παρόμοια με εκείνη του Saussure (1966), μεταξύ σημαινόμενου (signified) και σημαίνοντος (signifier). Ο Saussure, (1966) γράφει «*Ονομάζω τον συνδυασμό μια έννοιας και μιας ακουστικής εικόνας (ή ηχο-εικόνας) (sound-image) «σήμα» (sign) αλλά συνήθως ο όρος γενικά προσδιορίζει μια ακουστική εικόνα, για παράδειγμα μια λέξη…Προτείνω να διατηρήσουμε την λέξη σήμα για να τις προσδιορίσουμε στο σύνολο και να αντικαταστήσουμε την ακουστική εικόνα και την έννοια αντίστοιχα με το σημαίνον (signifier) και το σημαινόμενο (signified). Οι δυο τελευταίοι όροι έχουν το πλεονέκτημα της ένδειξης της αντίθεσης που διαχωρίζει τη μια από την άλλη και από το σύνολο από το οποίο είναι μέρη …* (p.67)».

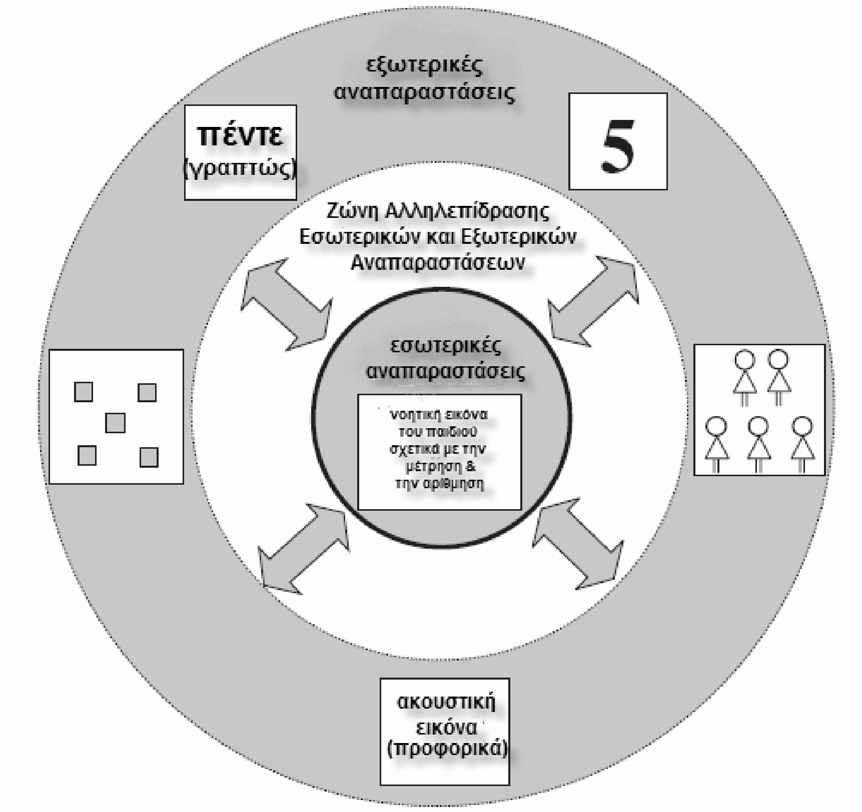
Ο Goldin (1998) οπτικοποίησε τη στενή σχέση μεταξύ εξωτερικών και εσωτερικών αναπαραστάσεων στο Σχήμα 1, εκφράζοντας τη σύνδεση που υπάρχει μεταξύ της εξωτερικής αναπαράστασης (σημαίνοντος) και της εσωτερικής αναπαράστασης (σημαινόμενου) κατά την διάρκεια της αναπαραστατικής δράσης του υποκειμένου.

Σχήμα 1. Αλληλεπίδραση μεταξύ σημαίνοντος και σημαινόμενου κατά τον Goldin (1998, p.293)

Ο Duval (1999) χρησιμοποιεί τον όρο *αναπαράσταση* για να αναφερθεί στις νοητικές οντότητες, δηλαδή ό,τι το υποκείμενο κατανοεί. Στο πλαίσιο αυτό οι νοητικές αναπαραστάσεις θεωρούνται το αντίθετο των σημείων. Κατ' αυτό τον τρόπο τα *σημεία* δεν είναι ούτε νοητικές, ούτε φυσικές οντότητες. Οι νοητικές αναπαραστάσεις υποδιαιρούνται σύμφωνα με τους Johnson-Laird (1983) σε τρεις τύπους: τις προτασιακές (εκφράζονται λεκτικά), τα νοητικά μοντέλα (mental models: προσομοιώσεις της οντότητας που αναπαριστούν) και τις νοητικές εικόνες (mental images).

Η κατανόηση από τους μαθητές μπορεί να επιτευχθεί μέσω της χρήσης των οπτικών ή εικονικών (σχήματα, διαγράμματα κ.λπ.) και λεκτικών (γλώσσα) αναπαραστάσεων ή σημειωτικών μητρώων (βλ. παραπάνω), καθώς παρέχουν τη δυνατότητα ανάπτυξης εσωτερικών αναπαραστάσεων. Οι σημειωτικές αναπαραστάσεις εξαρτώνται από τις νοητικές αναπαραστάσεις του ατόμου, και αποτελούν το μέσο επικοινωνίας του αλλά και οι νοητικές αναπαραστάσεις εξαρτώνται από το είδος των σημειωτικών αναπαραστάσεων. *Υπάρχει επομένως μια αλληλεπίδραση μεταξύ των νοητικών αναπαραστάσεων και των σημειωτικών αναπαραστάσεων που ο μαθητής κατασκευάζει σε διάφορα μέσα.*

Αυτό ακριβώς ισχυρίζονται και οι Pape & Tchoshanov (2001) οι οποίοι στο άρθρο τους «Ο ρόλος των αναπαραστάσεων στην ανάπτυξη της μαθηματικής κατανόησης» δημιούργησαν ένα πλαίσιο μέσω του οποίου εξηγείται η αλληλεπίδραση μεταξύ εσωτερικών και εξωτερικών αναπαραστάσεων. Στο Σχήμα 2 οι Pape και Tchoshanov αναλύουν πως αλληλεπιδρούν οι εσωτερικές αναπαραστάσεις με τις εξωτερικές προκειμένου οι μαθητές να κατανοήσουν την έννοια της αρίθμησης (numeracy). Ισχυρίζονται ότι «όταν το παιδί αρχίζει να σχηματίζει την έννοια του αριθμού 5 έχει αποκτήσει την ικανότητα να χρησιμοποιεί αυτές τις αναπαραστάσεις για να κάνει συγκρίσεις» (Pape & Tchoshanov. 2001, p. 119). Στο Σχήμα 2 οι εξωτερικές αναπαραστάσεις της έννοιας του αριθμού 5 τοποθετούνται στον εξωτερικό δακτύλιο [δηλαδή εικόνες (ζωγραφιές), διαχειρίσιμα αντικείμενα, γραπτά σύμβολα και ακουστικές εικόνες (λεκτικά σύμβολα)], οι νοητικές στον εσωτερικό κύκλο, και στον εσωτερικό δακτύλιο τοποθετείται η αλληλεπίδραση μεταξύ των εσωτερικών και εξωτερικών αναπαραστάσεων.



Σχήμα 2. Σχέση μεταξύ εσωτερικών και εξωτερικών αναπαραστάσεων με στόχο την ανάπτυξη της κατανόησης της αρίθμησης (Pape & Tchoshanov, 2001, p.119)

Η δυνατότητα ανάπτυξης εσωτερικών αναπαραστάσεων μιας ορισμένης έννοιας είναι ένα μέτρο της εννοιολογικής κατανόησης (Gobert & Clement, 1999) των μαθητών. Επομένως οι μαθητές για να αποκτήσουν κατανόηση των μαθηματικών εννοιών είναι αναγκαίο να έχουν την ικανότητα τόσο της αναπαράστασης των *μαθηματικών οντοτήτων*, όσο και τον χειρισμό των μαθηματικών συμβόλων.

Πολλαπλές Εξωτερικές Αναπαραστάσεις (Multiple External Representations, MERs)

> *«Οι αναπαραστάσεις είναι ένα σημαντικό στοιχείο στη θεωρία της διδασκαλίας και μάθησης των μαθηματικών, όχι μόνο γιατί η χρήση των συμβολικών συστημάτων είναι τόσο σημαντική στα μαθηματικά [...] αλλά για δυο ισχυρούς επιστημολογικούς λόγους: 1) τα μαθηματικά παίζουν ένα σημαντικό ρόλο στην κατανόηση του πραγματικού κόσμου 2)τα μαθηματικά κάνουν ευρεία χρήση των ομοιομορφισμών στους οποίους ο μετασχηματισμός των δομών από τον ένα στον άλλο είναι σημαντικός» (Vergnaud, 1987, p.227)*

Η έννοια των πολλαπλών αναπαραστάσεων περιλαμβάνει σειρά αναπαραστατικών τύπων, και ενδοσυνδέσεων (εσωτερικών συνδέσεων) μεταξύ των αναπαραστάσεων. Τα ερευνητικά αποτελέσματα αποδεικνύουν ότι η χρήση των πολλαπλών αναπαραστάσεων στην εκπαίδευση των μαθηματικών ενδυναμώνει την κατανόηση των εννοιών, βελτιώνει την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων και ενισχύει τη μαθησιακή διαδικασία παρέχοντας κοινές πηγές πληροφοριών (Lesh, 1979; Even, 1998; Yerushalmy, 1997).

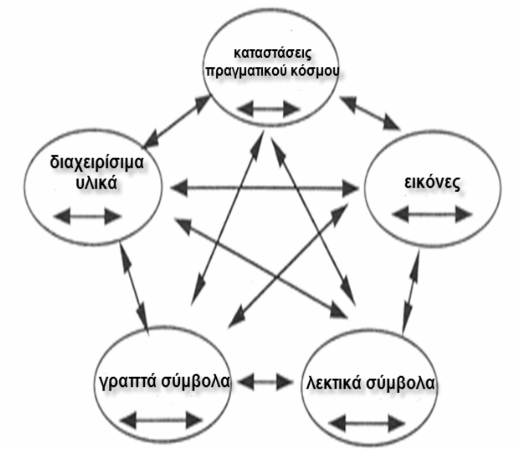
Ο Zoltan Dienes (1960 όπ. αναφ. στους Sriraman & English, 2005, p. 258) εισήγαγε τέσσερις αρχές της μάθησης των μαθηματικών, μέσω των οποίων υπάρχει δυνατότητα να ενισχύσουμε τις μαθηματικές εμπειρίες των μαθητών με αποτέλεσμα την ανακάλυψη εκ μέρους τους των μαθηματικών δομών. Αυτές είναι οι: «η κατασκευαστική αρχή» (construction principle), «η αρχή πολλαπλής ενσωμάτωσης» (the multiple embodiment principle), «η δυναμική αρχή» (dynamic principle) και η «αρχή αντιληπτικής μεταβλητότητας» ("perceptual variability principle"). Μέσω της τελευταίας ο Dienes αναφέρεται στην έννοια των πολλαπλών αναπαραστάσεων. Δηλαδή «την μεταβολή των αντιληπτικών λεπτομερειών του προβλήματος με διατήρηση [κάποιων] κοινών δομικών χαρακτηριστικών έτσι ώστε οι μαθητές να έχουν την δυνατότητα να κάνουν συνδέσεις μεταξύ δομικά όμοιων προβλημάτων» (Sriraman & English, 2005, p. 258).

Αυτό πρακτικά σημαίνει παρουσίαση της ίδιας εννοιολογικής δομής σε τύπους αντιληπτικά ισοδυνάμους, ώστε οι μαθητές να μπορούν να αναπτύξουν την έννοια με αφαιρετικό τρόπο. Για παράδειγμα ένα παραλληλόγραμμο ορίζεται ως ένα τετράπλευρο με τις απέναντι πλευρές του παράλληλες. Αν και το σχήμα μπορεί να μεταβληθεί με τη μεταβολή του μήκους των πλευρών ή του μέτρου των γωνιών, η παραλληλία των απέναντι πλευρών παραμένει το κοινό δομικό χαρακτηριστικό όλων των παραλληλογράμμων. Η *αρχή αντιληπτικής μεταβλητότητας* προτείνει προκειμένου να μεγιστοποιηθεί η ικανότητα γενίκευσης της μαθηματικής έννοιας εκ μέρους των μαθητών, οι μαθητές να έχουν την εμπειρία της μεταβολής των μαθηματικών μεταβλητών (π.χ. της γωνίας και της πλευράς στο παραλληλόγραμμο) καθώς θα τηρείται αμετάβλητη η βασική δομική του ιδιότητα (παράλληλες οι απέναντι πλευρές).

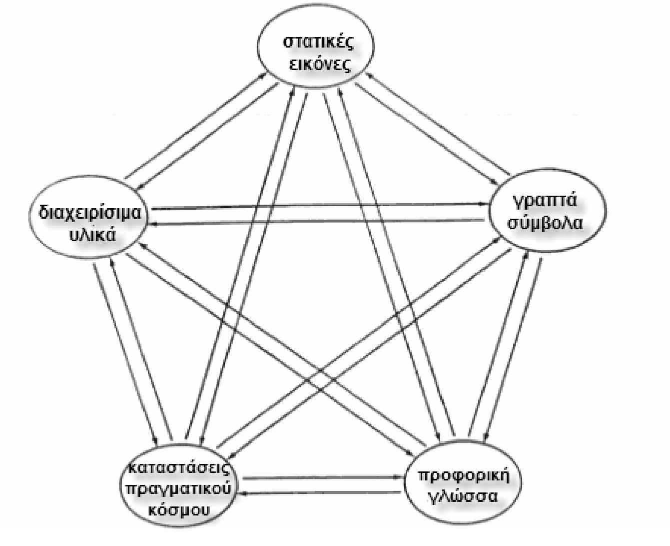
Για τον Dienes (1960) οι μαθητές προκειμένου να κατανοήσουν μια έννοια πρέπει να εργαστούν με διαφορετικά είδη υλικών τα οποία έχουν ενσωματώσει την ίδια έννοια. Η εμπειρία μέσω της μετάβασης στα διαφορετικά είδη υλικών θα μπορούσε να αντικατασταθεί με την μετάβαση μεταξύ διαφορετικών αναπαραστατικών συστημάτων, δηλαδή την αναπαράσταση της έννοιας σε ποικιλία περιβαλλόντων στα οποία οι μαθητές θα μπορούσαν να εξετάσουν την δομή της έννοιας από διάφορες προοπτικές, κατασκευάζοντας ένα σύνολο διαφορετικών νοητικών εικόνων που ανήκουν στην έννοια. Αυτή «η ψυχολογική διαδικασία μετάβασης» από το ένα αναπαραστατικό σύστημα στο άλλο ονομάζεται «*μετάφραση της έννοιας*» μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστατικών συστημάτων (Janvier, 1987). Η λειτουργία αυτή σύμφωνα με τον Janvier είναι αναγκαία για την *εννοιολογική κατανόηση* στα μαθηματικά. Με τον όρο «κατανόηση» ο Janvier (1987, p. 67) περιγράφει τη σωρευτική διαδικασία (cumulative process) που βασίζεται κυρίως στην ικανότητα μετάφρασης μεταξύ ενός όλο και περισσότερο εμπλουτισμένου συνόλου αναπαραστάσεων.

Πολλοί ερευνητές (ενδεικτικά Even, 1998; Lesh, 1979) έχουν δώσει έμφαση στην έννοια των πολλαπλών αναπαραστάσεων ως μέσο για την *εννοιολογική κατανόηση* των μαθηματικών εννοιών. Η Even (1998) ενδεικτικά επισημαίνει ότι ένα σημαντικό ζήτημα για την *εννοιολογική κατανόηση* στα μαθηματικά είναι οι μαθητές να αποκτήσουν την ικανότητα να προσδιορίσουν και να αναπαραστήσουν την ίδια έννοια με διαφορετικούς αναπαραστατικούς τρόπους, να κατανοούν τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα των αναπαραστάσεων, να είναι ικανοί να επιλέξουν τους πιο σημαντικούς και κατάλληλους από τους αναπαραστατικούς τρόπους. Αυτό υπονοεί την ικανότητα εκ μέρους των μαθητών της μετάφρασης κειμένου της φυσικής γλώσσας με μαθηματικούς όρους όπως γράφημα, διάγραμμα, σχήμα ή εξίσωση για να εκφράσουμε τις μαθηματικές ιδέες που περιέχονται στο πρόβλημα. Στην περίπτωση επίλυσης προβλήματος η διαδικασία της κατανόησης περιλαμβάνει την ανάγνωση του προβλήματος, την κατασκευή μιας νοητικής αναπαράστασης με στόχο την μετάφραση του προβλήματος, την οργάνωση των σχέσεων μεταξύ αυτών των αντικειμένων και την αναπαράσταση των σχέσεων, διαδικασία σύμφωνη με τις φάσεις επίλυσης προβλήματος του Polya (1954). Ο Cifarelli (1998) αναφέρεται στις νοητικές αναπαραστάσεις που αναπτύσσονται στις διαδικασίες επίλυσης προβλήματος, καθώς η Yackel (1984) θεωρεί ότι η αναπαράσταση προβλήματος είναι «η γνωστική δομή η οποία κατασκευάζεται από έναν μαθητή στην διαδικασία μετάφρασης του προβλήματος» (p.7). Ο Janvier (1987) με στόχο να καταδείξει τον αδιαίρετο χαρακτήρα των αναπαραστάσεων μιας έννοιας παραλλήλισε την έννοια της αναπαράστασης με αστερία που εμφανίζει τη μορφή του πίνακα (table) όπως το παγόβουνο (σε σχήμα αστερία) εμφανίζει κάθε φορά ένα άκρο του. Η κατανόηση μέσω των πολλαπλών αναπαραστάσεων κατά την επίλυση προβλήματος περιλαμβάνει μεταξύ άλλων την «κατανόηση του προβλήματος και τον προσδιορισμό μιας μαθηματικής ιδέας σε ένα σύνολο διαφορετικών σχημάτων [αναπαραστάσεων] καθώς και τον χειρισμό της ιδέας μέσα σε διαφορετικές αναπαραστάσεις» (Owens & Clements, 1998, p. 204). Για παράδειγμα στην έννοια της συνάρτησης έχουν εφαρμογή όσα αναφέρουν οι Owens & Clements (1998) αφού έχουμε την μετάβαση σε διάφορες μορφές αναπαραστάσεων (αλγεβρική, γραφική, διαγράμματα Euler-Venn, διατεταγμένα ζεύγη, προβλήματα καθημερινότητας) που περιέχουν ή/και αναφέρονται συναρτήσεις. Ο Lesh (1979) ανέπτυξε ένα μοντέλο μετάφρασης μεταξύ διαφορετικών τύπων αναπαραστάσεων σύμφωνα με το οποίο τα στοιχειώδη μαθηματικά μπορούν να αναπαρασταθούν με πέντε διαφορετικούς τρόπους, επεκτείνοντας με τον τρόπο αυτό την θεωρία του Bruner (βλ. παραπάνω) με την αναθεώρηση -προσθήκη, «στον εικονικό τρόπο (iconic mode) του μοντέλου του Bruner των χειριστικών συμβόλων και των στατικών εικόνων, και στον συμβολικό (symbolic mode) των προφορικών και γραπτών συμβόλων (Σχήμα 3α). Ακόμα θεώρησε τα αναπαραστατικά συστήματα ως αλληλεπιδραστικά (interactive) παρά ως γραμμικά (linear)» (Behr et al., 1981). Το μοντέλο του Lesh υποστηρίζει ότι για την ανάπτυξη της *εννοιολογικής κατανόησης* απαιτείται εμπειρία ώστε οι μαθητές να αποκτήσουν την ικανότητα να μεταφράσουν και να χειριστούν την μαθηματική ιδέα και να δημιουργήσουν συνδέσεις μεταξύ διαφορετικών τρόπων αναπαράστασης. Στο Σχήμα 3α απεικονίζονται οι αλληλεπιδράσεις τόσο μεταξύ των διαφορετικών τρόπων αναπαράστασης (βέλη που συνδέουν τους διαφορετικούς τρόπους) αλλά και εσωτερικά στο αναπαραστατικό μέσο (βέλη εσωτερικά).

α)



β)



Σχήμα 3. α) Μοντέλο πολλαπλών αναπαραστάσεων (Lesh, 1979).
β) Αλληλεπιδραστικό μοντέλο πολλαπλών αναπαραστάσεων (Lesh, Post & Behr, 1987)

Οι Lesh et al. (1987) (Σχήμα 3β) βελτίωσαν το μοντέλο του Lesh (1979). Ισχυρίζονται ότι υπάρχουν πέντε διαφορετικά είδη συστημάτων εξωτερικών αναπαραστάσεων σε σχέση με τη μάθηση των μαθηματικών και την επίλυση των προβλημάτων τα οποία είναι (Γαγάτσης & Σπύρου, 2000):

- *καταστάσεις πραγματικού κόσμου* στα οποία η γνώση είναι οργανωμένη σύμφωνα με καταστάσεις της καθημερινής ζωής και τα οποία αποτελούν το πλαίσιο και την ερμηνεία για την επίλυση άλλων καταστάσεων προβλήματος
- *διαχειρίσιμα υλικά* όπως οι κύβοι Dienes όπου τα επιμέρους στοιχεία δεν έχουν νόημα αυτά καθ' εαυτά αλλά οι σχέσεις και λειτουργίες που προκύπτουν από το χειρισμό και συνδυασμό των επιμέρους στοιχείων ταιριάζουν σε πολλές καταστάσεις της καθημερινής ζωής
- *εικόνες ή διαγράμματα* τα οποία είναι δυνατόν να εσωτερικευθούν από τους μαθητές ως νοητικές εικόνες
- *προφορικά σύμβολα* συμπεριλαμβανομένων και των εξειδικευμένων γλωσσών που σχετίζονται με τα διάφορα επιμέρους πεδία (π.χ. μαθηματική λογική)
- *γραπτά σύμβολα* τα οποία όπως και οι γλώσσες μπορούν να περιλαμβάνουν εξειδικευμένες προτάσεις και φράσεις που περιλαμβάνουν μαθηματικές μεταβλητές (π.χ. συμβολική ένωση συνόλων) ή σύμβολα αλλά και προτάσεις ή φράσεις της καθημερινής γλώσσας.

Στο μοντέλο όχι μόνο τα πέντε αναπαραστατικά συστήματα αλλά οι μεταφράσεις μεταξύ αυτών καθώς και οι μετασχηματισμοί μέσα σ' αυτούς είναι σημαντικοί, ώστε να αποκτήσουν οι μαθητές την ικανότητα να αντιστοιχούν μεταξύ διαφορετικών αναπαραστατικών συστημάτων. Οι συνδέσεις μεταξύ των αναπαραστατικών συστημάτων αφορούν καταστάσεις πραγματικού κόσμου (real-world situations), διαχειρίσιμα μοντέλα (manipulatives), γραπτά σύμβολα (written symbols), προφορικά σύμβολα ή προφορική γλώσσα (spoken symbols /oral language), εικόνες ή διαγράμματα (pictures or diagrams). Ένα παρόμοιο μοντέλο έχει αναπτυχθεί από τον Van De Walle (2004). Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις περιλαμβάνουν όπως αναφέραμε τα διαγράμματα, τις γραφικές παραστάσεις και τις εικόνες. Και τα τρία αυτά είδη ανήκουν στις *εικονικές αναπαραστάσεις*. Οι εικονικές αναπαραστάσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να απλοποιήσουν την επεξεργασία πληροφοριών (Stenning & Oberlander, 1995), και να χρησιμεύσουν ως ένα εργαλείο για να εμπνεύσουν τις συνδέσεις μεταξύ των διαφορετικών εννοιών (Chambers & Reisberg, 1985).

Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις επομένως μέσα στην εκπαίδευση των μαθηματικών βελτιώνουν τη δυνατότητα επίλυσης προβλήματος (Borba & Confrey, 1993; Yerushalmy, 1997) που αποτελεί στόχο της αποτελεσματικής διδασκαλίας των μαθηματικών.

Σχήμα 4. Λειτουργίες πολλαπλών αναπαραστάσεων (Ainsworth, 2006, p.187)

Υπάρχουν τρεις βασικές λειτουργίες των πολλαπλών εξωτερικών αναπαραστάσεων (Ainsworth, 1999, 2006): οι συμπληρωματικές (complementary roles), οι περιοριστικές (constrain interpretation) και οι κατασκευαστικές (construct deeper understanding) (Σχήμα 4).

Σύμφωνα με τον Ainsworth (2006) οι πολλαπλές αναπαραστάσεις:

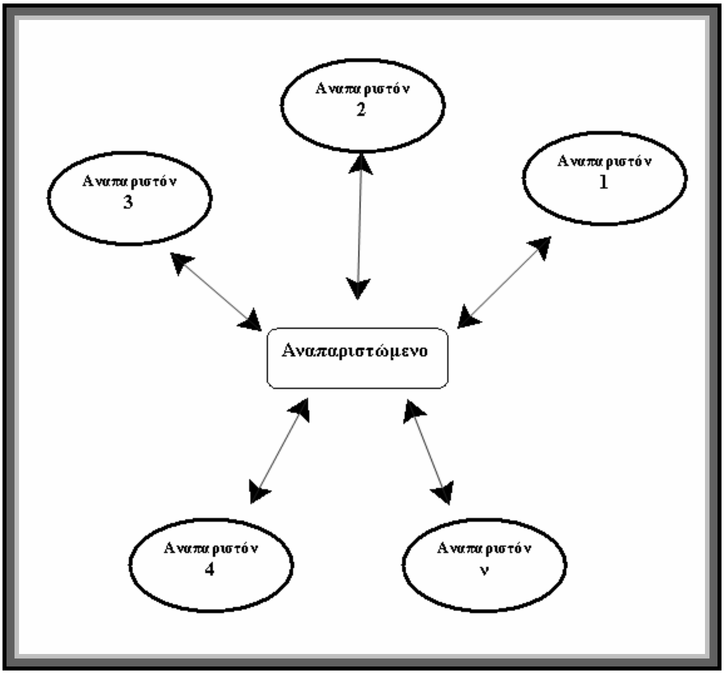
- παρέχουν συμπληρωματικές διαδικασίες ή πληροφορίες που είτε αφορούν εργασίες ή στρατηγικές ενεργειών, είτε τη μετάφραση από τη μια αναπαράσταση στην άλλη
- ενθαρρύνουν τους μαθητές να κατασκευάσουν βαθύτερη κατανόηση της κατάστασης που μελετούν, καθώς μπορούν να κάνουν επεκτάσεις, αφαιρέσεις και συσχετίσεις.

Η αποτελεσματικότητα των πολλαπλών αναπαραστάσεων μπορεί να γίνει καλύτερα κατανοητή με την εξέταση τριών θεμελιωδών πτυχών της μάθησης όπως προτάθηκαν από τον Ainsworth (2006): *τις σχεδιαστικές παραμέτρους* που είναι σημαντικές στην μάθηση με πολλαπλές αναπαραστάσεις, τις *λειτουργίες* που ως πολλαπλές αναπαραστάσεις υποστηρίζουν την μάθηση και τους *γνωστικούς στόχους* που πρέπει να αναληφθούν από έναν μαθητή καθώς αλληλεπιδρά με πολλαπλές αναπαραστάσεις. Ο Ainsworth (2006) αναφέρει ένα σύνολο σχεδιαστικών διαστάσεων που ισχύουν για τα πολυ-αναπαραστασιακά (multi-representational) συστήματα όπως: (α) ο αριθμός των αναπαραστάσεων (β) ο τρόπος που οι πληροφορίες διανέμονται (γ) ο τύπος του αναπαραστατικού συστήματος (δ) η ακολουθία των αναπαραστάσεων και (ε) η υποστήριξη για τη μετάφραση μεταξύ των αναπαραστάσεων.

Η αλληλεπίδραση που αναπτύσσεται σε ένα τέτοιο περιβάλλον πολλαπλών αναπαραστάσεων είναι πολυποίκιλη, ενισχύεται από τις διαφορετικές διαδικασίες και στηρίζεται από τις διαφορετικές αναπαραστάσεις. Οι MERs μπορούν να συμπληρώσουν η μια την άλλη με την υποστήριξη των συμπληρωματικών διαδικασιών ή με τον περιορισμό των συμπληρωματικών πληροφοριών. Τέλος, μπορούν να υποστηρίξουν την κατασκευή μιας βαθύτερης κατανόησης όταν οι μαθητές λειτουργούν αφαιρετικά για να προσδιορίσουν ποια είναι τα κοινά (αμετάβλητα) χαρακτηριστικά γνωρίσματα ενός πεδίου και ποιες είναι οι ιδιότητες μιας αναπαράστασης.

Επομένως είναι σημαντικό για την εννοιολογική κατανόηση στα μαθηματικά να αποκτήσει ο μαθητής την ικανότητα να εκφράζει μέσα από διαφορετικές αναπαραστάσεις το ίδιο μαθηματικό αντικείμενο αλλά και να έχει τη δυνατότητα να διακρίνει το αντικείμενο μέσα από τις πολλαπλές του αναπαραστάσεις.

Στο Σχήμα 5 αναπαριστάνουμε την αμφίδρομη διαδικασία σύνδεσης μεταξύ αναπαριστώμενου –αναπαριστώντος (με δυνατότητα συνύπαρξης πολλαπλών εικόνων) κατά την κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας.



Σχήμα 5. Διπλής κατεύθυνσης διαδικασία σύνδεσης μεταξύ αναπαριστώμενου -αναπαριστώντος

Αυτή η διαδικασία συνεπάγεται δυσκολίες μετάφρασης μεταξύ των διαφορετικών εικόνων του αναπαριστώμενου αντικειμένου. Για να ξεπεραστούν οι δυσκολίες μετάφρασης μεταξύ των διαφορετικών εικόνων του αναπαριστώμενου αντικειμένου ερευνητές και εκπαιδευτικοί εξετάζουν τους βέλτιστους τρόπους αξιοποίησης των εξωτερικών συστημάτων αναπαραστάσεων για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Πολλοί ερευνητές (π.χ. Kaput, 1991, 1999) έχουν διευρύνει τον θεωρητικό προβληματισμό σημειώνοντας ότι η τεχνολογία της ειδικής κατηγορίας artifacts για την μάθηση, των *μαθηματικών μικρόκοσμων (*Hoyles & Noss, 1993; Edwards, 1998) μπορεί να αξιοποιηθεί για τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών εννοιών.

Τα συστήματα δυναμικής γεωμετρίας ως αναπαραστατικά εργαλεία

Μια από τις τρέχουσες ερευνητικές προτεραιότητες είναι η διερεύνηση της προοπτικής αξιοποίησης υπολογιστικών περιβαλλόντων στη διαδικασία επεξεργασίας μαθηματικών ιδεών και διαδικασιών που «ενσωματώνονται» στην ειδική κατηγορία αλληλεπιδραστικών γνωστικών εργαλείων, γνωστών ως «*μαθηματικοί μικρόκοσμοι*» *(*Hoyles & Noss, 1993; Edwards, 1998). Οι Sedig & Liang (2008) έχουν διερευνήσει πώς τα αλληλεπιδραστικά γνωστικά εργαλεία (Jonassen, 2000; Sedig & Liang, 2006) *μπορούν να υποστηρίξουν, να βελτιώσουν, να καθοδηγήσουν, να διοχετεύσουν, να περιορίσουν, και να μετασχηματίσουν τις νοητικές διαδικασίες και τις δραστηριότητες*. Τα αλληλεπιδραστικά γνωστικά εργαλεία ή όπως αποκαλούνται διαφορετικά «εργαλεία μυαλού», «εργαλεία σκέψης», ή «γνωστικές τεχνολογίες» («mind tools, thinking tools, or cognitive technologies» αντίστοιχα) (Sedig & Liang, 2008, p.148):

- αναπαριστούν τις πληροφορίες (Norman, 1993 όπ. αναφ. στους Sedig & Liang, 2008, p.148) και
- είναι αλληλεπιδραστικά και δυναμικά - εξυπηρετώντας τη διαμεσολάβηση μεταξύ μαθητή και πληροφορίας, διευκολύνοντας την απόδοση των επιμέρους δράσεων για τις αναπαραστάσεις των πληροφοριών (Sedig & Liang, 2006 όπ. αναφ. στους Sedig & Liang, 2008, p.148).

Οι Hoyles & Noss (1993) περιγράφουν τους *μαθηματικούς μικρόκοσμους* «ως αναπαραστάσεις των μαθηματικών δομών και σχέσεων» (όπ. αναφ. Edwards, 1998, p. 69). Η Edwards (1998) συμπληρώνοντας την παραπάνω προσέγγιση ισχυρίζεται ότι «οι μικρόκοσμοι μπορούν να θεωρηθούν ως ειδικές μορφές εξωτερικών αναπαραστάσεων» (p. 54) δηλαδή «ως υπολογιστικά περιβάλλοντα τα οποία ενσωματώνουν ή ενεργοποιούν κάποιο υπο-πεδίο των μαθηματικών ή της φυσικής, χρησιμοποιώντας συνδεδεμένες συμβολικές και γραφικές αναπαραστάσεις» (p. 55). Αν αναλύσουμε τις διάφορες αλληλεπιδράσεις μεταξύ μαθητών και μικρόκοσμων αυτές «εμπεριέχουν ένα συνδυασμό της ικανότητας του μαθητή αλλά και της δυνατότητας της τεχνολογίας» (Μπαρκάτσας, 2004, σ. 71-72) λόγω «της δυσκολίας που προκύπτουν από τις επιλογές της διεπιφάνειας [του μικρόκοσμου] και αυτές που αφορούν τις μαθηματικές έννοιες» (Edwards, 1998, p. 67). Σύμφωνα με την Edwards «κατά την αλληλεπίδραση με το μικρόκοσμο ο μαθητής υποτίθεται ότι θα αναδημιουργήσει τη γνώση και την κατανόηση [...] με τη μοντελοποίηση των φαινόμενων που παρατηρούνται στην οθόνη του υπολογιστή» (p.59). Ομοίως, ο Thompson (1987, p.85) αναφέρεται σε ένα σύνολο διαδικασιών που αποτελούν «ένα μοντέλο της έννοιας ή των εννοιών που προτείνονται στο μαθητή» και που «υπό μια έννοια, ο μικρόκοσμος [ως αλληλεπιδραστικό γνωστικό εργαλείο] *ενσωματώνει τη* δομή της έννοιας» (Thompson, 1987, p.85 αναφερόμενο στην Edwards, 1998, p. 69).

Ο σχεδιασμός μικρόκοσμων ώστε πολλαπλές, δυναμικές διασυνδεδεμένες αναπαραστάσεις του να χρησιμοποιηθούν για τη μάθηση μαθηματικών εννοιών αναφέρονται στη διεθνή βιβλιογραφία (ενδεικτικά Kaput, 1991, 1999) και ειδικότερα «αναπαραστασιακά συστήματα τα οποία σχεδιάστηκαν και υλοποιήθηκαν στο λογισμικό ορισμένα από τα οποία είναι διασυνδεδεμένα (δηλαδή το σύστημα σχεδίασης επιφανειών, τα συστήματα έκφρασης διαισθητικής γνώσης των μαθητών σχετικά με την επιφάνεια, το σύστημα αυτόματης μέτρησης και τα δυναμικά συστήματα μετασχηματισμών επιφανειών όπως και τα συστήματα αυτόματης καταμέτρησης των μονάδων) βασισμένα στο πως οι μαθητές μαθαίνουν τις προς μάθηση γεωμετρικές έννοιες» (ενδεικτικά αναφέρεται ο μικρόκοσμος C.A.R.M.E στο Kordaki & Potari, 1998; Kordaki, 2003).

Για να υπερνικήσουν τις δυσκολίες μετάφρασης μεταξύ των αναπαραστάσεων, αυτά τα μαθησιακά υπολογιστικά περιβάλλοντα έχουν σχεδιαστεί να αξιοποιούν την αυτόματη μετάφραση ή τη «δυναμική σύνδεση» (automatic translation or “dyna-linking”) (Ainsworth, 1999, p. 133). Σ' αυτή την περίπτωση, καθώς ένας μαθητής ενεργεί σε μια αναπαράσταση, τα αποτελέσματα των ενεργειών του παρουσιάζονται σε άλλη. Σύμφωνα με την Kordaki (2009) ο ρόλος των πολλαπλών αναπαραστασιακών συστημάτων σε συνδυασμό με τις δραστηριότητες πολλαπλών επιλύσεων δίνει επίσης ευκαιρίες στους μαθητές να προσεγγίσουν από πολλαπλές οπτικές τις προς μάθηση έννοιες και έτσι να διαμορφώσουν πληρέστερη αντίληψη για αυτές.

Στην κατηγορία των μικρόκοσμων που έχουν την δυνατότητα κατασκευής και χρήσης πολλαπλών δυναμικών διασυνδεδεμένων αναπαραστάσεων λόγω των αλληλεπιδραστικών τεχνικών τους, ανήκουν και τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας, όπως το Geometer’s Sketchpad (Jackiw, 1991), Cabri II (Laborde et al., 1988), κ.α. Τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας πληρούν τις αρχές τις σχετικές με την χρήση των ICTs στην εκπαίδευση των μαθηματικών (Yeh & Nason, 2004):

- Μπορούν να χρησιμοποιηθούν όχι μόνο ακριβώς για να ενισχύσουν αυτό που κάνουμε με τα μαθηματικά, αλλά για να αναδιοργανώσουν τη νοητική λειτουργία μας δημιουργώντας νέους τρόπους σκέψης και οικοδόμησης των μαθηματικών εννοιών (Kilpatrick & Davis, 1993; Pea, 1985).
- Η χρήση των DGS βοηθά τους μαθητές να οικοδομήσουν τη γνώση παρά να την αναπαράγουν (Scardamalia & Bereiter, 2002).

- Τα DGS μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως εργαλεία παρά ως δάσκαλοι (tutors), δηλαδή ο τρόπος που οι μαθητές αποκτούν τη γνώση μετατοπίζεται από το τελικό προϊόν στη διαδικασία και από την απόκτηση των γεγονότων στο χειρισμό και την κατανόηση της γνώσης (Papert, 1996; Resnick, 1996).
- Τα DGS χρησιμοποιούνται ως περιβάλλοντα που μπορούν να ενισχύσουν την μάθηση κατά τρόπο κοινωνικό-κονστρουκτιβιστικό (Bruckman & Bandlow, 2002).

Το ζήτημα της αναπαράστασης σχετικά με την χρήση των DGS αφορά τη μοντελοποίηση μέσω των χρησιμοποιούμενων εργαλείων στο λογισμικό και τους τρόπους με τους οποίους αυτά παρέχουν αναπαραστάσεις: δηλαδή τα μαθηματικά αντικείμενα και τις δραστηριότητες μέσα από την κοινωνική διάσταση της διδασκαλίας και μάθησης (Technology Enhanced Learning in Mathematics) (TELMA) (http://telma.noe-kaleidoscope.org). Η συστηματοποίηση των τρόπων για τη σύλληψη των αναπαραστάσεων από τους ερευνητές και ο σχεδιασμός των δυναμικών αναπαραστάσεων έχει αντίκτυπο στις νοητικές αναπαραστάσεις του μαθητή, δηλαδή, στους τρόπους με τους οποίους οι μαθητές οικοδομούν τις προσωπικές τους αναπαραστάσεις για τις μαθηματικές έννοιες κατά τη διάρκεια των δραστηριοτήτων, είτε αυτές απευθύνονται στο μεμονωμένο μαθητή ή στον μαθητή σε περιβάλλον συνεργασίας με άλλους (π.χ. περιβάλλον τάξης).

Για παράδειγμα η μοντελοποίηση ημιπροκατασκευασμένων Συνδεόμενων Οπτικών Ενεργών Αναπαραστάσεων σε πέντε δομικά συνδεδεμένες δυναμικές φάσεις (βλ. ενδεικτικά Patsiomitou, 2008, 2010), χρησιμοποιώντας τις τεχνικές του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας Geometer's Sketchpad, είχε επίδραση στην διαδικασία συλλογισμού των μαθητών όσον αφορά την κατασκευή εικασιών και απόδειξης και την ανάπτυξη εκ μέρους των παραγωγικού συλλογισμού (βλ. ενδεικτικά Patsiomitou, 2008, 2010; Patsiomitou & Emvalotis, 2009, 2010).

Ο Kaput (1991) υποστηρίζει ότι «είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον να επεκτείνουμε το πλαίσιο για τις συνδεδεμένες αναπαραστάσεις [μέσω των λογισμικών] ώστε να χρησιμοποιηθούν για τον σχεδιασμό της διδασκαλίας και ειδικότερα για τα σχολικά προγράμματα σπουδών» (p. 279). Είναι σημαντικό επομένως να διερευνήσουμε και να αναλύσουμε «τους τρόπους που χρησιμοποιούμε για να παρουσιάσουμε και να αναπαραστήσουμε τις σκέψεις μας τόσο για μας όσο και για τους άλλους, (με στόχο) […] να υποστηρίξουμε τους συλλογισμούς [μας]» (Kaput et al., 2002, p. 2).

Τα συμπεράσματα που προκύπτουν μπορούν στη συνέχεια να χρησιμοποιηθούν για να αναλύσουμε τις δυνατότητες αυτών των εργαλείων για τα μαθηματικά στη διδασκαλία και μάθηση, να σχεδιάσουμε νέα εργαλεία, και να κατανοήσουμε καλύτερα τους τρόπους με τους οποίους τα εργαλεία αυτά είναι πιθανό να χρησιμοποιηθούν από τους δασκάλους και τους μαθητές ώστε να μετασχηματιστούν σε *'όργανα' της γνώσης που οικοδομείται* - αναφερόμαστε στην έννοια του 'οργάνου' και του 'εργαλείου' με την σημασία που έχουν αυτές οι δυο έννοιες στην θεωρία της εργαλειακής γένεσης (instrumental genesis) (βλ. ενδεικτικά Πατσιομίτου & Εμβαλωτής, 2009α,β, Πατσιομίτου, 2010) - *μέσω της διαμεσολάβησής τους και του τρόπου που αυτή η γνώση οικοδομείται.*

Αναφορές

Ainsworth, S. (1999). The functions of multiple representations. *Computers & Education,* (33), 131-152.

Ainsworth, S. E. (2006). DeFT: A conceptual framework for learning with multiple representations. *Learning and Instruction,* 16(3), 183-198.

Aspinwall, L. (1995). *The role of graphical representation and students' images in understanding the derivative in calculus: Critical case studies*. Doctoral Dissertation, The Florida State University.

Behr, M., Post, T., & Lesh R. (1981). Construct analyses, manipulative aids, representational systems and the learning of rational numbers. *Proceedings of the Fifth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.203-209). Grenoble, France: PME. Retrieved February 14, 2010, from http://www.cehd.umn.edu/rationalnumberproject/81_2.html

Borba, M., & Confrey, J. (1993). *The role of teaching experiment: Students' construction of transformations in a multiple representational environment*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Atlanta.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: didactique des mathématiques*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bruckman, A., & Bandlow, A. (2003). Human-computer interaction for kids. In A. J. Julie & S. Andrew (Eds.), *The human-computer interaction handbook* (pp. 428-440). London: Lawrence Erlbaum Associates.

Bruner, J. S. (1960). *The process of education*. Cambridge: Harvard University Press.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge, Mass: Belknap Press of Harvard University.

Chambers, D., & Reisberg, D. (1985). Can mental images be ambiguous? *Journal of Experimental Psychology*, 11, 317-328

Chiappini, G., & Bottino, R. (2001). Visualization in teaching-learning mathematics: the role of the computer. Retrieved January 18, 2009, from http://www.siggraph.org/education/conferences/GVE99/papers/GVE99.G.Chiappini.pdf.

Cifarelli, V. (1998). The development of mental representations as a problem solving. *Journal of Mathematical Behavior,* 17(2), 239-264.

Cobb, P., Yackel, E. & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in Mathematical Education. *Journal of Research in Mathematics Education,* 23(1), 2-33.

Confrey, J. (1995). The theory of intellectual development. *For the Learning of Mathematics,* 15(2), 36-45.

Dienes, Z. P. (1961). *Building up mathematics*. London: Humanities Press.

diSessa, A. (1994). Comments on Ed Dubinsky's Chapter. In A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp.248-256). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Dreyfus, T. (1991). On the Status of Visual Reasoning in Mathematics and Mathematics Education. In F. Furighetti (Ed.). *Proceedings of the XV Meeting of the International Group fot the Psychology of Mathematics Education,* Vol. I (pp. 33-48). Assisi, Italy.

Dubinsky, E. (1994). A theory and practice of learning college mathematics. In A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp.221-243). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Berne: Peter Lang

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive function in mathematical thinking. *In Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 2-26). Cuernavaca, Morelos, Mexico.

Duval, R. (2006). Cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 61(1-2), 103-131.

Edwards, L. (1998). Embodying mathematics and science: Microworls as representations. *Journal of Mathematics Behavior,* 17(1), 53-78.

Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1990). On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmermann & S. Cunninham (Ed.). *Visualization in Teaching and Mathematics* (pp. 25-37). Washington DC: Mathematical Association of America.

Even, R. (1998). Factors Involved in Linking Representations of Functions. *Journal of Mathematical Behavior,* 17(1), 105-121.

Erbilgin, E. (2003). Effects of spatial visualization and achievement on students' use of multiple representations. Master Thesis. The Florida State University. Retrieved February 10, 2009, from http://etd.lib.fsu.edu/theses/available/etd-09172003-182500/unrestricted/evrim_thesis.pdf.

Glasersfeld, E. (1991). *Radical Constructivism in Mathematics Education.* Kluwer Academic Publishers.

Gobert, J., & Clements, J. (1999). Effects of student-generated diagrams versus student-generated summaries on conceptual understanding of causal and dynamic knowledge in plate tectonics. *Journal of Research in Science Teaching,* 36(1), 39-53.

Goldin, G. (1998). The PME working group on representations. *Journal of Mathematical Behavior,* 17(2), 283-301.

Goldin, G., & Janvier, C. (1998). Representations and the psychology of mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior,* 17(1), 1-4.

Goldin, G., & Kaput J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin, & B. Greer (Eds.). *Theories of mathematical learning* (pp. 397-430). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and development of mathematical concepts. In A. Cucoco & F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1-23). Reston: National Council of Teachers Mathematics.

Goldin, G. (2003). Representation in school mathematics: A unifying research perspective. In J. Kilpatrick, Martin, W., Schifter, D., & National Council of Teachers of Mathematics (Ed.). *A research companion to Principles and standards for school mathematics*, Vol.17 (pp. 1-4). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Goldenberg, E. (1995). Multiple Representations: A vehicle for Understanding. In D. Perkins (Ed.), *Software Goes to School: Teaching for Understanding with New Technology* (pp.155-171). New York: Oxford University Press.

Greeno, J. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal of Research in Mathematics Education,* 25(1), 94-99.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Hiebert, J. & Carpenter, T. P . (1992). Learning and teaching with understanding. In D. Grouws (Ed.), *A handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-100). New York: Macmillan Library Reference Simon & Schuster Macmillan.

Hoyles, C. & Noss, R. (1993). Deconstructing microworlds. In D. Ferguson (Ed.), *Advanced technologies in the teaching of mathematics and science* (pp. 415-438). Berlin: Springer-Verlag.

Jackiw, N. (1991). The *Geometer's Sketchpad*. Berkeley, CA: Key Curriculum Press.

Janvier, C. (1987). *Problems of Representations in the Learning and Teaching of Mathematics*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Janvier, C., Girardon, C., & Morand, J. (1993). Mathematical symbols and representations. In P. Wilson (Ed.), *Research Ideas for the Classroom: High School Mathematics* (pp. 79-102). Reston: NCTM.

Jaworski, B. (2003). Inquiry as a pervasive pedagogic process in mathematics education development, *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Bellaria, Italy. Retrieved February 4, 2009, from http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3

Johnson-Laird, P. (1983). Mental Models: *Towards a Cognitive Science of Language, Inference and Consciousness*. Cambridge: Cambridge University Press

Jonassen, D. (2000). *Computers as mindtools for schools: Engaging critical thinking. New Jersey*: Prentice-Hall Inc.

Jonassen, D., Cole, P., & Bamford, C. (1992). *Leaner-generated vs. instructor provided analysis of semantic relationships.* Paper presented at the Convention of the Association for Educational Communications and Technology, New Orleans, LA. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 362 170).

Kaput, J. (1987). Representation systems and mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 19-26). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. In E. Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 53-74). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Kaput, J. (1999). Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows. *Journal of Mathematical Behavior,* 17(2), 256-281.

Kaput, J. (2001). *Learning algebra using dynamic simulations and visually editable graphs of rate and totals quantities*. Paper presented at the QCA International Seminar on “Reasoning, Explanation and Proof in School Mathematics and Their Place in the Intended Curriculum”. London, England.

Kaput, J., Noss, R. & Hoyles, C. (2002). Developing New Notations for a Learnable Mathematics in the Computational Era. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 51-75). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Kordaki, M., & Potari, D. (1998). A learning environment for the conservation of area and its measurement: a computer microworld. *Computers & Education,* 31, 405-422

Kordaki, M. (2003). The effect of tools of a computer microworld on students' strategies regarding the concept of conservation of area. *Educational Studies in Mathematics,* 52, 177-209.

Kordaki, M. (2009). MULTIPLES: a challenging learning framework for the generation of multiple perspectives within e-collaboration settings. In T. Daradoumis, Caballe, S., Marques, J.-M., & Xhafa, F. (Ed.), *Intelligent Collaborative e-Learning Systems and Applications* (pp. 37-51). Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag.

Kilpatrick, J., & Davis, R. (1993). Computers and curriculum change in mathematics. In C. Keitel, & Ruthven, K. (Ed.), *Learning from computers: Mathematics education and technology* (pp. 203-221). Berlin: Springer.

Laborde, J-M., Baulac, Y., & Bellemain, F. (1988). *Cabri Géomètre*. Grenoble, France: IMAG-CNRS, Universite Joseph Fourier.

Lesh, R. (1979). Mathematical learning disabilities: Considerations for identification, diagnosis, remediation. In R. Lesh, Mierkiewicz, D. & Kantowski, G. (Eds.), *Applied mathematical problem solving* (pp.111-180). Ohio: Columbus.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 33-40). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Mesquita, A. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *Journal of Mathematical Behavior,* 17(2), 183-195.

Norman, D. A. (1993). *Things that make us smart: Defining human attributes in the age of the machine*. Reading, Mass: Addison-Wesley.

Owens, K., & Clements, M. (1998). Representations used in spatial problem solving in the classroom. *Journal of Mathematical Behavior,* 17(2), 197-218.

Palmer, S. (1978). Fundamental aspects of cognitive representation. In E. Rosch, & Lloyd, B. (Ed.), *Cognition and categorization* (pp. 259-303). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Pape, S., & Tchoshanov, M. (2001). The role of representation(s) in developing mathematical understanding. *Theory into Practice,* 40(2), 118-125.

Papert, S. (1996). A word for learning. In Y. Kafai & M. Resnick (Eds.), *Constructionism in practice: Designing, thinking, and learning in a digital world* (pp. 9-24). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Patsiomitou, S. (2008). The development of students' geometrical thinking through transformational processes and interaction techniques in a dynamic geometry environment. *Issues in Informing Science and Information Technology Journal,* 5, 353-393.

Patsiomitou, S. (2010). Building LVAR (Linking Visual Active Representations) modes in a DGS environment. *Electronic Journal of Mathematics and Technology,* 4(1), 1-25.

Patsiomitou, S., & Emvalotis A. (2009). Does the Building and transforming on LVAR modes impact students way of thinking? In M.Tzekaki, Kaldrimidou, M. & Sakonidis, C. (Eds.), *Proceedings of* *the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 337-344). Thessaloniki, Greece: PME.

Patsiomitou, S., & Emvalotis, A. (2010).The development of students' geometrical thinking through a DGS reinvention process. In M. Pinto, & Kawasaki, T. (Eds), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.4, pp. 33-40), Belo Horizonte. Brazil: PME.

Pea, R. (1985). Beyond amplification: using the computer to reorganize mental functioning. *Educational Psychology,* 20(4), 167-182.

Presmeg, N. (1986). Visualisation and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics,* 17, 297-311.

Presmeg, N. (1998). Metaphoric and metonymic signification in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior,* 17(1), 25-32.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning: Vol. I. Induction and analogy in mathematics. Princeton*: Princeton University Press

Resnick, M. (1996). New paradigms for computing, new paradigms for thinking. In B. Kafai, & M. Resnick (Ed.), *Constructionism in practice: Designing, thinking, and learning in a digital world* (pp. 255-267). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Saussure, F. (1966). *A course in general linguistics*. New York: McGraw-Hill.

Scardamalia, M., & Bereiter, C. (2002). *Knowledge building. Encyclopedia of Education.* New York: Macmillan Reference, USA.

Schwartz, D. (1993). The construction and analogical transfer of symbolic visualization. *Journal of Research in Science Teaching,* 30(10), 1309-1325.

Sedig, K., & Liang, H. (2006). Interactivity of visual mathematical representations: Factors affecting learning and cognitive processes. *Journal of Interactive Learning Research,* 17(2), 179-212.

Sedig, K., & Liang, H. (2008). Learner-information interaction: a macro-level framework characterizing visual cognitive tools. *Journal of Interactive Learning Research,* 19(1), 147-173.

Seeger, F. (1998). Discourse and beyond: on the ethnography of classroom discourse. In A. Sierpinska (Ed.), *Language and communication in the mathematics Classroom* (pp. 85-101). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Sinclair, M. P. (2001). *Supporting student efforts to learn with understanding: an investigation of the use of Javasketchpad sketches in the secondary school geometry classroom.* Unpublished doctoral dissertation, University of Toronto, Graduate Department of Education.

Sriraman, B., & English, L. (2005). On the teaching and learning of Dienes' Principles. *International Reviews of Mathematical Education,* 37(3), 58-262.

Stenning, K. O., J. (1995). A cognitive theory of graphical and linguistic reasoning: Logic and implementation. *Cognitive Science,* 19, 97-140.

Tall, D. (1994). *A versatile theory of visualisation and symbolisation in mathematics*. Retrieved February 14, 2009 from http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/ dot1996b-plenary-cieaem.pdf.

Thompson, P. (1987). Mathematical microworlds and intelligent computer-assisted instruction. In G. Kearsley (Ed.), *Artificial intelligence and instruction: Applications and methods* (pp. 83-109). Reading: Addison Wesley.

Vergnaud, G. (1987). Conclusion. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 227-232). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Vergnaud, G. (1998). Comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematics Behavior,* 17(2), 167-181.

Vinner, S. (1989). The avoidance of visual considerations in calculus students. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11, 149-156.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Yackel, E. (1984). *Characteristics of problem representation indicative of understanding in mathematical problem solving*. Unpublished doctoral dissertation, Purdue University.

Yeh, A., & Nason, R. (2004). *Toward a semiotic framework for using technology in mathematics education: The case of learning 3D geometry.* Paper presented at the International Conference on Computers in Education, Melbourne, Australia. Retrieved February 10, 2009 from http://eprints.qut.edu.au/1380.

Yerushalmy, M. (1997). Designing representations: Reasoning about functions of two variables. *Journal for Research in Mathematics Education,* 28(4), 431-466.

van de Walle, J. A. (2004). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*. New York: Longman.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2004). Understanding primes: The role of representation. *Journal for Research in Mathematics Education,* 35(3), 164-186.

Zimmerman, W., & Cunningham, S. (1991). Editors introduction: What is mathematical visualization? In W. Zimmerman, & Cunningham, S. (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics. Notes Number 19* (pp. 1-7). Washington DC: Mathematical Association of America.

Βοσνιάδου, Σ. (2000). *Η ψυχολογία των μαθηματικών*. Αθήνα: Gutenberg,

Βοσνιάδου, Σ. (2003). *Εισαγωγή στην Ψυχολογία, Τόμος Α'.* Αθήνα: Gutenberg,

Γαγάτσης, Α. (1995). *Διδακτική και ιστορία των Μαθηματικών*. Θεσσαλονίκη.

Γαγάτσης, Α., & Σπύρου Π. (2000). *Πολλαπλές αναπαραστάσεις, ανθρώπινη νοημοσύνη και μάθηση*. Αθήνα.

Μπαρκάτσας, Α. Ν. (2004). *Οι επιδράσεις των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στη Μάθηση, στη Διδακτική και στην Αξιολόγηση των Μαθηματικών*. Χαλκίδα: Κωστόγιαννος.

Πατσιομίτου, Σ. (2010). *Μαθαίνω Μαθηματικά με το Geometer's Sketchpad v4*. Τόμος Α, Αθήνα: Κλειδάριθμος (υπό έκδοση).

Πατσιομίτου, Σ., & Εμβαλωτής, Α. (2009α). Επίδραση των μετασχηματισμών Συνδεόμενων Οπτικών Ενεργών Αναπαραστάσεων στην επίλυση προβλήματος. Στο *Πρακτικά 26ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας* (σ. 763-775). Θεσσαλονίκη.

Πατσιομίτου, Σ., & Εμβαλωτής, Α. (2009β). Οικονομία και κατάχρηση στη χρήση εργαλείου αρχείων εντολών λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας κατά την επίλυση προβλήματος Στο *Πρακτικά 26ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας* (σ. 776-785). Θεσσαλονίκη.